

Нобелевская премия по экономике 2012

Справедливое распределение
доходов и расходов.

Кооперативные игры
Вектор Шепли



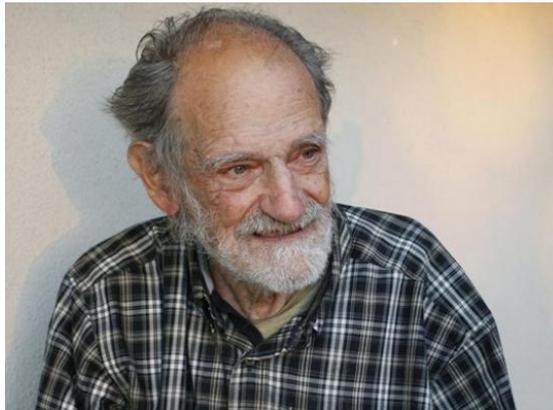


John Nash

основоположник теории некооперативных игр,
лауреат нобелевской премии
по экономике 1994

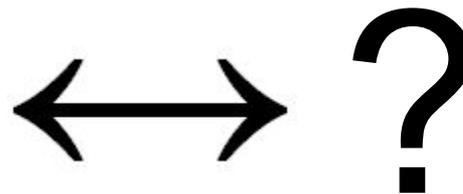


Russel Crowe
“Beautiful Mind”
2001



Lloyd Shapley

Основоположник теории кооперативных игр,
лауреат нобелевской премии
по экономике 2012



Кооперативные игры

- Пусть N - множество игроков , n - их количество .
- Определение Коалиция – подмножество множества игроков.
- Большая (Гранд) коалиция – множество N всех игроков.
- Характеристическая функция игры.
- Отображение из множества всех коалиций в множество действительных чисел.
- Характеристическая функция каждой коалиции ставит в соответствие совместный заработок v ее членов.
- Характеристическая функция в принципе может быть отрицательной (распределение затрат), но чаще она неотрицательная.
- Пустая коалиция ничего не зарабатывает и никому ничего не должна,

$$v(\emptyset) = 0$$

Большая
коалиция



Пример. У Пети и Васи есть по одному кроссовку, а у Коли шнурки.

Один кроссовок ничего не стоит.

Пара кроссовок без шнурков стоит 300 грн.

Пара кроссовок со шнурками стоит 350 грн.

Шнурки можно продать отдельно за 20 грн.

$V(П)=V(В)=0$, $V(К)=20$, $V(П,В)=300$,

$V(П,К)=V(В,К)=20$, $V(П,В,К)=350$



Интуитивно ясно, что Пете, Васе и Коле надо объединиться, продать весь комплект и поделить деньги. **Но как?**

Ядро игры

Допустим, что большая коалиция решила каким-то образом распределить $V(N)$, то есть $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq V(N)$

Эффективность распределения - это отсутствие потерь.

Распределение называется эффективным, если распределена вся доступная сумма, т.е. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = V(N)$

Стабильность - это отсутствие у игроков сепаратистских тенденций, т.е. для любой коалиции S $\sum_{i \in S} x_i \geq V(S)$

Ядро игры – множество всех возможных эффективных и стабильных распределений

Согласно определения ядро- это множество точек в векторном пространстве R^n , удовлетворяющих одному равенству и нескольким неравенствам.

Ядро может иметь одну точку, бесконечно много точек или быть пустым (как в задаче линейного программирования).

Пример пустого ядра - игра в носки

У Пети, Васи и Коли есть по одному носку.

Пару носков можно продать за 10 грн.,

один носок ничего не стоит.



Здесь $V(\Pi)=V(B)=V(K)=0$, $V(\Pi,B)=V(\Pi,K)=V(B,K)=10$, $V(\Pi,B,K)=10$

Ядро игры должно удовлетворять соотношениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$

$$x_1 + x_2 \geq 10, \quad x_1 + x_3 \geq 10, \quad x_2 + x_3 \geq 10, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Складывая три неравенства имеем: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$,

Что противоречит равенству.

Вектор Шепли

Определение Вкладом игрока i в коалицию S (где $i \notin S$) называется величина $V(S \cup i) - V(S)$ и обозначается $Add(i, S)$.

Зафиксируем некоторую перестановку игроков.

Для данной перестановки заработком каждого игрока назовем его вклад в коалицию, состоящую из предыдущих игроков.

Ясно, что заработок может зависеть от порядка игроков в перестановке.

Например при игре в продажу кроссовок при перестановке

(Петя, Вася, Коля) Петя Вася и Коля зарабатывают 0, 300 и 50,

а при перестановке (Коля, Вася, Петя) – Петя-330, Вася-0, Коля-20.

Вектор Шепли – это вектор заработков игроков, усредненный по всем возможным $n!$ перестановкам

$$Sh(V) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (add(1, \Pi_j), \dots, add(n, \Pi_j))$$

Таблица вычисления вектора Шепли для игры в продажу кроссовок

$$V(\Pi)=V(B)=0, V(K)=20, V(\Pi,B)=300,$$

$$V(\Pi,K)=V(B,K)=20, V(\Pi,B,K)=350$$

	П	В	К
(П,В,К)	0	300	50
(П,К,В)	0	330	20
(В,П,К)	300	0	50
(В,К,П)	330	0	20
(К,П,В)	0	330	20
(К,В,П)	330	0	20
Σ	960	960	180
Шепли	160	160	30



Приведенная (нормализованная) кооперативная игра – игра, в которой выигрыши всех игроков, не входящих в коалиции равны нулю.

Любую игру можно привести путем эквивалентного преобразования путем ввода новой функции выигрыша

$$W(S) = V(S) - \sum_{i \in S} V_i$$

Смысл приведенной функции выигрыша – сколько коалиция дополнительно зарабатывает при своем создании.

Приведение – аналог аффинного преобразования в алгебре.

Форма ядра не меняется, происходит только его параллельный перенос в векторном пространстве.

Свойства игры при приведении не меняются (подобно тому, как не меняются точки экстремума при добавлении константы $(f(\bar{x})$ и $f(\bar{x}) + C)$)

Путем приведения можно свести затратную игру к доходной.

Для приведенной игры трех игроков формула вектора Шепли имеет простой вид:

$$Sh(A) = \frac{1}{6}(V(A, B) + V(A, C) + 2V(A, B, C) - 2V(B, C))$$

Компоненты вектора для остальных игроков считаем циклической перестановкой.

Пример. Петя, Вася и Коля живут в разных районах города и хотят доехать из университета домой на такси.

Петя - на м. Голосеевская

Вася на м. Крещатик

Коля на м. Левобережная

Они могут вызвать такси каждый себе или брать одно такси на двоих или троих.

$$V(\text{Петя}) = -30, V(\text{Вася}) = -50, V(\text{Коля}) = -80$$

$$V(\text{Петя, Вася}) = -50, V(\text{Петя, Коля}) = -80$$

$$V(\text{Петя, Вася, Коля}) = V(\text{Вася, Коля}) = -100$$



$$V(\text{Петя}) = -30, V(\text{Вася}) = -50, V(\text{Коля}) = -80$$

$$V(\text{Петя}, \text{Вася}) = -50, V(\text{Петя}, \text{Коля}) = -80$$

$$V(\text{Петя}, \text{Вася}, \text{Коля}) = V(\text{Вася}, \text{Коля}) = -100$$

Умовні позначення

- Лінія 1 
- Лінія 2 
- Лінія 3 
- Міська електричка 
- Ділянка, що споруджується 
- Станція пересадок 
- Вихід до центрального залізничного вокзалу 
- Вихід до приміських електропоїздів 
- Вихід до річкового порту 
- Національний спорткомплекс «Олімпійський» 
- Станції, що споруджуються 



Приведение:

$$V(\text{Петя}) = -30, V(\text{Вася}) = -50, V(\text{Коля}) = -80$$

$$V(\text{Петя, Вася}) = -50, V(\text{Петя, Коля}) = -80$$

$$V(\text{Петя, Вася, Коля}) = V(\text{Вася, Коля}) = -100$$

$$W(\text{Петя}) = W(\text{Вася}) = W(\text{Коля}) = 0$$

$$W(\text{Петя, Вася}) = -50 - (-30 - 50) = 30$$

$$W(\text{Петя, Коля}) = 30, W(\text{Вася, Коля}) = 30$$

$$W(\text{Петя, Вася, Коля}) = -100 - (-30 - 50 - 80) = 60$$

Вектор Шепли для приведенной игры:

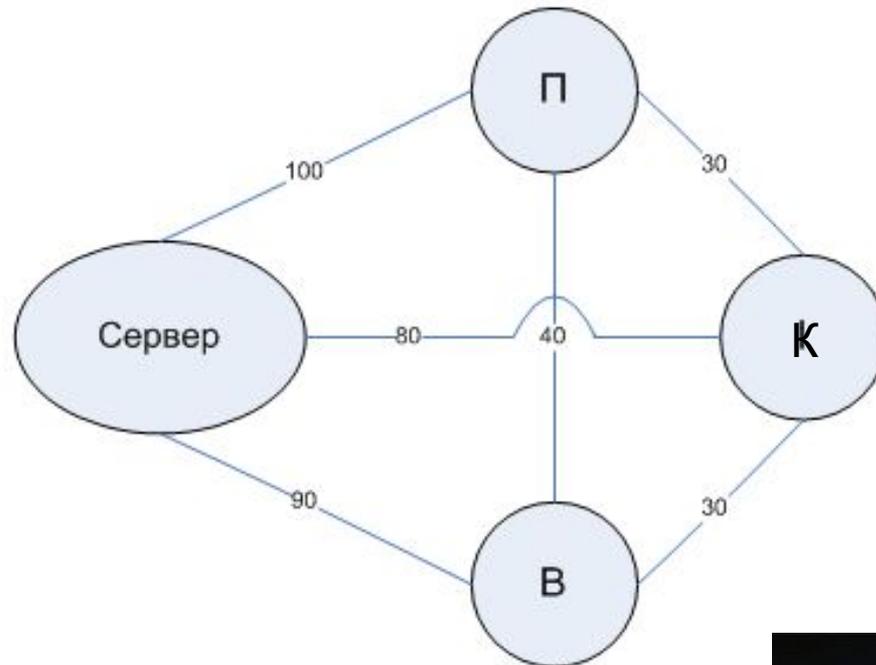
$$Sh(\text{Петя, Вася, Коля}) = (20, 20, 20)$$

Для исходной игры:

$$\begin{aligned} Sh(\text{Петя, Вася, Коля}) &= (-30 + 20, -50 + 20, -80 + 20) = \\ &= (-10, -30, -60) \end{aligned}$$

Пример

Петя, Вася и Коля хотят подключиться к локальной сети. Стоимость прокладки кабеля показана на рисунке.



$$V(\text{П}) = -100, V(\text{В}) = -90, V(\text{К}) = -80$$

$$V(\text{П}, \text{В}) = -130, V(\text{П}, \text{К}) = -110, V(\text{В}, \text{К}) = -110$$

$$V(\text{П}, \text{В}, \text{К}) = -140$$



$$V(\Pi)=-100, V(B)=-90, V(K)=-80$$

$$V(\Pi, B)=-130, V(\Pi, K)=-110, V(B, K)=-110$$

$$V(\Pi, B, K)=-140$$

Приведение:

$$W(\Pi) = W(B) = W(K) = 0$$

$$W(\Pi, B)=60, V(\Pi, K)=70, V(B, K)=60$$

$$W(\Pi, B, K)=130$$

В.Ш. приведенной игры: (45, 40, 45)

В.Ш. исходной игры: (-55, -50, -35)

Возникают вопросы

При каких условиях ядро не пусто?

Когда вектор Шепли принадлежит ядру?

Какие свойства вектора Шепли?

Пусть каждой коалиции S ставится в соответствие число $\lambda_S \in [0,1]$, которая называется весом коалиции.

Характеристическим вектором коалиции e^S называется вектор \vec{x} с n компонентами, где $x_i = \chi(i \in S)$ - индикатор принадлежности множеству S , например, $N = \{1,2,3\}$, $e^{(1,3)} = (1,0,1)$, тогда $e^N = (1, \dots, 1)$ - характеристический вектор большой коалиции - вектор, состоящий из единиц.

Набор весов называется $\lambda_S \geq 0$ сбалансированным, если $\sum_S \lambda_S e^S = e^N$

Например $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = \frac{1}{8}$, $\lambda_{123} = \frac{1}{4}$ - сбалансированный набор весов

$$\frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{8}(1,1,0) + \frac{1}{8}(1,0,1) + \frac{1}{8}(0,1,1) + \frac{1}{4}(1,1,1) = (1,1,1)$$

Критерий существования ядра

Теорема Бондаревой

(Бондарева, 1963; Шепли, 1966)

Ядро игры не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного набора весов λ_s справедливо неравенство:

$$\sum_s \lambda_s V(S) \leq V(N)$$

Теорема и ее доказательство –

перепев первой теоремы двойственности:

Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая задача имеет решение, причем значения целевых функций совпадают.

Условие теоремы Бондаревой иногда бывает трудно проверить.

Чаще оно бывает полезно для доказательства того, что ядро пусто.

Достаточные условия существования ядра

Определение. Игра называется супермодулярной (выпуклой), если для любых коалиций S, T выполнено условие
 $V(S \cup T) + V(S \cap T) \geq V(S) + V(T)$

Определение. Игра имеет эффект снежного кома (snowball effect), если $\forall L \subset K, \forall i \notin L$ справедливо: $V(K \cup i) - V(K) \geq V(L \cup i) - V(L)$

“Эффект снежного кома” означает, что если одна коалиция включает другую, то вклад игрока в такую коалицию будет не меньше.
К большему снежному кому снег прилипает лучше, чем к меньшему.



Оказывается, что условия супермодулярности и снежного кома равносильны и являются достаточными условиями существования ядра.

Для приведенной и нормированной игры трех лиц
(т.е. $V(1)=V(2)=V(3)=0$, $V(1,2,3)=1$)

условие Теоремы Бондаревой имеет вид:

$$\lambda_{12}V(1,2) + \lambda_{13}V(1,3) + \lambda_{23}V(2,3) + \lambda_{123} \leq 1,$$

что равносильно неравенству $V(1,2) + V(1,3) + V(2,3) \leq 2$ (*)

а эффект снежного кома эквивалентен системе неравенств

$$\begin{cases} V(1,2) + V(1,3) \leq 1 \\ V(1,2) + V(2,3) \leq 1 \quad (**) \\ V(1,3) + V(2,3) \leq 1 \end{cases}$$

Очевидно, (**) является подмножеством (*)

Теорема. Если ядро игры не пусто, то оно включает в себя вектор Шепли.

Теорема. Ядро супермодулярной игры – это многогранник с вершинами в $(Add(1, \pi), Add(2, \pi), \dots, Add(n, \pi))$, где π - все возможные перестановки.

Этот многогранник имеет $n!$ вершин (некоторые вершины могут сливаться).

Шепли показал, что в этом случае вектор Шепли является центром масс многогранника.

Свойства вектора Шепли

Определение. Игрок называется болваном (dummy), если его вклад в любую коалицию равен нулю.

1. Вектор Шепли эффективен (т.е. сумма його компонент равна $V(N)$).

2. Линейность

а) Пусть $V : (2^N - 1) \rightarrow R$, $W : (2^N - 1) \rightarrow R$ - две разные игры, заданные на одном множестве игроков.

Пусть игре V отвечает вектор \vec{x}_V , игре W - вектор \vec{x}_W .

Тогда игре $V + W$ отвечает вектор $\vec{x}_V + \vec{x}_W$.

Игре αV отвечает вектор $\alpha \vec{x}_V$

3. Справедливость . – состоит из трех частей

а). Симметричность . Одинаковые игроки имеют одинаковые компоненты в векторе Шепли

б). монотонность – если игрок начинает вносить больший вклад в любую коалицию, то это приводит к увеличению его компоненты в векторе Шепли.

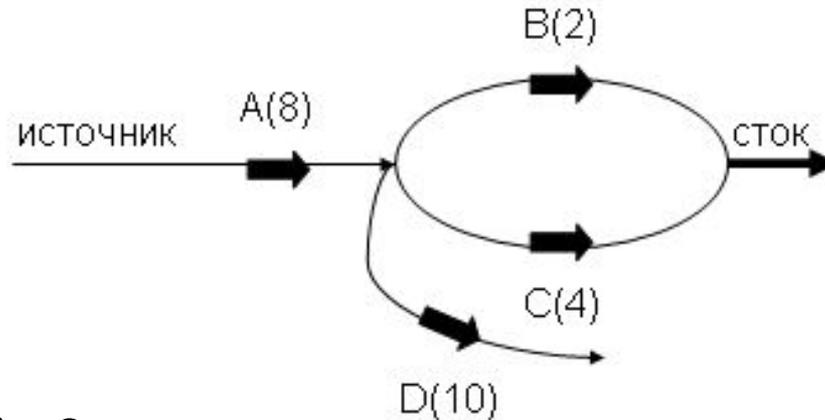
в). болваны получают ноль.

Теорема. Единственным распределением, удовлетворяющим условиям эффективности, линейности, симметричности и «болваны получают ноль» является вектор Шепли.

Игра “распределение потока”

Пусть каждый игрок является владельцем одной трубы и выигрыш коалиции равен величине максимального потока из источника в сток.

Очевидно, что D является “болваном”. Исключаем его из рассмотрения, для остальных игроков строим ядро и вектор Шепли



$$V(A)=V(B)=V(C)=0,$$

$$V(A,B)=2, V(A,C)=4, V(B,C)=0, V(A,B,C)=6$$

$$V(A) = V(B) = V(C) = 0; \quad V(A,B) = 2,$$

$$V(A,C) = 4, \quad V(B,C) = 0, \quad V(A,B,C) = 6$$

Построим ядро

проекция ядра на $(x_1; x_2)$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\Rightarrow x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_3 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

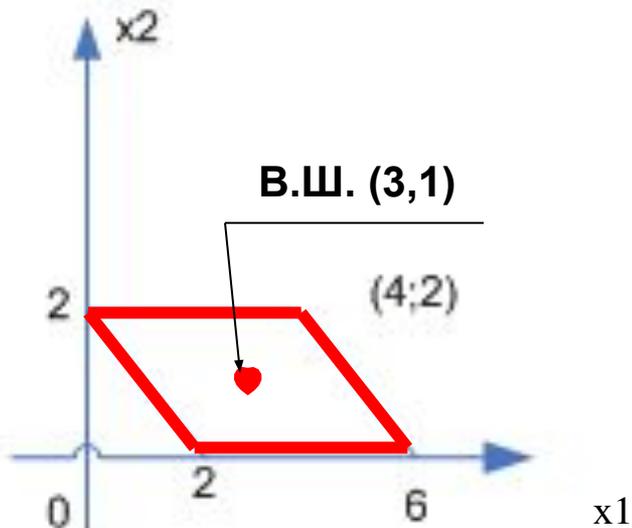
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Вектор Шепли

	A	B	C
ABC	0	2	4
ACB	0	2	4
BAC	2	0	4
BCA	6	0	0
CAB	4	2	0
CBA	6	0	0
Σ	18	6	12
Шепли	3	1	2

Проекция ядра на плоскость (x_1, x_2)

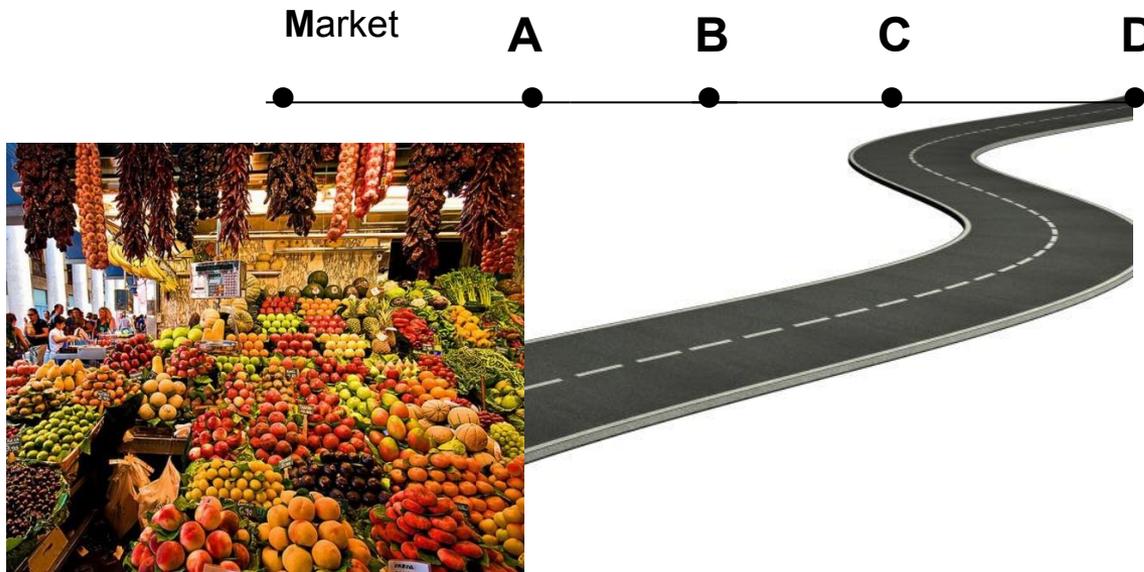


Здесь ABC сливается с ACB, а BSA с CBA.
В результате ядро – параллелограмм с вершинами $(2,0,4)$, $(0,2,4)$, $(4,2,0)$, $(6,0,0)$.

Вектор Шепли $(3,1,2)$ – центр параллелограмма

Игра в строительство дороги

Пусть жители четырех городов A, B, C, D хотят торговать на базаре в городе M. Как властям городов распределить расходы на строительство дороги [MD] ?



Ответ:

[MA] вкладчину строят A, B, C, D

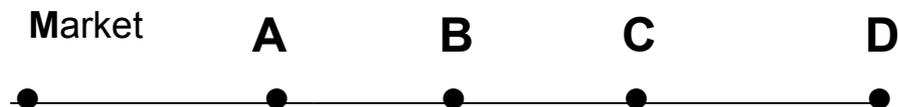
[AB] – B, C и D

[BC] – C и D

[CD] – D строит самостоятельно

Концепция Шепли – для данной перестановки городов каждый город строит нужный ему участок дороги, если он еще не построен

Вектор Шепли совпадает с ответом

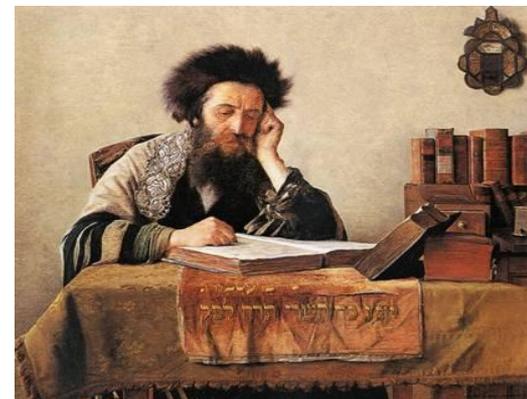


Задача о банкротстве

**Как раздать долги кредиторам,
если долгов больше, чем денег?**



**В 1984 году Ashman и Masher
дали экономическую интерпретацию
задачи о банкротстве на основе текстов Талмуда**



- 1) Спор двух человек из-за имущества. Пусть два человека претендует на имущество (200 у.е.). Первый претендует на все (200), а второй только на половину (100). Раввин признал претензии обоих правомерными. Как разделить имущество?

Талмуд приписывает отдать $\frac{3}{4}$ (150) первому претенденту и $\frac{1}{4}$ (50) второму, руководствуясь принципом уступок (т.е. неявно присутствует общая формула дележа).

Пусть первый претендент забирает все – значит он не уступает второму ничего.

Пусть второй претендент забирает половину, значит он уступает первому половину (100).

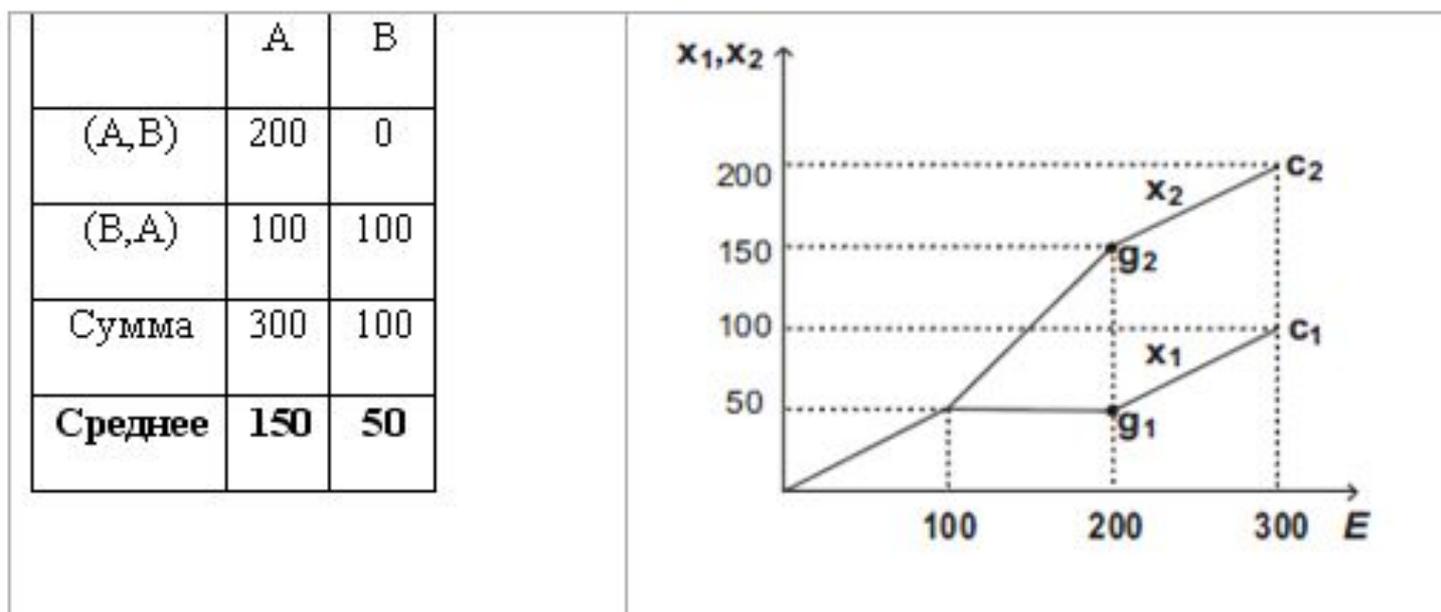
Каждый из общей суммы получает уступку (100 и 0), а остаток делится поровну (50 и 50).



Оказывается, принцип дележа полностью совпадает с принципом, основанном на векторе Шепли.

Пусть претензии заявляются поочередно и удовлетворяются полностью (если остаточной суммы достаточно) или частично (если остаточной суммы недостаточно, выдается вся доступная сумма).

А претендует на 200, В на 100. Доступно 200



Раздел имущества между тремя женами

У человека было три жены. Их наследство в брачном контракте было оговорено в количестве 100, 200 и 300 у.е. соответственно. После смерти мужа оказалось, что наличной суммы недостаточно, чтобы выплатить наследство всем женам. Талмуд предлагает три варианта дележа в случаях, когда наличная сумма составляет 100, 200 и 300 у.е.

Оказалось, что в двух случаях из трех дележ соответствовал вектору Шепли!!!



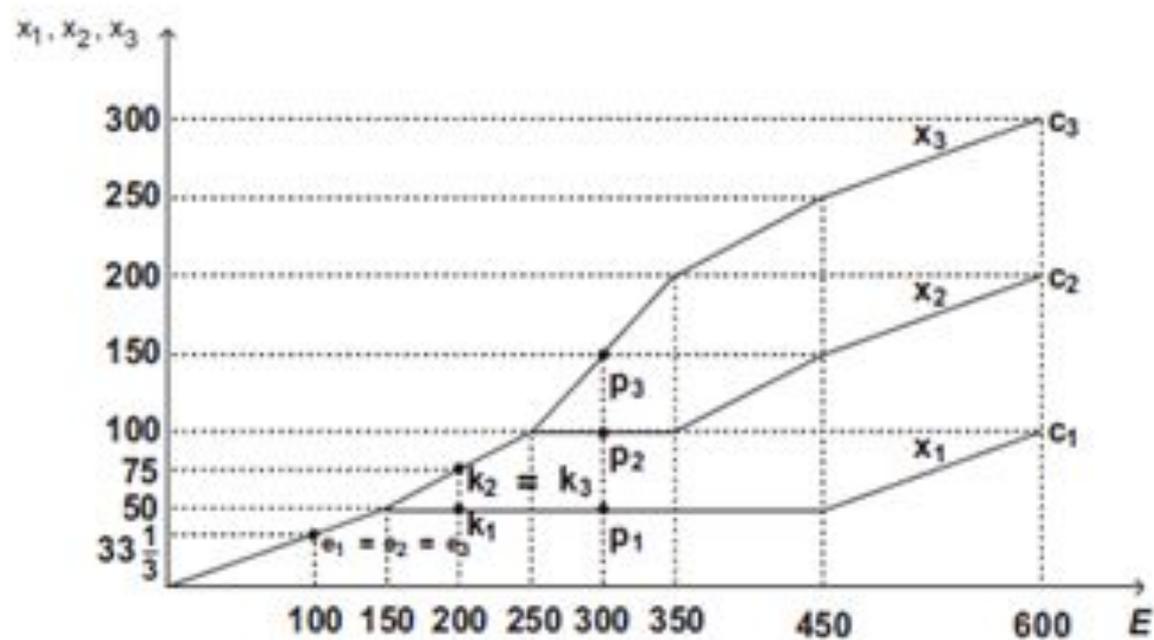
Принцип Шепли последовательного удовлетворения претензий

Доступно 300.

Претензии: А-100, В-200, С-300

	А(100)	В(200)	С(300)
А, В, С	100	200	0
А, С, В	100	0	200
В, А, С	100	200	0
В, С, А	0	200	100
С, А, В	0	0	300
С, В, А	0	0	300
Σ	300	600	900
Шепли	50	100	150

	A (100)	B (200)	C (300)
100, совпадает	33.33	33.33	33.33
200, Т/Ц	50 / 66.66	50 / 80.33	100 / 80.33
300, совпадает	50	100	150



Вектор Шепли и

справедливое распределение на рынке труда

Классическая задача о назначениях

Пусть задача решается на максимум (эффективности).

Пусть зарплата пропорциональна эффективности.

При нахождении совокупной эффективности не всегда соблюдается справедливость



Пример

		Работы	
		1	2
Работники	А	6*	2
	В	7	5*

$$(6+5=11) > (7+2=9)$$

1-й работник получает 6, а 2-й 5,

хотя 2-й работник лучше 1-го, он получает меньше.

Что делать???

Надо перераспределять.

		Работы		
		1	2	3
Работники	А	9	7	5*
	В	10*	8	3
	С	4	6*	2

Оптимальное решение- А на 3-ю, В на 1-ю, С на 2-ю работу

Суммарный заработок равен $5+10+6=21$

Несправедливость:

- 1) В и С в выигрыше, они назначены на лучшие свои работы
А в проигрыше, он назначен на худшую свою работу.
- 2) А лучше С но зарабатывает меньше ($5 < 6$)

Применим теорию Шепли для перераспределения

Пусть коалиция состоит из k работников.

Выделим из n работ подмножество из k работ,

Решим задачу о назначениях $k \times k$.

Под выигрышем коалиции будем понимать значение максимума

задачи о назначениях $k \times k$, усредненное по всем C_n^k возможным

вариантам выбора k работ из n .

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V(A) = \frac{9+7+5}{3} = 7; V(B) = \frac{10+8+3}{3} = 7; V(C) = \frac{4+6+2}{3} = 4$$

$$V(A, B) \sim \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & 5^* \\ 10^* & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 5^* \\ 8^* & 3 \end{pmatrix} \sim \frac{17+15+13}{3} = 15$$

Аналогічно

$$V(A, C) \sim \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \frac{15+11+11}{3} = 12\frac{1}{3}$$

$$V(B, C) \sim \begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \frac{16+12+10}{3} = 12\frac{2}{3}$$

$V(A, B, C) = 21$ (решили раньше)

Строим таблицу и вычисляем вектор Шепли

	A	B	C
A, B, C	7	8	6
A, C, B	7	5 1/3	8 2/3
B, A, C	8	7	6
B, C, A	8 1/3	7	5 2/3
C, A, B	8 1/3	8 2/3	4
C, B, A	8 1/3	8 2/3	4
Σ	47	44 2/3	34 1/3
Шепли	7.83	7.45	5.72
Номинальная выплата	5	10	6
Дотация (налог)	+2.83	-2.55	-0.28

**Задача о назначениях с изначальным предписанием работ
(задача обмена машинами)**

Пусть изначально каждому работнику поручена одна работа

(не оптимальный план), например $\begin{pmatrix} 9^* & 7 & 5 \\ 10 & 8^* & 3 \\ 4 & 6 & 2^* \end{pmatrix}$

Суммарный заработок равен 19.

При распределении оптимального заработка каждый работник должен получать не меньше, чем при “старом” плане.

Под заработком коалиции из k работников будем понимать оптимальное значение решения задачи о назначениях $k \times k$ для данных k работников и объединенного множества (их) работ (каждый работник приносит в коалицию свою работу).

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V(A)=9, V(B)=8, V(C)=2$$

$$V(A,B) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix} \sim 17, V(A,C) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 5 \\ 4 & 2^* \end{pmatrix} \sim 11, V(B,C) \sim \begin{pmatrix} 8^* & 3 \\ 6 & 2^* \end{pmatrix} \sim 10$$

$$V(A,B,C)=21$$

	A	B	C
A, B, C	9	8	4
A, C, B	9	10	2
B, A, C	9	8	4
B, C, A	11	8	2
C, A, B	9	10	2
C, B, A	9	10	2
Σ	56	54	16
Шепли	9 1/3	9	2 2/3
Прежний заработок	9	8	8
Выгода	+1/3	+1	+2/3

Оценка влияния политических партий

Индексы Банцафа и Шепли-Шубика

Пусть парламент состоит из k партий.

Каждая партия имеет вес (абсолютный, относительный).

Например,
$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 16 & 12 & 9 & 13 \\ 0.32 & 0.24 & 0.18 & 0.26 \end{pmatrix}$$

Голосование - простая кооперативная игра. Коалиция выигрывает 1, если сумма весов проголосовавших преодолевает установленный барьер (например, $> 1/2$ или $2/3$) и 0 в противном случае.

Например, для простого большинства $V(A,B)=1$, $V(A,C)=0$.

Говорят, что партия A дотягивает коалицию S (где $A \notin S$), если

$V(S) = 0$ и $V(S \cup A) = 1$.

Для каждой партии определяется число Банцафа – сколько коалиций (из 2^{n-1}) она дотягивает.

Индекс Банцафа партии – число B , деленное на сумму чисел B всех партий.

Например, $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 16 & 12 & 9 & 13 \\ 0.32 & 0.24 & 0.18 & 0.26 \end{pmatrix}$

Партия	Кого дотягивает	Ч. Банц.	Инд. Банц.
A	B,D,BC,BD,CD	5	5/12
B	A, AC, CD	3	3/12
C	BD	1	1/12
D	A, AC, BC	3	3/12

Индекс Шепли-Шубика

Зафиксируем некоторую перестановку партий, например

(C(9), B(12), D(13), A(16)).

Добавляем партии в коалицию, пока коалиция не станет выигрышной.

Для каждой перестановки одна партия является дотягивающей (в данном случае D).

Индекс Шепли- доля перестановок (из общего числа $n!$), для которой данная партия является дотягивающей.

Индекс Шепли можно вычислить по формуле

$$\phi(v) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} A_i(s)$$

Где $A_i(s)$ – число s -элементных коалиций, дотягиваемых партией i

В разобранным примере индекс Ш-Ш будет такой же, как и Б.

**Индексы Б и Ш-Ш монотонны по весу партии,
меняются скачкообразно.**

Может быть такое, что разрыв в весе существенный, а индексы равные, или разрыв несущественный, а индексы отличаются существенно.

Пример. А) вес D существенно меньше остальных

б) вес D несущественно меньше остальных

	Вес, %	Ш.Ш. и Б. при $>1/2$	Ш.Ш. и Б. при $\geq 2/3$
A	24	1/5	1/4
B	24	1/5	1/4
C	24	1/5	1/4
D	24	1/5	1/4
E	4	1/5	0

	Вес, %	Ш.Ш. и Б. при $>1/2$	Ш.Ш. и Б. при $\geq 2/3$
A	26	1/3	1/4
B	26	1/3	1/4
C	26	1/3	1/4
D	22	0	1/4

Вычисление индексов Банцафа и

Шепли-Шубика по итогам выборов в ВР-2012

1) ПР – 145, 2) БТК – 123, 3) УДАР – 68, КПУ-64, СВБ- 50

Индекс Банцафа

Для ПР вычислим число дотягиваний до выигрышной коалиции.

Составим производящую функцию

$$\cancel{(1 + x^{145})}(1 + x^{123})(1 + x^{68})(1 + x^{64})(1 + x^{50})$$

Степени x (Mathcad):

0, 50, 64, 68, 114, 118, 123, 132, 173, 182, 187, 191, 237, 241, 255, 305 (**)

Диапазоны дотягивания до выигрышной коалиции:

Простое большинство (≥ 226) – от $226-145=81$ до $226-1=225$ // 8 членов (**)

Две трети голосов (≥ 300) – от $300-145=155$ до $300-1=299$ // 7 членов (**)

Аналогично, вычисляем числа Банцафа для других партий.

Для каждой партии в производящей функции вычеркиваем (ее) сомножитель.

Сводная таблица имеет вид

Партия	Места	Диапазон дотягивания		Числа Банцафа		Индексы Банцафа	
		>1/2	2/3	>1/2	2/3	>1/2	2/3
1) ПР	145	81- 225	155- 299	8	7	0.286	0.305
2) БТК	123	102- 225	177- 299	8	7	0.286	0.305
3) УДАР	68	158- 225	232- 299	4	3	0.143	0.130
4) КПУ	64	162- 225	236- 299	4	3	0.143	0.130
5) СВБ	50	176- 225	250- 299	4	3	0.143	0.130
Итого	450	–	–	28	23	1	1

Индекс Шепли-Шубика

Составляем двойную производящую функцию

$$(1 + zx^{145})(1 + zx^{123})(1 + zx^{68})(1 + zx^{64})(1 + zx^{50})$$

x отвечает за число депутатов,

z - за число партий в коалиции

Компоненты вектора \vec{a} весовых коэффициентов (для всех партий) вычисляем по формуле

$$a_s = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}, \text{ здесь } n=5, s \text{ изменяется от } 0 \text{ до } 4.$$

$$\vec{a} = \left(\frac{24}{120} \quad \frac{6}{120} \quad \frac{4}{120} \quad \frac{6}{120} \quad \frac{24}{120} \right)$$

Для ПР ($k=145$) зачеркиваем первую скобку и раскладываем в ряд по степеням z .

Аналогично предыдущему случаю диапазоны дотягивания до простого большинства и $2/3$ составляют 81-225 и 155-299 соответственно.

\vec{a}		Степени при x	\vec{b}_1 81-225	\vec{b}_2 155-299
24/120	z^0	0	0	0
6/120	z^1	50,64,68,123	1	0
4/120	z^2	114,118,132,173,187,191	6	3
6/120	z^3	182,237,241,255	1	4
24/120	z^4	305	0	0

Индексы Ш-Ш для ПР равны $(\vec{a}, \vec{b}_1) = 0.3$, $(\vec{a}, \vec{b}_2) = 0.3$

Аналогичным образом вычисляются индексы Ш-Ш для других партий

Оказалось, что значения ШШ для двух барьеров (226 и 300 из 450) совпадают и равны

Партии	ПР	БТК	УДАР	КПУ	СВБ
Численность	145	123	68	64	50
Индекс Ш-Ш	0.3	0.3	0.133	0.133	0.133

Спасибо за внимание.

Вопросы?

