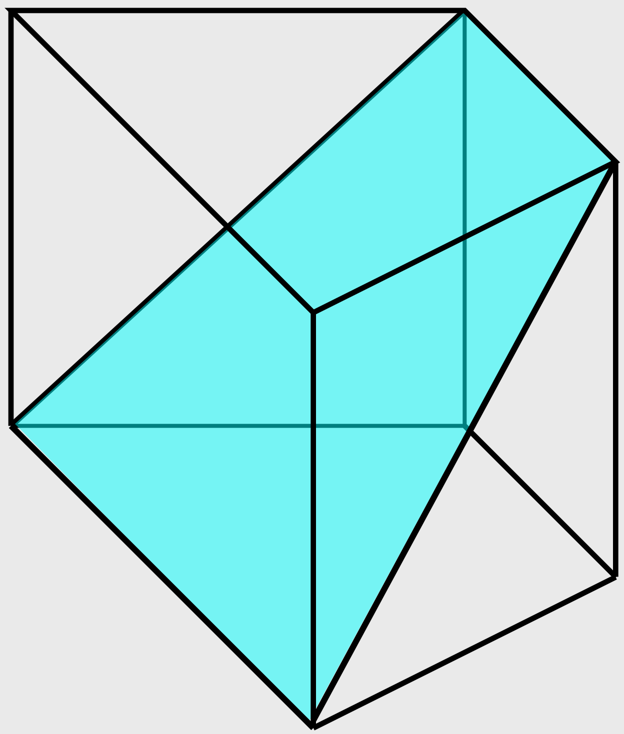
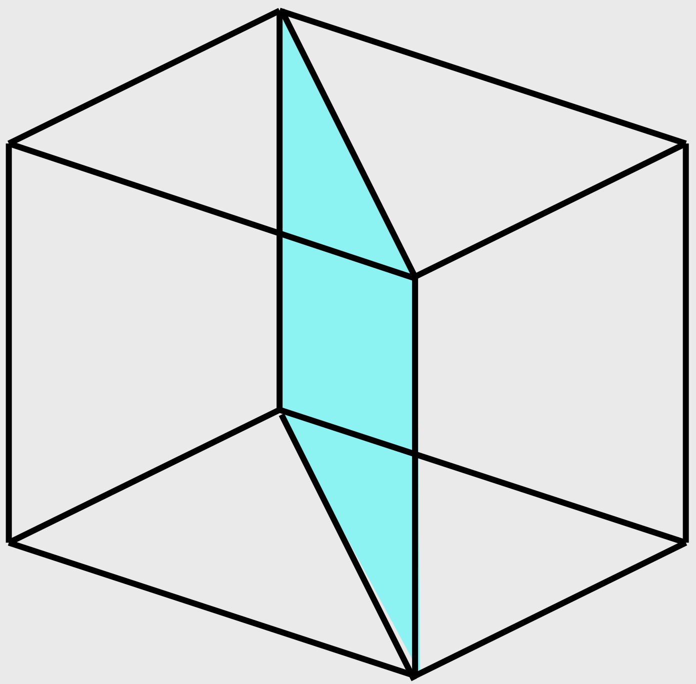
Геометрия, 10 класс

- ***Тема***: Построение сечений многогранников методом «следа».





Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Основные понятия

- *Секущей плоскостью* многогранника называется такая плоскость, по обе стороны от которой есть точки данного многогранника.
- *Сечением* многогранника называется фигура, состоящая из всех точек, которые являются общими для многогранника и секущей плоскости.

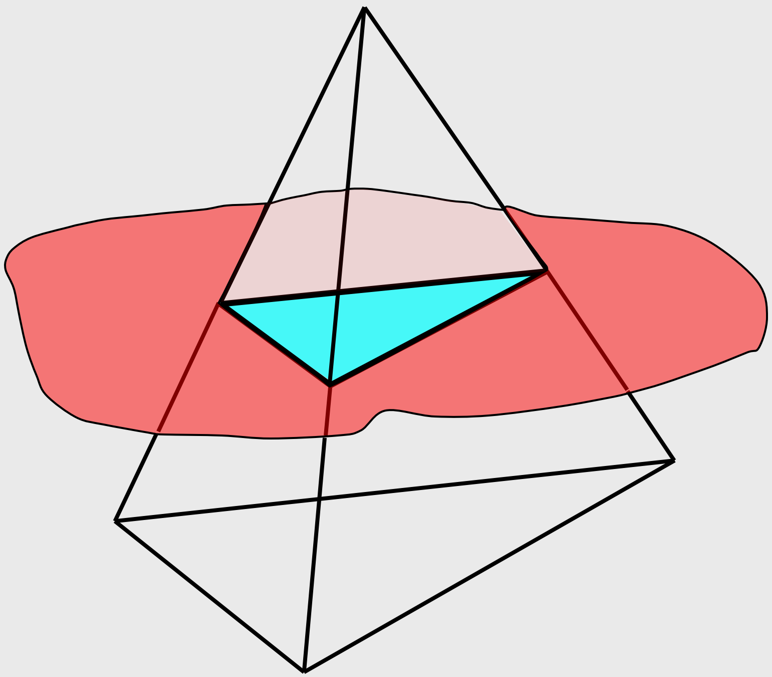


Рис.1

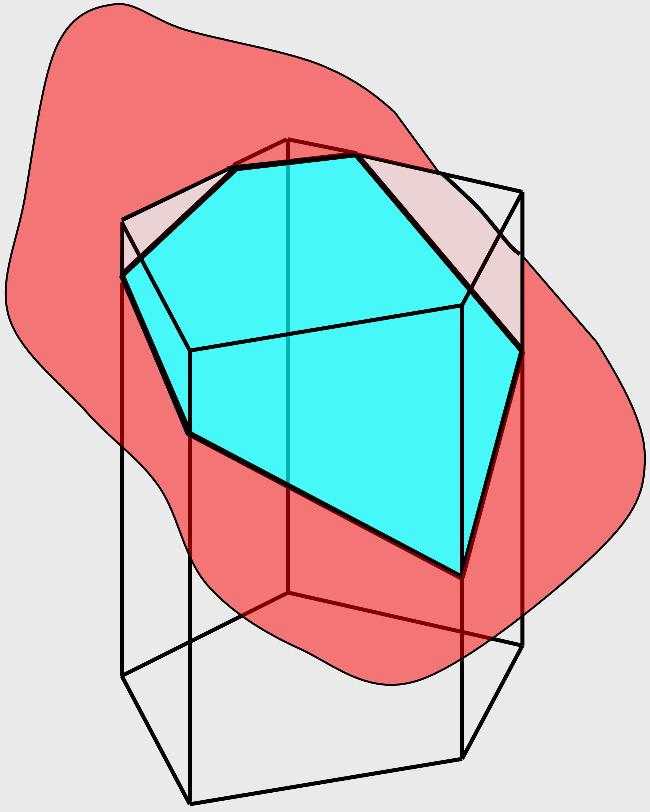


Рис.2

- Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам, поэтому сечение многогранника есть многоугольник, лежащий в секущей плоскости. Очевидно, что количество сторон этого многоугольника не может превышать количества граней данного многогранника. Например (см.рис.3), в пятиугольной призме (всего 7 граней) в сечении могут получиться: треугольник, 4-угольник, 5-угольник, 6-угольник или 7-угольник.

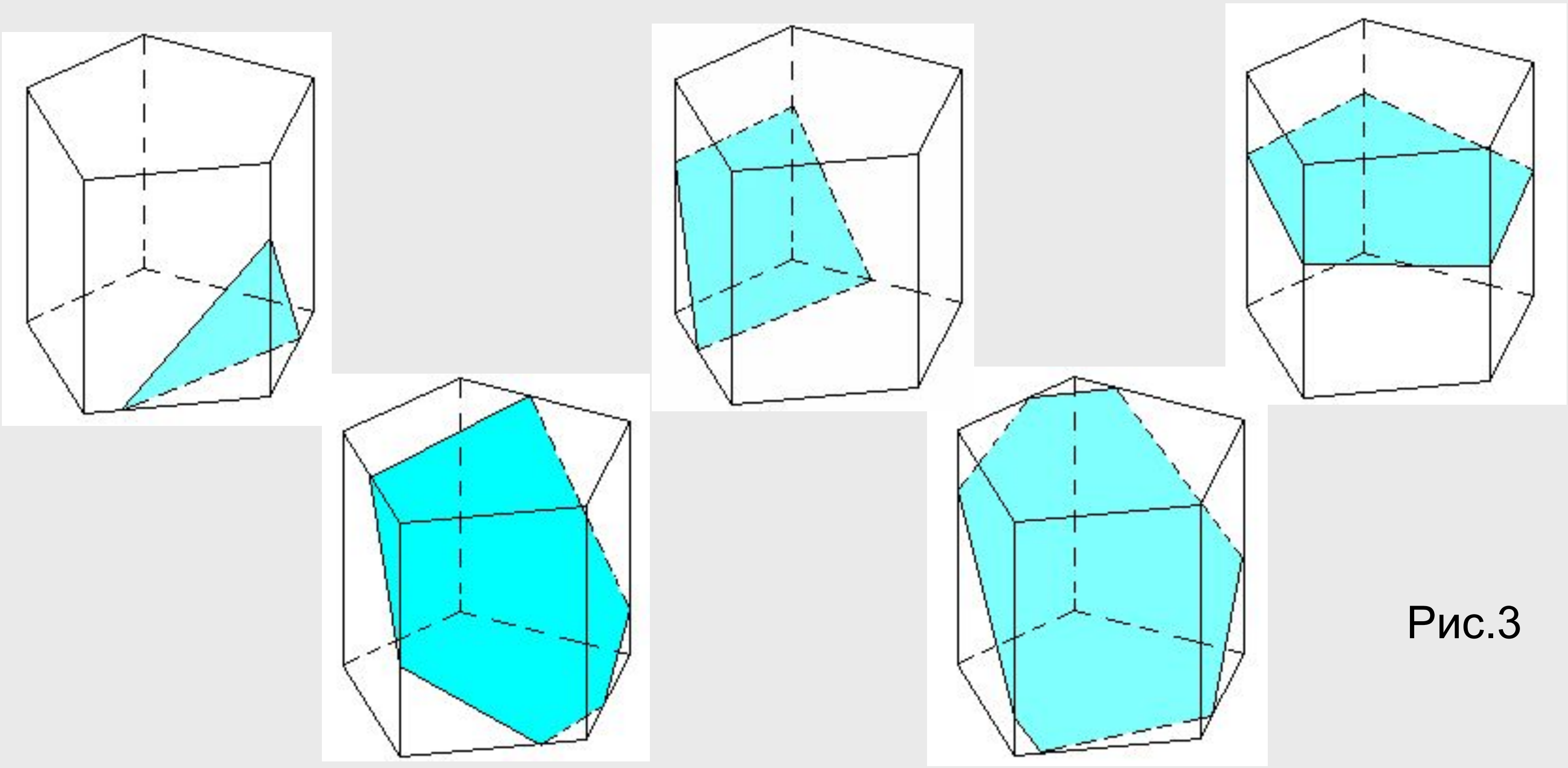


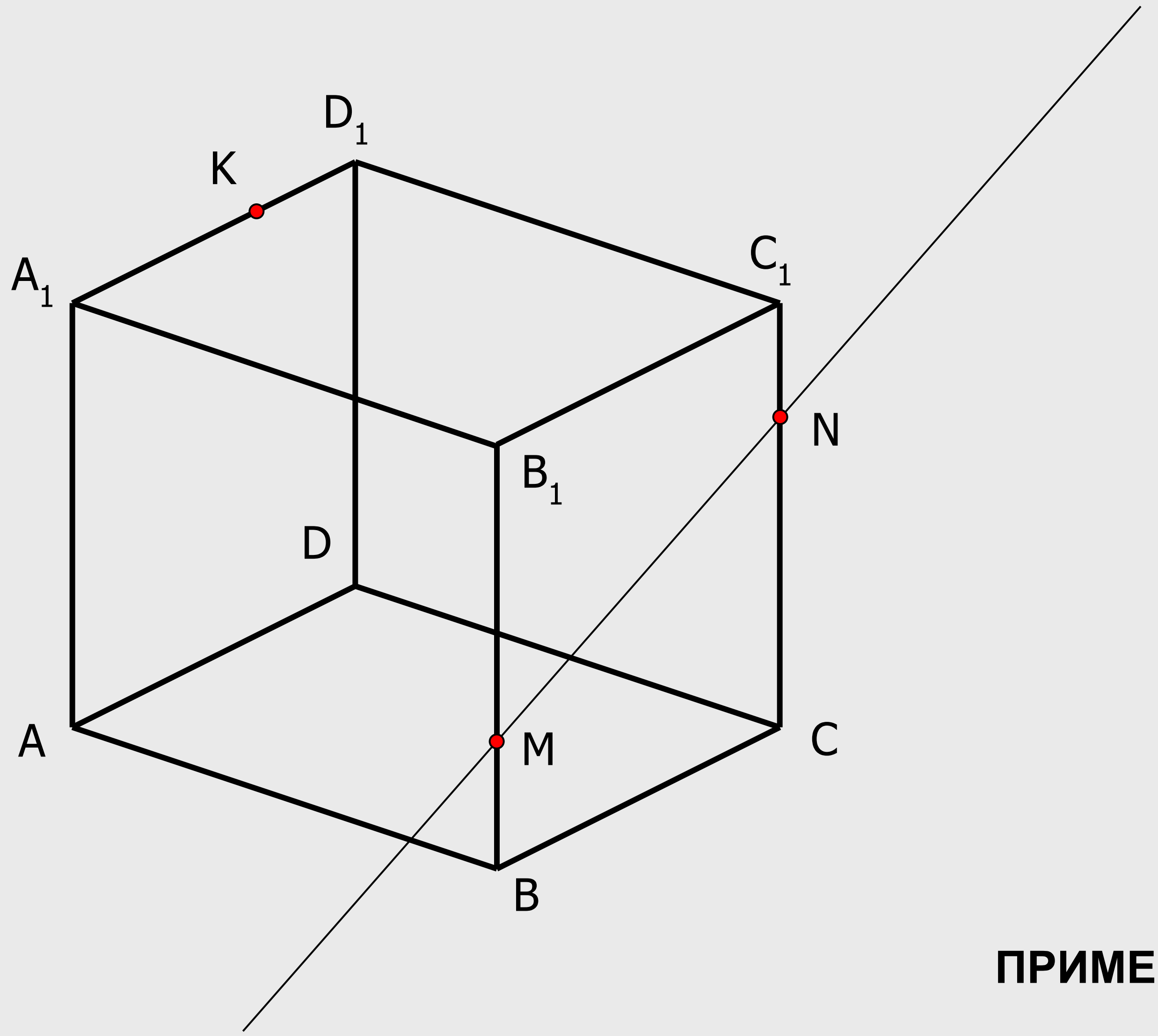
Рис.3

- Две плоскости пересекаются по прямой (эта аксиома и дала названию метода – под «следом» понимается прямая пересечения какой-либо грани многогранника и секущей плоскости).
- Получение «следа» сводится к получению двух точек, принадлежащих одновременно какой-нибудь грани многогранника и секущей плоскости (подумайте, почему именно двух!?).
- Точки получаются как пересечение двух прямых, **<u>принадлежащих одной и той же плоскости</u>**.

ПРИМЕЧАНИЕ. *Не забудьте, что прямая и плоскость являются бесконечными в пространстве фигурами!*

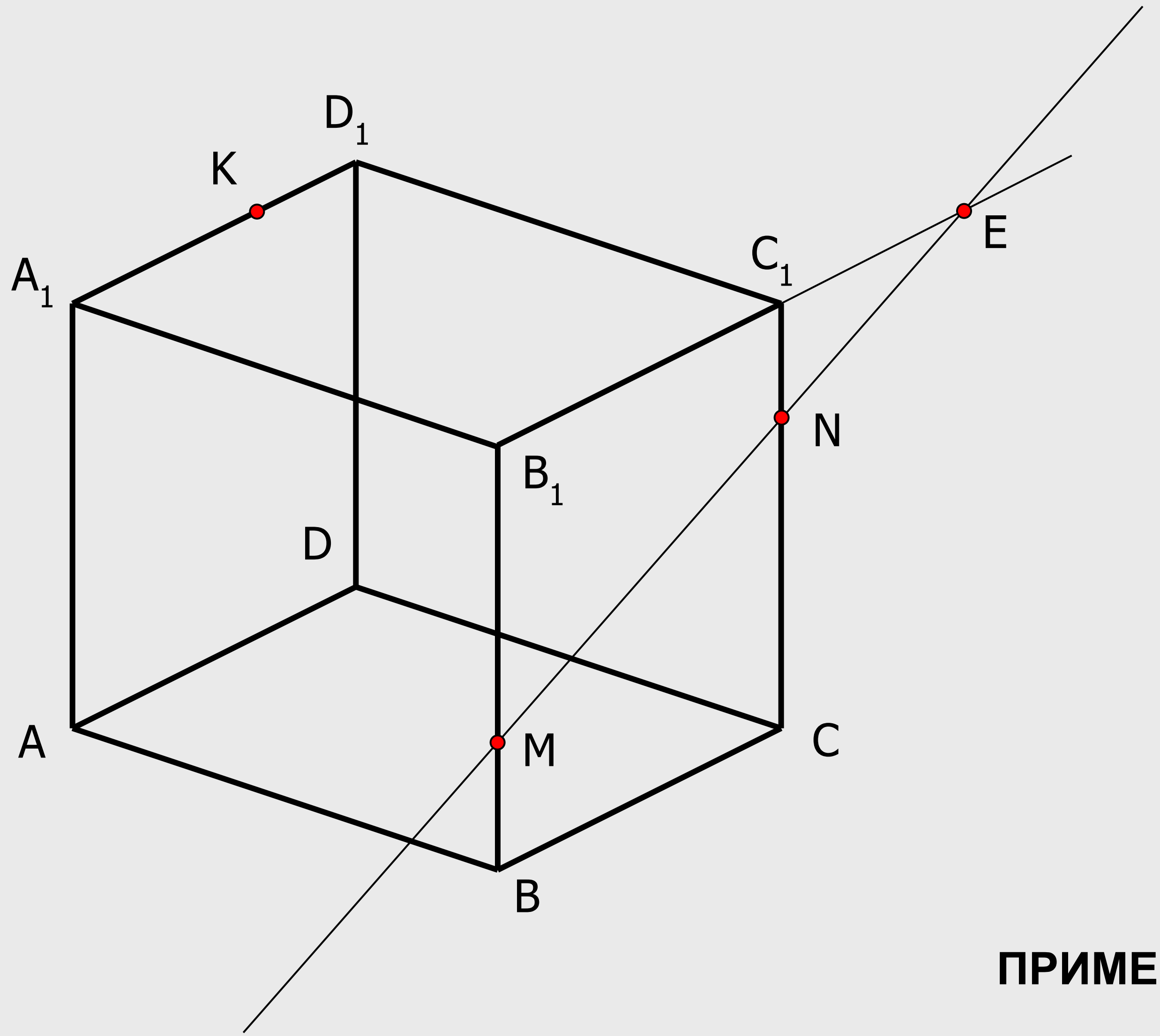
Проследим на примере построение сечения куба плоскостью, заданной тремя данными точками M, N и K.

Выбираем точки M и N, принадлежащие одной грани и строим прямую MN – «след» пересечения правой грани и секущей плоскости.



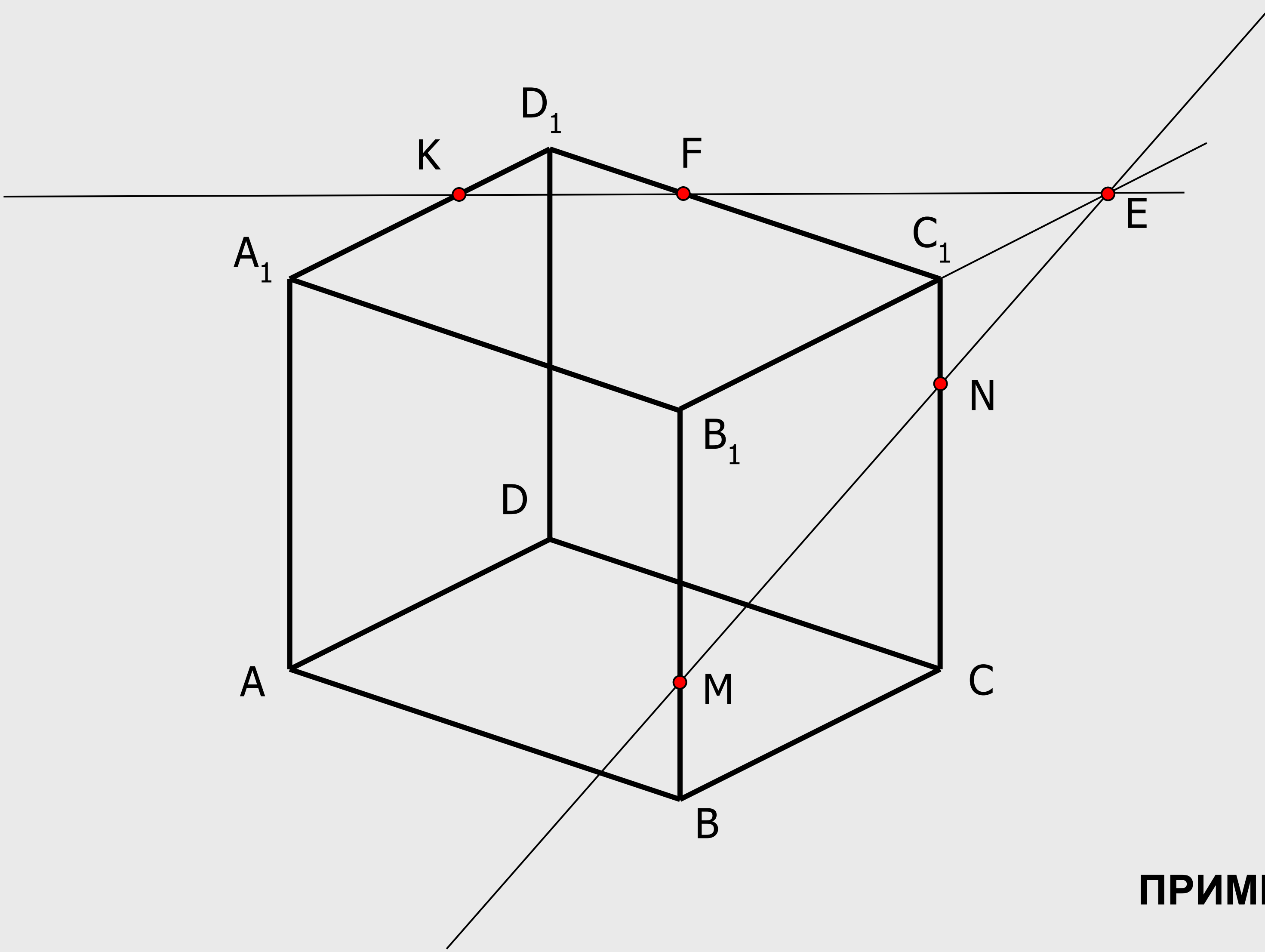
ПРИМЕР 1.

Теперь обращаем внимание, что ребро куба B_1C_1 лежит в одной грани с третьей точкой сечения К (верхней) и в одной грани с появившейся прямой MN (правой). Находим точку пересечения этих прямых – точку Е.



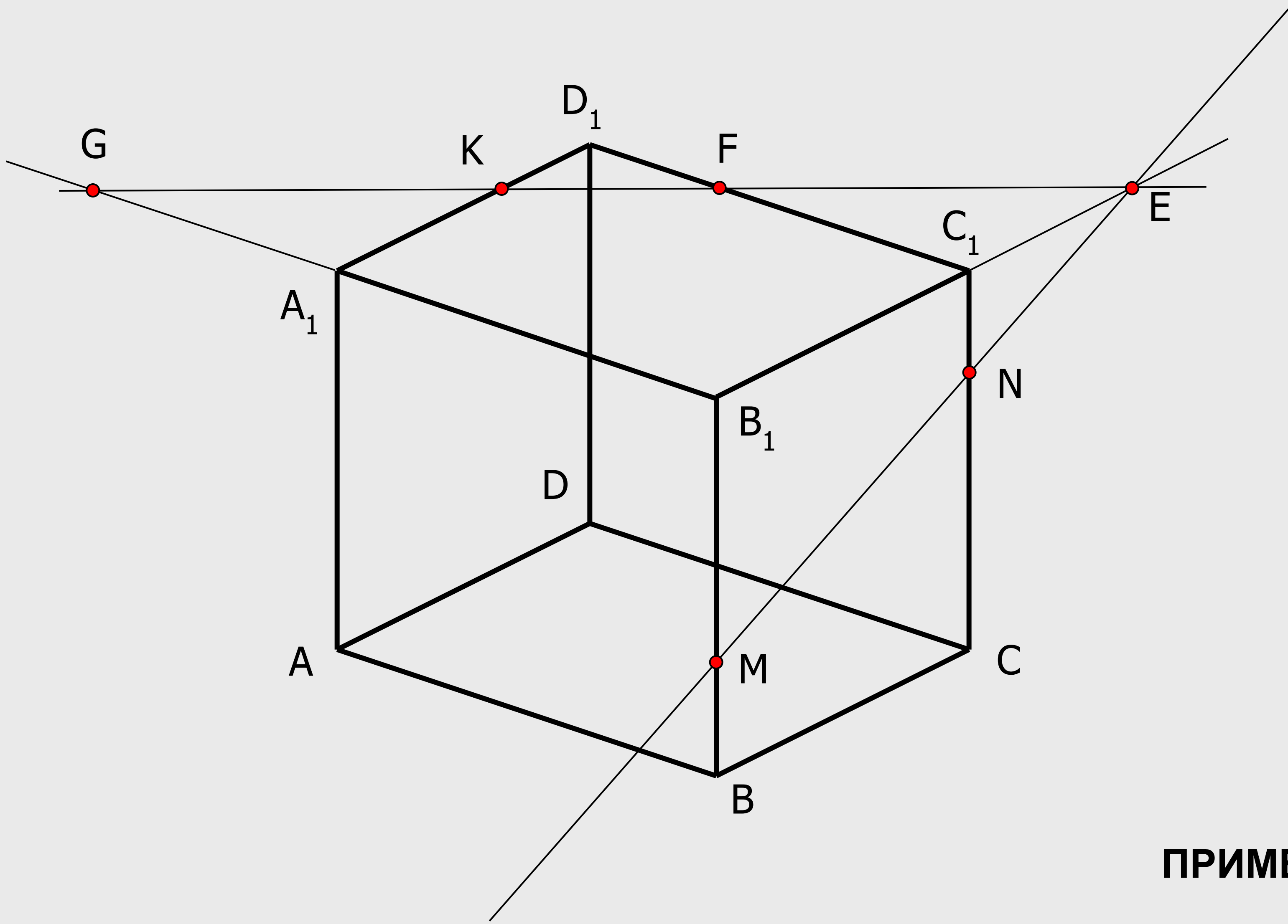
ПРИМЕР 1.

Точки E и K принадлежат верхней грани и секущей плоскости. Значит, прямая EK – «след» их пересечения и $F \in D_1C_1$, EK.



ПРИМЕР 1.

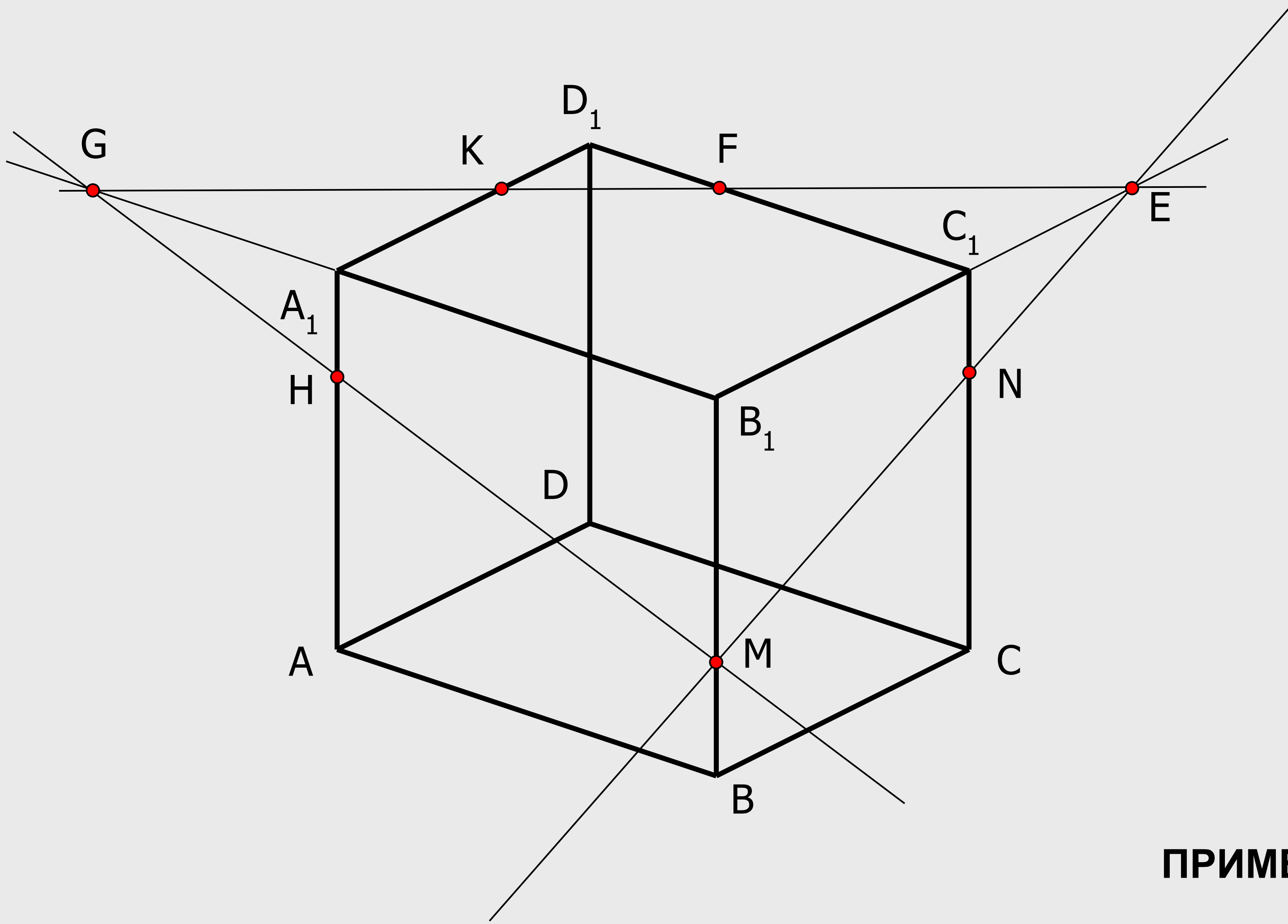
Далее видим, что ребро куба A_1B_1 лежит в одной грани с появившимся следом ЕК (верхней). Находим точку пересечения этих прямых – точку G.



ПРИМЕР 1.

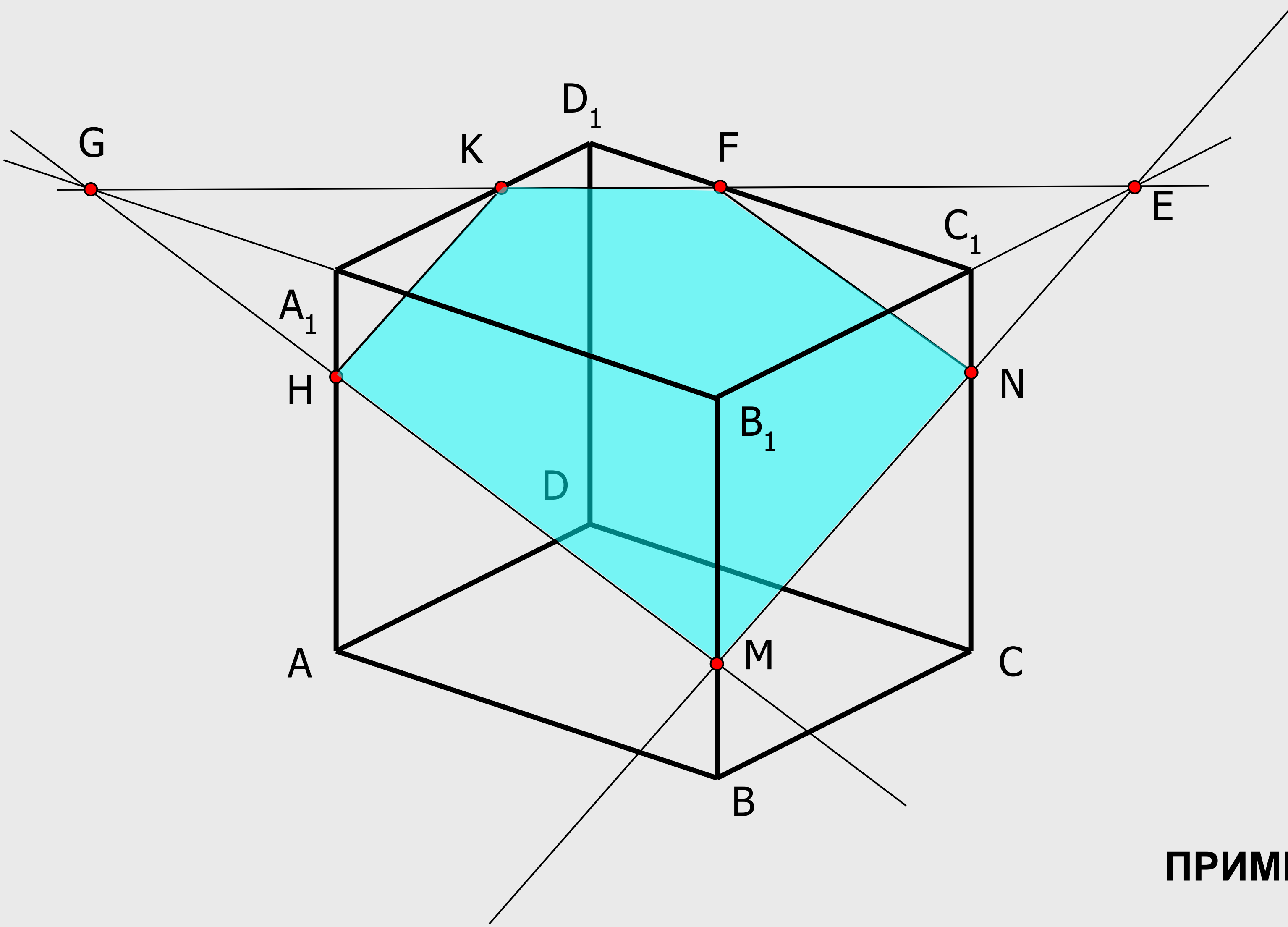
Полученная точка G лежит в одной грани с точкой M (в передней) и обе точки принадлежат секущей плоскости – значит, прямая GM – очередной «след»!

Причем, $GM \cap AA_1 = H$.



ПРИМЕР 1.

Остается соединить отрезками все пары точек, лежащие в секущей плоскости и в одной грани куба.

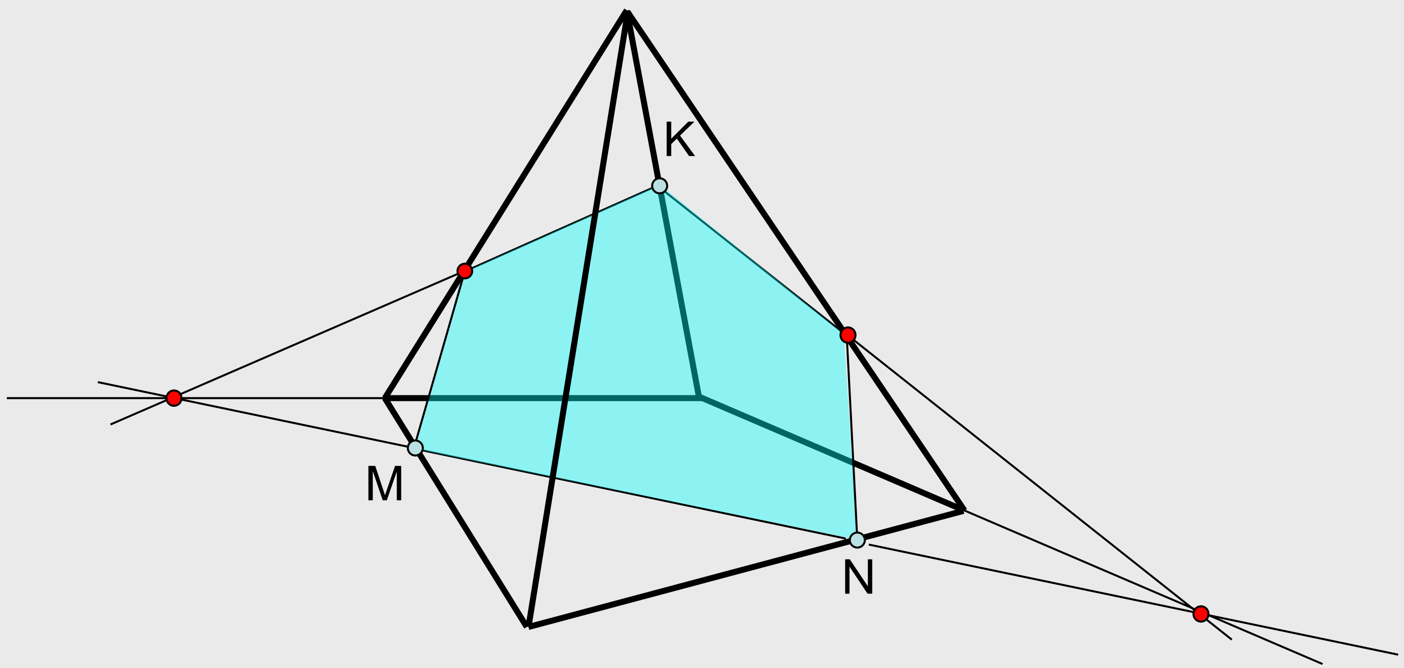


ПРИМЕР 1.

Полученный пятиугольник MNFKH – искомое сечение куба.

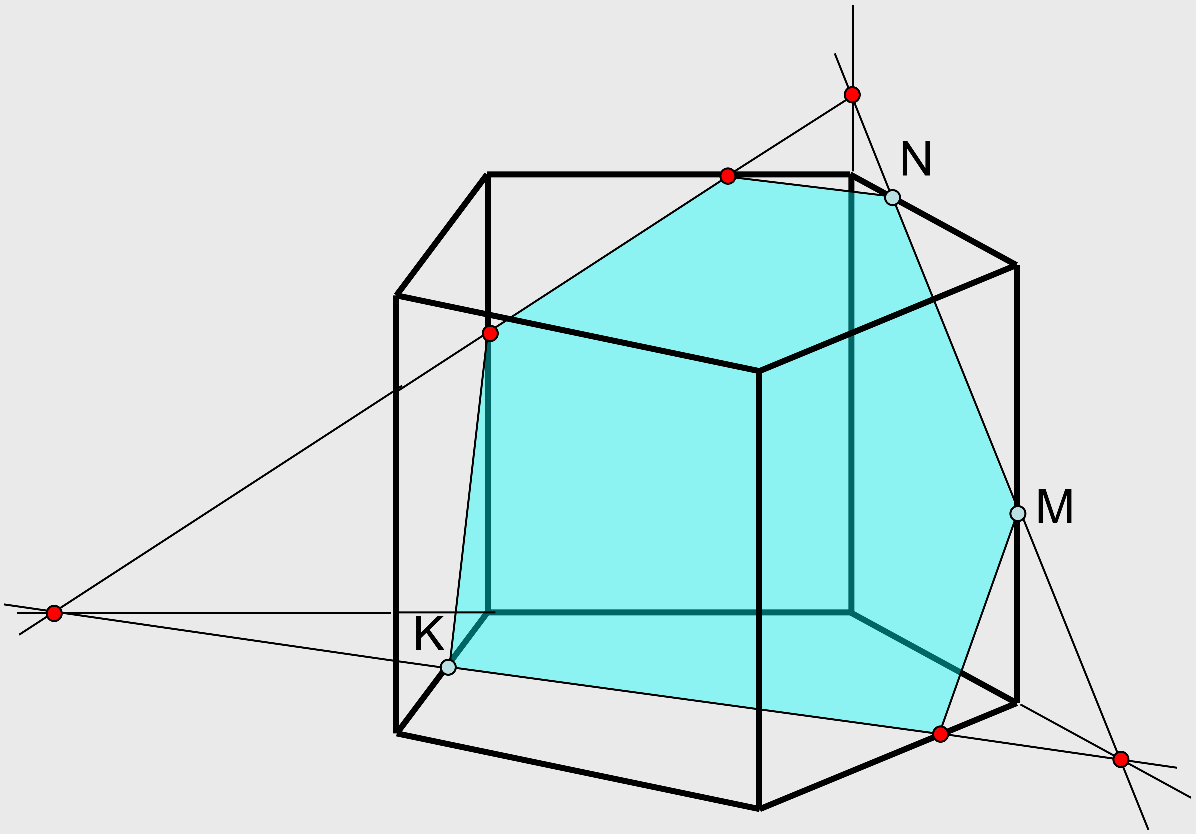
ПРИМЕР 2.

Построить сечение четырехугольной пирамиды, заданное точками M,N и K. Проследите за ходом построения сечения и запишите его.

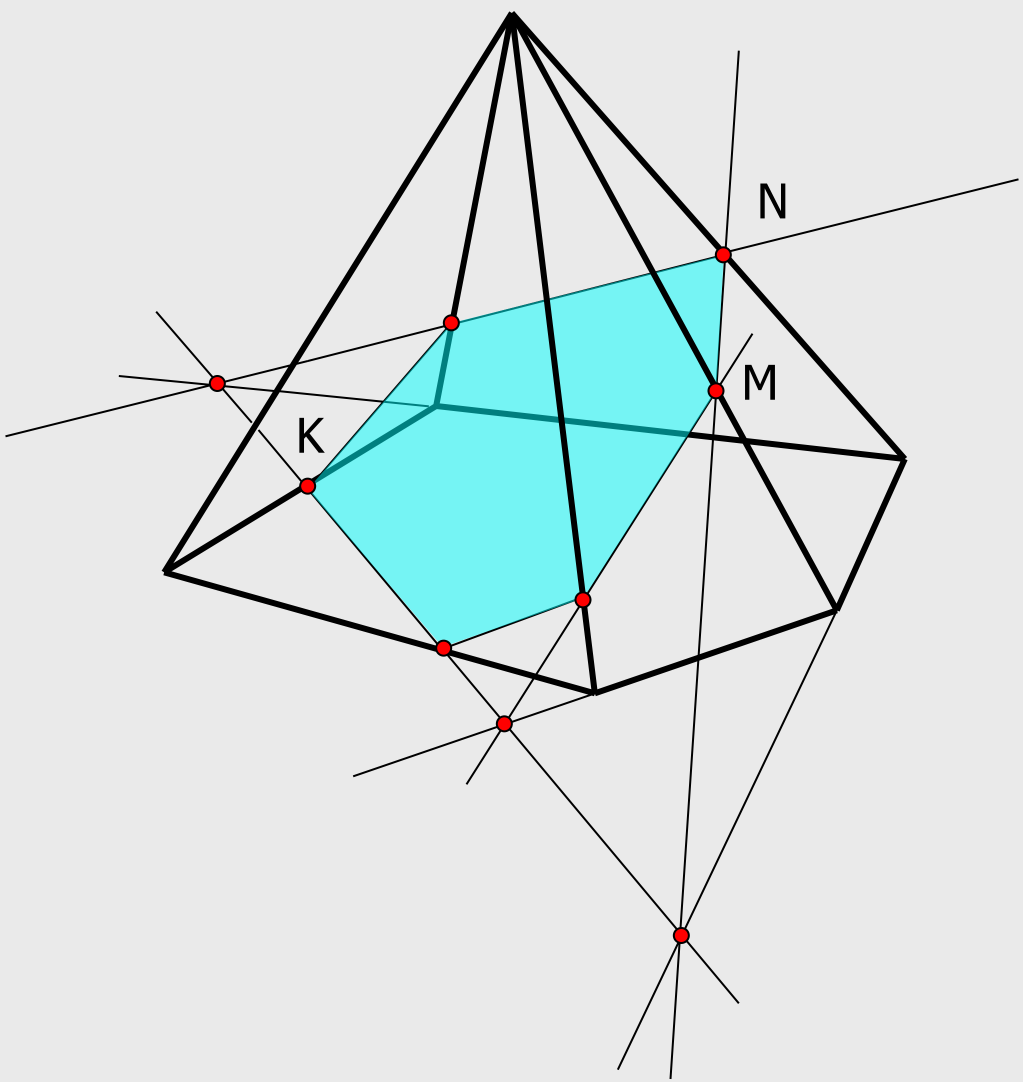


ПРИМЕР 3.

Построить сечение пятиугольной призмы, заданное точками M,N и K. Проследите за ходом построения сечения и запишите его.

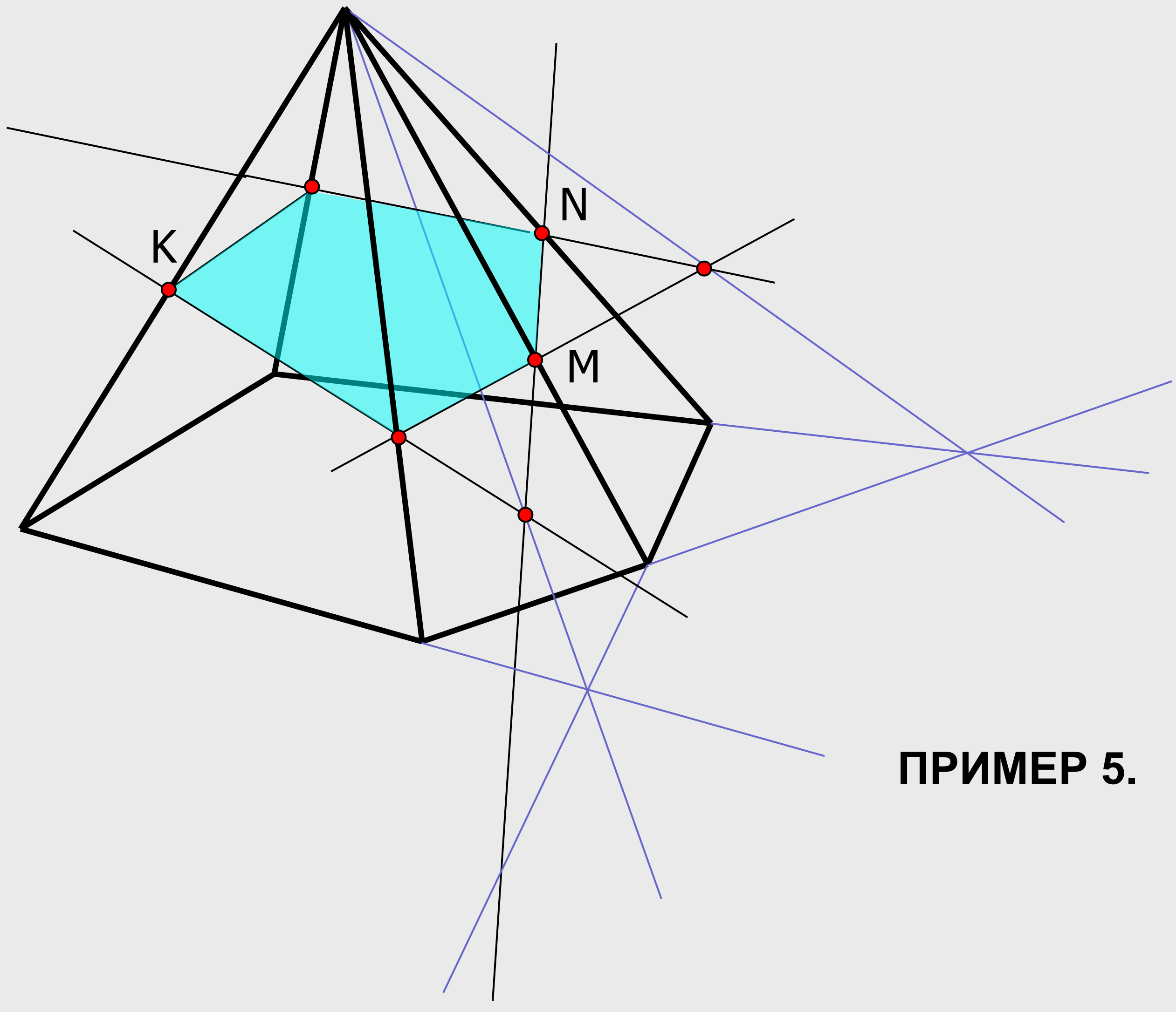


Рассмотрим теперь более сложные примеры

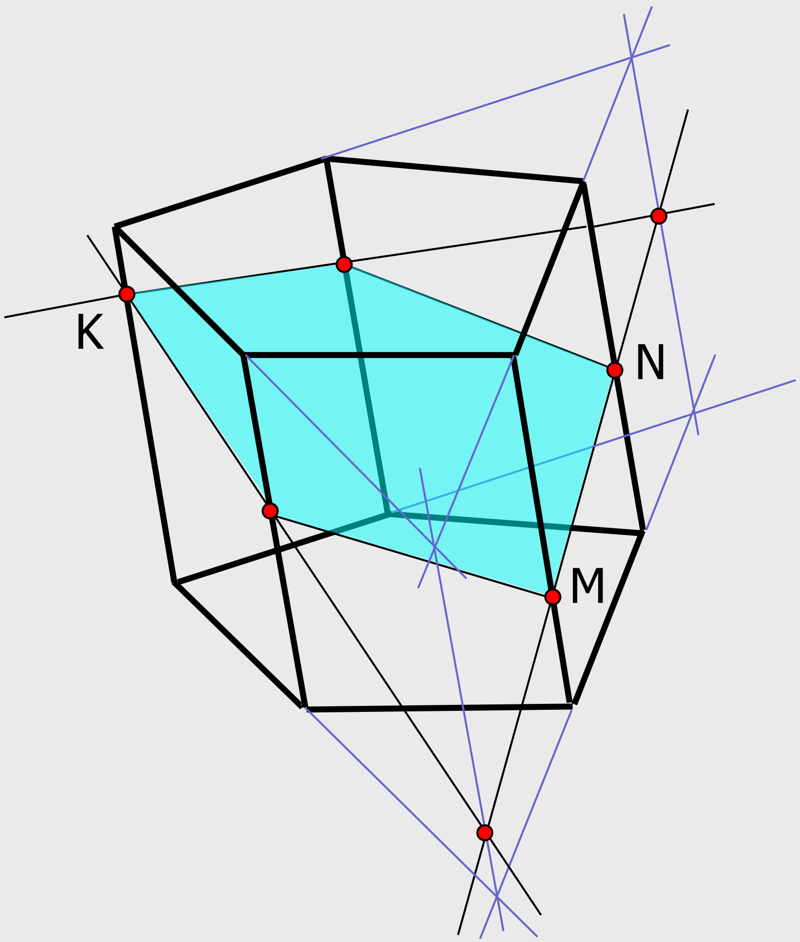


ПРИМЕР 4.

Помним о том, что вершина пирамиды – общая точка для всех боковых граней!



ПРИМЕР 5.



ПРИМЕР 6.

Плоскость сечения может задаваться:

- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) прямой и точкой, не лежащей на ней;
- 3) двумя пересекающимися прямыми;
- 4) двумя параллельными прямыми.

Все эти случаи можно свести к первому, выбирая на прямых удобные для нас точки.

Заключение

- Данный метод построения сечений многогранников можно применять, если найдется хотя бы одна пара точек, лежащих в секущей плоскости и одной грани многогранника. После чего задача циклично алгоритмизируется в получение очередной точки и очередного «следа».
- ПРИМЕЧАНИЕ. Если такой пары точек не найдется, то сечение строится методом параллельных проекций. Но это уже тема нового урока!