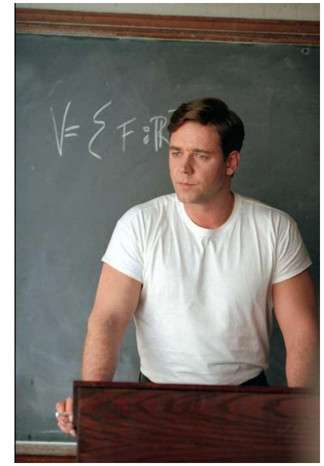
Нобелевская премия по экономике 2012

Справедливое распределение
доходов и расходов.

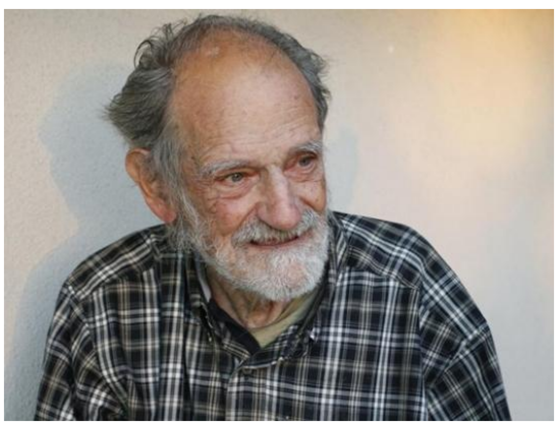
Кооперативные игры
Вектор Шепли

⟷



John Nash
основоположник теории
некооперативных игр,
лауреат нобелевской премии
по экономике 1994

Russel Crowe
“Beautiful Mind”
2001



⟷ ?

Lloyd Shapley
Основоположник теории кооперативных игр,
лауреат нобелевской премии
по экономике 2012

<u>Кооперативные игры</u>

- Пусть N - множество игроков , n - их количество .
- <u>Определение</u> Коалиция – подмножество множества игроков.
- Большая (Гранд) коалиция –множество N всех игроков.
- <u>Характеристическая функция игры.</u>
- Отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел.
- Характеристическая функция каждой коалиции ставит в соответствие совместный заработок ее членов.
- Характеристическая функция в принципе может быть отрицательной (распределение затрат), но чаще она неотрицательная.
- Пустая коалиция ничего не зарабатывает и никому ничего не должна,

$$V(\emptyset) = 0$$

Большая

коалиция

Пример. У Пети и Васи есть по одному кроссовку, а у Коли шнурки.

Один кроссовок ничего не стоит.

Пара кроссовок без шнурков стоит 300 грн.

Пара кроссовок со шнурками стоит 350 грн.

Шнурки можно продать отдельно за 20 грн.

V(П)=V(В)=0, V(К)=20, V(П,В)=300,
V(П,К)=V(В,К)=20, V(П,В,К)=350

Интуитивно ясно, что Пете, Васе и Коле надо объединиться, продать весь комплект и поделить деньги. **Но как?**

<u>Ядро игры</u>

Допустим, что большая коалиция решила каким-то образом распределить $V(N)$, то есть $x_1 + x_2 + .. + x_n \leq V(N)$

<u>Эффективность распределения</u> - это отсутствие потерь. Распределение называется эффективным, если распределена вся доступная сумма, т.е. $x_1 + x_2 + .. + x_n = V(N)$

<u>Стабильность</u> - это отсутствие у игроков сепаратистских тенденций, т.е. для любой коалиции S $\sum_{i \in S} x_i \geq V(S)$

<u>Ядро игры</u> – множество всех возможных эффективных и стабильных распределений

Согласно определения ядро- это множество точек в векторном пространстве R^n, удовлетворяющих одному равенству и нескольким неравенствам.

Ядро может иметь одну точку, бесконечно много точек или быть пустым (как в задаче линейного программирования).

Пример пустого ядра - игра в носки

У Пети, Васи и Коли есть по одному носку.

Пару носков можно продать за 10 грн.,

один носок ничего не стоит.

Здесь V(П)=V(В)=V(К)=0, V(П,В)=V(П,К)=V(В,К)=10, V(П,В,К)=10

Ядро игры должно удовлетворять соотношениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$

$$x_1 + x_2 \geq 10, \quad x_1 + x_3 \geq 10, \quad x_2 + x_3 \geq 10, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Складывая три неравенства имеем: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$,

Что противоречит равенству.

Вектор Шепли

<u>Определение</u> Вкладом игрока i в коалицию S (где $i \notin S$) называется величина $V(S \cup i) - V(S)$ и обозначается Add(i,S).

Зафиксируем некоторую перестановку игроков.

Для данной перестановки заработком каждого игрока назовем его вклад в коалицию, состоящую из предыдущих игроков.

Ясно, что заработок может зависеть от порядка игроков в перестановке.

Например при игре в продажу кроссовок при перестановке

(Петя, Вася, Коля) Петя Вася и Коля зарабатывают 0, 300 и 50,

а при перестановке (Коля, Вася, Петя) – Петя-330,Вася-0,Коля-20.

Вектор Шепли – это вектор заработков игроков, усредненный по всем возможным n! перестановкам

$$Sh(V) = \frac{1}{n!} \sum_{\Pi_i} (add(1, \Pi_j), .., add(n, \Pi_j))$$

Таблица вычисления вектора Шепли для игры в продажу кроссовок

V(П)=V(В)=0, V(К)=20, V(П,В)=300,

V(П,К)=V(В,К)=20, V(П,В,К)=350

	П	В	К
(П,В,К)	0	300	50
(П,К,В)	0	330	20
(В,П,К)	300	0	50
(В,К,П)	330	0	20
(К,П,В)	0	330	20
(К,В,П)	330	0	20
$\sum$	960	960	180
Шепли	160	160	30

Приведенная (нормализованная) кооперативная игра – игра, в которой выигрыши всех игроков, не входящих в коалиции равны нулю.

Любую игру можно привести путем эквивалентного преобразования путем ввода новой функции выигрыша

$$W(S) = V(S) - \sum_{i \in S} V_i$$

Смысл приведенной функции выигрыша – сколько коалиция дополнительно зарабатывает при своем создании.

Приведение – аналог аффинного преобразования в алгебре.

Форма ядра не меняется, происходит только его параллельный перенос в векторном пространстве.

Свойства игры при приведении не меняются (подобно тому, как не меняются точки экстремума при добавлении константы ($f(\bar{x})$ и $f(\bar{x})+C$))
Путем приведения можно свести затратную игру к доходной.

Для приведенной игры трех игроков формула вектора Шепли имеет простой вид:

$$Sh(A) = \frac{1}{6}\left(V(A,B) + V(A,C) + 2V(A,B,C) - 2V(B,C)\right)$$

Компоненты вектора для остальных игроков считаем циклической перестановкой.

Пример. Петя, Вася и Коля живут в разных районах города и хотят доехать из университета домой на такси.

Петя - на м. Голосеевская

Вася на м. Крещатик

Коля на м. Левобережная

Они могут вызвать такси каждый себе или брать одно такси на двоих или троих.

V(Петя)= -30, V(Вася)= -50, V(Коля)= -80

V(Петя, Вася)= -50, V(Петя, Коля)= -80

V(Петя, Вася, Коля) = V(Вася, Коля)= -100

V(Петя)= -30, V(Вася)= -50, V(Коля)= -80

V(Петя, Вася)= -50, V(Петя, Коля)= -80

V(Петя, Вася, Коля) = V(Вася, Коля)= -100

Приведение:

V(Петя)= -30, V(Вася)= -50, V(Коля)= -80
V(Петя, Вася)= -50, V(Петя, Коля)= -80
V(Петя, Вася, Коля) = V(Вася, Коля)= -100

W(Петя)=W(Вася)=W(Коля)=0
W(Петя, Вася)= -50 – (-30-50)=30
W(Петя, Коля)=30, W(Вася, Коля)=30
W(Петя, Вася, Коля) = -100- (-30-50-80) = 60

Вектор Шепли для приведенной игры:

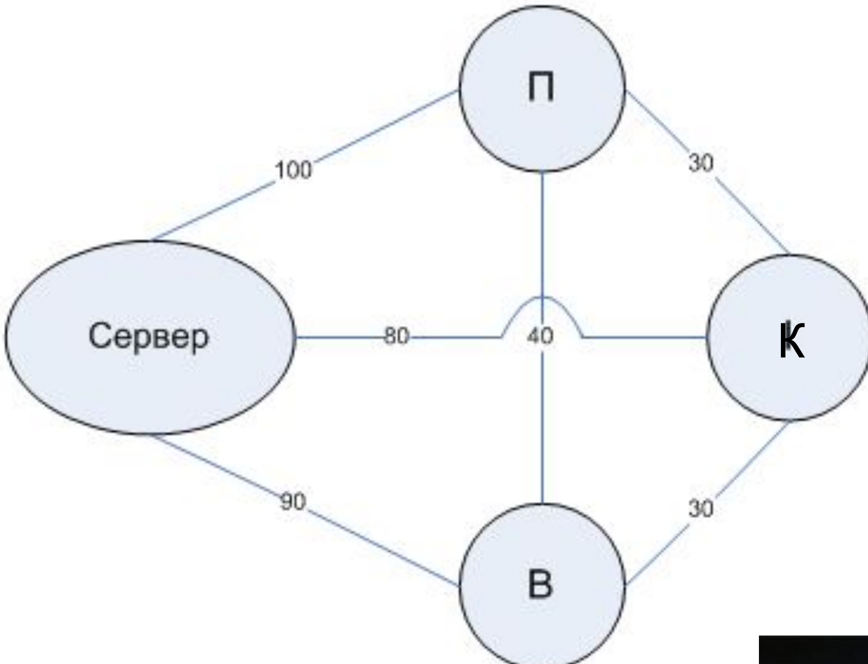
Sh(Петя, Вася, Коля) = (20, 20, 20)

Для исходной игры:

Sh(Петя, Вася, Коля) = (-30+20, -50+20,-80+20)=
= (-10, -30, -60)

Пример

Петя, Вася и Коля хотят подключиться к локальной сети. Стоимость прокладки кабеля показана на рисунке.



V(П)=-100, V(В)=-90, V(К)=-80

V(П,В)=-130, V(П,К)=-110, V(В,К)=-110

V(П,В,К)=-140

$V(П)=-100$, $V(В)=-90$, $V(К)=-80$

$V(П, В)=-130$, $V(П,К)=-110$, $V(В,К)=-110$

$V(П,В,К)=-140$

Приведение:

$W(П) = W(В)= W(К) =0$

$W(П,В)=60$, $V(П,К)=70$, $V(В,К)=60$

$W(П,В,К)=130$

В.Ш. приведенной игры: (45, 40, 45)

В.Ш. исходной игры: (-55, -50, -35)

Возникают вопросы

При каких условиях ядро не пусто?

Когда вектор Шепли принадлежит ядру?

Какие свойства вектора Шепли?

Пусть каждой коалиции S ставится в соответствие число $\lambda_s \in [0;1]$, которая называется весом коалиции.

Характеристическим вектором коалиции e^S называется вектор $\vec{x}$ з n компонентами , где $x_i = \chi(i \in S)$ - индикатор принадлежности множеству S, например, $N = \{1;2;3\}$, $e^{(1;3)} = (1;0;1)$, тогда $e^N = (1,..,1)$ - характеристический вектор большой коалиции –вектор, состоящий из единиц.

Набор весов называется $\lambda_s \geq 0$ сбалансированным, если $\sum_S \lambda_S e^S = e^N$

Например $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/2$, $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 1/8$, $\lambda_{123} = 1/4$ - сбалансований набор весов

$$\frac{1}{2}(1,0,0)+\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{1}{2}(0,0,1)+\frac{1}{8}(1,1,0)+\frac{1}{8}(1,0,1)+\frac{1}{8}(0,1,1)+\frac{1}{4}(1,1,1)=(1,1,1)$$

Критерий существования ядра

Теорема Бондаревой

(Бондарева, 1963; Шепли, 1966)

Ядро игры не пусто тогда и только тогда, когда для любого

сбалансированного набора весов λ_S справедливо неравенство:

$$\sum_S \lambda_s V(S) \leq V(N)$$

Теорема и ее доказательство –

перепев первой теоремы двойственности:

Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая задача имеет решение, причем значения целевых функций совпадают.

Условие теоремы Бондаревой иногда бывает трудно проверить.

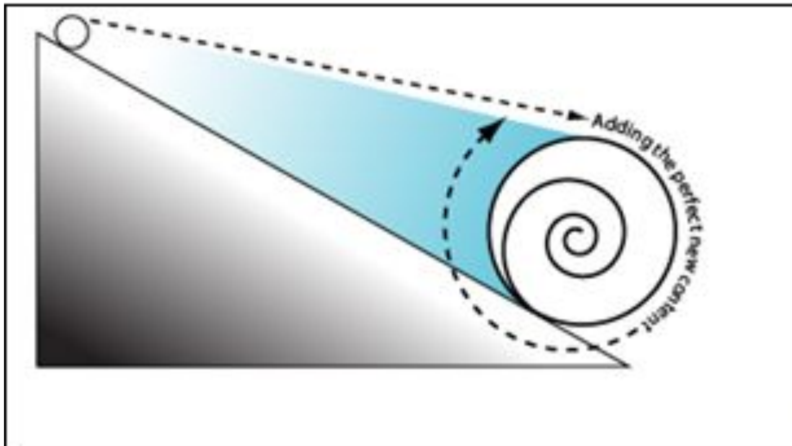
Чаще оно бывает полезно для доказательства того, что ядро пусто.

Достаточные условия существования ядра

<u>Определение .</u> Игра называется супермодулярной (выпуклой), если для любых коалиций S,T выполнено условие
$V(S \cup T) + V(S \cap T) \geq V(S) + V(T)$

<u>Определение.</u> Игра имеет эффект снежного кома (snowball effect), если $\forall L \subset K, \forall i \notin L$ справедливо: $V(K \cup i) - V(K) \geq V(L \cup i) - V(L)$

“Эффект снежного кома” означает, что если одна коалиция включает другую, то вклад игрока в такую коалицию будет не меньше.
К большему снежному кому снег прилипает лучше, чем к меньшему.



Оказывается, что условия супермодулярности и снежного кома равносильны и являются достаточными условиями существования ядра.

Для приведенной и нормированной игры трех лиц
(т.е. V(1)=V(2)=V(3)=0, V(1,2,3)=1)
условие Теоремы Бондаревой имеет вид:
$\lambda_{12}V(1,2)+\lambda_{13}V(1,3)+\lambda_{23}V(2,3)+\lambda_{123}\le 1$,
что равносильно неравенству $V(1,2)+V(1,3)+V(2,3)\le 2$ (*)

а эффект снежного кома эквивалентен системе неравентств

$$\begin{cases} V(1,2)+V(1,3)\le 1 \\ V(1,2)+V(2,3)\le 1 \quad (**) \\ V(1,3)+V(2,3)\le 1 \end{cases}$$

Очевидно, (**) является подмножеством (*)

<u>Теорема.</u> Если ядро игры не пусто, то оно включает в себя вектор Шепли.

<u>Теорема.</u> Ядро супермодулярной игры – это многогранник с вершинами в
$(Add(1,\pi), Add(2,\pi),\ldots, Add(n,\pi))$, где π -все возможные перестановки.
Этот многогранник имеет $n!$ вершин (некоторые вершины могут сливаться).

Шепли показал, что в этом случае вектор Шепли является центром масс многогранника.

Свойства вектора Шепли

<u>Определение.</u> Игрок называется болваном (dummy), ели его вклад в любую коалицию равен нулю.

1. Вектор Шепли эффективен (т.е. сума його компонент равна $V(N)$).

<u>2.Линейность</u>

а) Пусть $V:(2^N-1)\to R$, $W:(2^N-1)\to R$ - две разные игры, заданные на одном множестве игроков.

Пусть игре V отвечает вектор $\vec{x}_V$, игре W - вектор $\vec{x}_W$.

Тогда игре $V+W$ отвечает вектор $\vec{x}_V+\vec{x}_W$.

Игре $\alpha\vec{V}$ отвечает вектор $\alpha\vec{x}_V$

<u>3.Справедливость</u>. – состоит из трех частей

а). Симметричность . Одинаковые игроки имеют одинаковые компоненты в векторе Шепли

б). монотонность – если игрок начинает вносить больший вклад в любую коалицию, то это приводит к увеличению его компоненты в векторе Шепли.

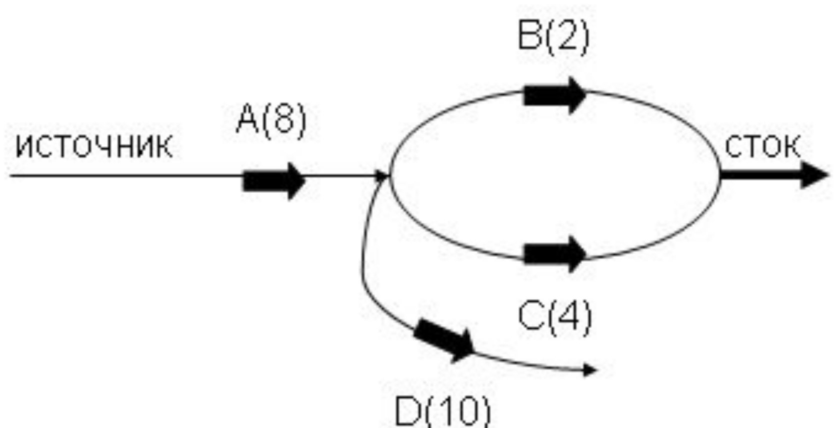
в). болваны получают ноль.

<u>Теорема</u>. Единственным распределением, удовлетворяющим условиям эффективности, линейности, симметричности и «болваны получают ноль» является вектор Шепли.

Игра “распределение потока”

Пусть каждый игрок является владельцем одной трубы и выигрыш коалиции равен величине максимального потока из источника в сток.

Очевидно, что D является “болваном”. Исключаем его из рассмотрения, для остальных игроков строим ядро и вектор Шепли



V(A)=V(B)=V(C)=0,

V(A,B)=2, V(A,C)=4, V(B,C)=0, V(A,B,C)=6

$V(A) = V(B) = V(C) = 0$; $V(A,B) = 2$,

$V(A,C) = 4$, $V(B,C) = 0$, $V(A,B,C) = 6$

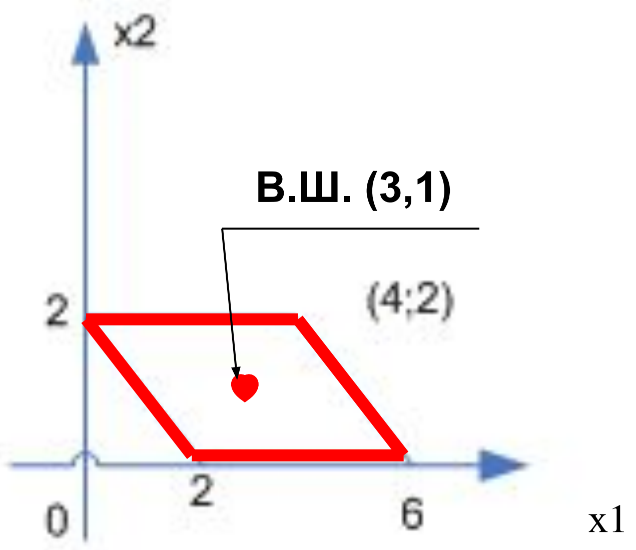
Построим ядро проекция ядра на $(x_1; x_2)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_3 \ge 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вектор Шепли

	A	B	C
ABC	0	2	4
ACB	0	2	4
BAC	2	0	4
BCA	6	0	0
CAB	4	2	0
CBA	6	0	0
$\sum$	18	6	12
Шепли	3	1	2

Проекция ядра на плоскость (x1,x2)

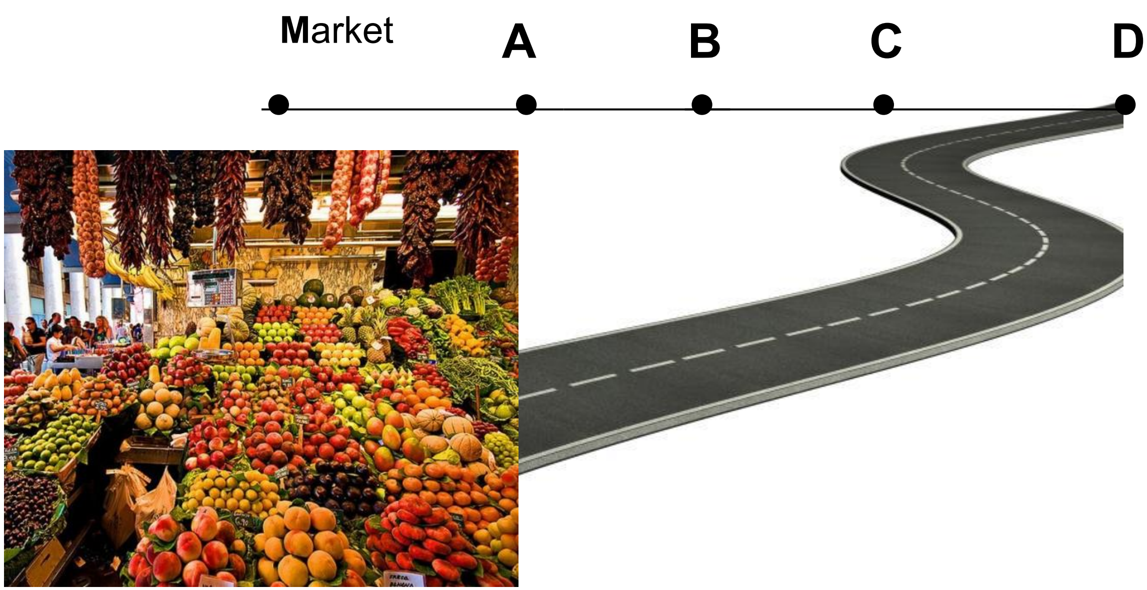


Здесь ABC сливается с ACB, а BCA с CBA. В результате ядро – паралелограмм с вершинами (2,0,4), (0,2,4), (4,2,0), (6,0,0).

Вектор Шепли (3,1,2) – центр паралелограмма

Игра в строительство дороги

Пусть жители четырех городов A,B,C,D хотят торговать на базаре в городе M. Как властям городов распределить расходы на строительство дороги [MD] ?

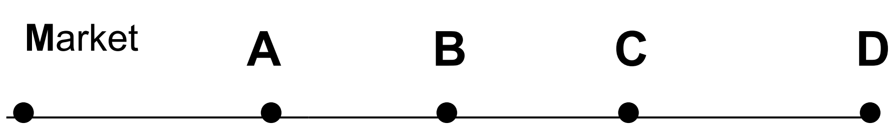


Ответ:

[MA] вскладчину строят A,B,C,D
[AB] – B,C и D
[BC] –C и D
[CD] – D строит самостоятельно

Концепция Шепли – для данной перестановки городов каждый город строит нужный ему участок дороги, если он еще не построен

Вектор Шепли совпадает с ответом



Задача о банкротстве

Как раздать долги кредиторам, если долгов больше, чем денег?

В 1984 году Aumann и Masher дали экономическую интерпретацию задачи о банкротстве на основе текстов Талмуда

1) Спор двух человек из-за имущества. Пусть два человека претендует на имущество (200 у.е.). Первый претендует на все (200), а второй только на половину (100). Раввин признал претензии обоих правомерными. Как разделить имущество?

Талмуд приписывает отдать 3/4 (150) первому претенденту и 1/4 (50) второму, руководствуясь принципом уступок (т.е. неявно присутствует общая формула дележа).

Пусть первый претендент забирает все – значит он не уступает второму ничего.

Пусть второй претендент забирает половину, значит он уступает первому половину (100).

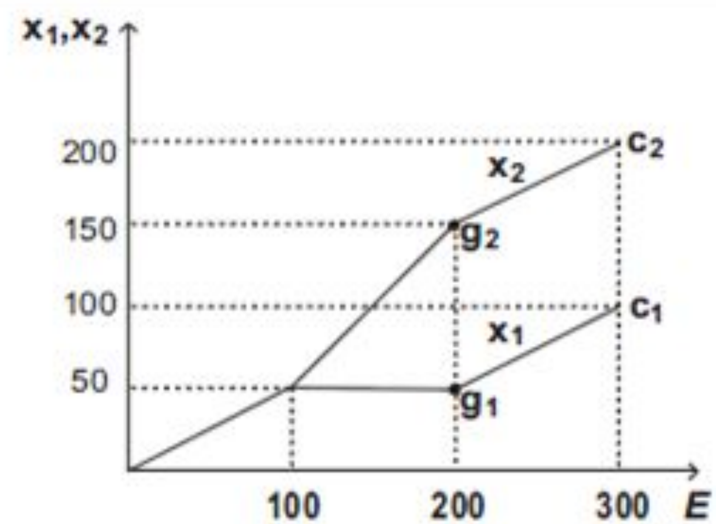
Каждый из общей суммы получает уступку (100 и 0), а остаток делится поровну (50 и 50).

Оказывается, принцип дележа полностью совпадает с принципом, основанном на векторе Шепли.

Пусть претензии заявляются поочередно и удовлетворяются полностью (если остаточной суммы достаточно) или частично (если остаточной суммы недостаточно, выдается вся доступная сумма).

А претендует на 200, В на 100. Доступно 200

	A	B
(A,B)	200	0
(B,A)	100	100
Сумма	300	100
Среднее	**150**	**50**



Раздел имущества между тремя женами

У человека было три жены. Их наследство в брачном контракте было оговорено в количестве 100, 200 и 300 у.е. соответственно. После смерти мужа оказалось, что наличной суммы недостаточно, чтобы выплатить наследство всем женам. Талмуд предлагает три варианта дележа в случаях, когда наличная сумма составляет 100, 200 и 300 у.е.

Оказалось, что в двух случаях из трех дележ соответствовал вектору Шепли!!!

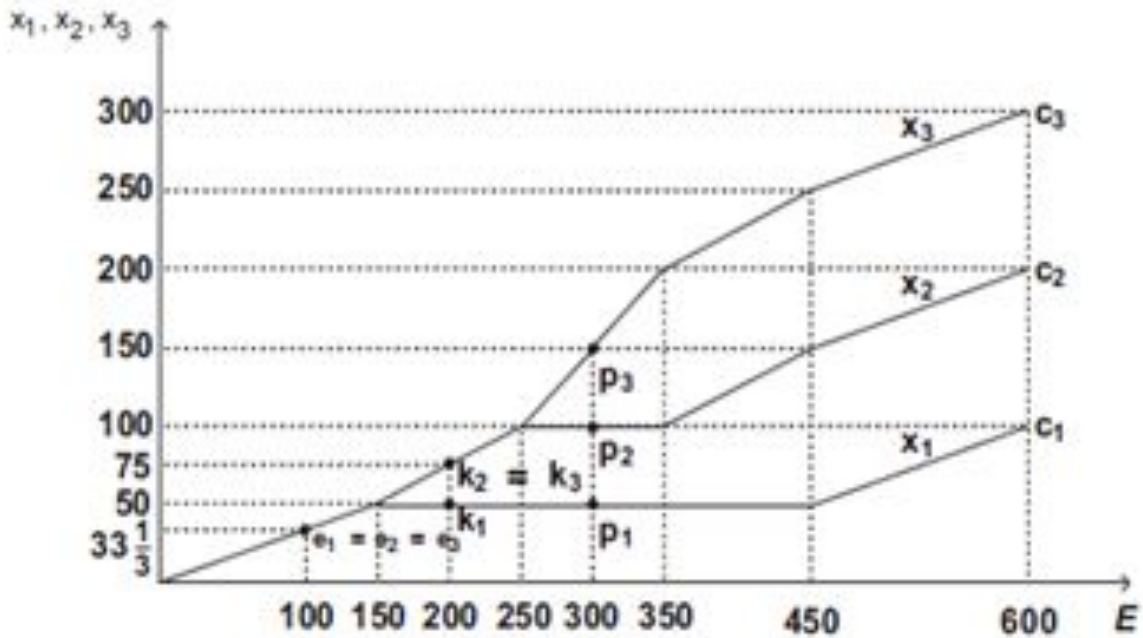
Принцип Шепли последовательного удовлетворения претензий

Доступно 300.

Претензии: A-100, B-200, C-300

	A(100)	B(200)	C(300)
A, B, C	100	200	0
A, C, B	100	0	200
B, A, C	100	200	0
B, C, A	0	200	100
C, A, B	0	0	300
C, B, A	0	0	300
Σ	300	600	900
Шепли	**50**	**100**	**150**

	A (100)	B (200)	C (300)
100, совпадает	33.33	33.33	33.33
200, Т/Щ	50 /66.66	50/ 80.33	100/ 80.33
300, совпадает	50	100	150



Вектор Шепли и

справедливое распределение на рынке труда

Классическая задача о назначениях

Пусть задача решается на максимум (эффективности).

Пусть зарплата пропорциональна эффективности.

При нахождении совокупной эффективности не всегда соблюдается справедливость

Пример

		Работы
		1 2
Работники	A B	$\begin{pmatrix} 6^* & 2 \\ 7 & 5^* \end{pmatrix}$

(6+5=11) > (7+2=9)

1-й работник получает 6, а 2-й 5,

хотя 2-й работник лучше 1-го, он получает меньше.

Что делать???

Надо перераспределять.

		Работы		
		1	2	3
Работники	A	9	7	5^*
	B	10^*	8	3
	C	4	6^*	2

Оптимальное решение- A на 3-ю, B на 1-ю, C на 2-ю работу

Суммарный заработок равен 5+10+6=21

Несправедливость:

1) B и C в выигрыше, они назначены на лучшие свои работы.

A в проигрыше, он назначен на худшую свою работу.

2) A лучше C но зарабатывает меньше (5<6)

Применим теорию Шепли для перераспределения

Пусть коалиция состоит из k работников.

Выделим из n работ подмножество из k работ,

Решим задачу о назначениях $k \times k$.

Под выигрышем коалиции будем понимать значение максимума задачи о назначениях $k \times k$, усредненное по всем C_n^k возможным вариантам выбора k работ из n.

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V(A)=\frac{9+7+5}{3}=7;\ V(B)=\frac{10+8+3}{3}=7;\ V(C)=\frac{4+6+2}{3}=4$$

$$V(A,B)\sim\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 9^{\bullet} & 7 \\ 10 & 8^{\bullet} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 9 & 5^{\bullet} \\ 10^{\bullet} & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 7 & 5^{\bullet} \\ 8^{\bullet} & 3 \end{pmatrix}\sim\frac{17+15+13}{3}=15$$

Аналогично

$$V(A,C)\sim\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\sim\frac{15+11+11}{3}=12\frac{1}{3}$$

$$V(B,C)\sim\begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\sim\frac{16+12+10}{3}=12\frac{2}{3}$$

V(A,B,C)=21 (решили раньше)

Строим таблицу и вычисляем вектор Шепли

	A	B	C
A, B, C	7	8	6
A, C, B	7	5 1/3	8 2/3
B, A, C	8	7	6
B, C, A	8 1/3	7	5 2/3
C, A, B	8 1/3	8 2/3	4
C, B, A	8 1/3	8 2/3	4
Σ	47	44 2/3	34 1/3
Шепли	7.83	7.45	5.72
Номинальная выплата	5	10	6
Дотация (налог)	+2.83	-2.55	-0.28

Задача о назначениях с изначальным предписанием работ

(задача обмена машинами)

Пусть изначально каждому работнику поручена одна работа

(не оптимальный план), например $\begin{pmatrix} 9^* & 7 & 5 \\ 10 & 8^* & 3 \\ 4 & 6 & 2^* \end{pmatrix}$

Суммарный заработок равен 19.

При распределении оптимального заработка каждый работник должен получать не меньше, чем при “старом” плане.

Под заработком коалиции из k работников будем понимать оптимальное значение решения задачи о назначениях $k \times k$ для данных k работников и объединенного множества (их) работ (каждый работник приносит в коалицию свою работу).

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

V(A)=9, V(B)=8, V(C)=2

$$V(A,B) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix} \sim 17\ ,\ V(A,C) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 5 \\ 4 & 2^* \end{pmatrix} \sim 11\ ,\ V(B,C) \sim \begin{pmatrix} 8^* & 3 \\ 6 & 2^* \end{pmatrix} \sim 10$$

V(A,B,C)=21

	A	B	C
A, B, C	9	8	4
A, C, B	9	10	2
B, A, C	9	8	4
B, C, A	11	8	2
C, A, B	9	10	2
C, B, A	9	10	2
Σ	56	54	16
Шепли	9 1/3	9	2 2/3
Прежний заработок	9	8	8
Выгода	+1/3	+1	+2/3

Оценка влияния политических партий

Индексы Банцафа и Шепли-Шубика

Пусть парламент состоит из k партий.

Каждая партия имеет вес (абсолютный, относительный).

Например, $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 16 & 12 & 9 & 13 \\ 0.32 & 0.24 & 0.18 & 0.26 \end{pmatrix}$

Голосование - простая кооперативная игра. Коалиция выигрывает 1, если сумма весов проголосовавших преодолевает установленный барьер (например, >1/2 или 2/3) и 0 в противном случае.

Например, для простого большинства V(A,B)=1, V(A,C)=0.

Говорят, что партия A дотягивает коалицию S (где $A \notin S$), если

$V(S) = 0$ и $V(S \cup A) = 1$.

Для каждой партии определяется число Банцафа – сколько коалиций (из 2^{n-1}) она дотягивает.

Индекс Банцафа партии – число Б. деленное на сумму чисел Б. всех партий.

Например, $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 16 & 12 & 9 & 13 \\ 0.32 & 0.24 & 0.18 & 0.26 \end{pmatrix}$

Партия	Кого дотягивает	Ч. Банц	Инд. Банц.
A	B,D,BC,BD,CD	5	5/12
B	A, AC, CD	3	3/12
C	BD	1	1/12
D	A, AC, BC	3	3/12

Индекс Шепли-Шубика

Зафиксируем некоторую перестановку партий, например

(C(9), B(12), D(13), A(16)).

Добавляем партии в коалицию, пока коалиция не станет выигрышной.

Для каждой перестановки одна партия является дотягивающей (в данном случае D).

Индекс Шепли- доля перестановок (из общего числа n!), для которой данная партия является дотягивающей.

Индекс Шепли можно вычислить по формуле

$$\phi_i(v) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} A_i(s)$$

Где $A_i(s)$ – число s-элементных коалиций, дотягиваемых партией i

В разобранном примере индекс Ш-Ш будет такой же, как и Б.

Индексы Б и Ш-Ш монотонны по весу партии, меняются скачкообразно.

Может быть такое, что разрыв в весе существенный, а индексы равные, или разрыв несущественный, а индексы отличаются существенно.

Пример. А) вес D существенно меньше остальных

б) вес D несущественно меньше остальных

	Вес, %	Ш.Ш. и Б. при >1/2	Ш.Ш. и Б. при ≥2/3
A	24	1/5	1/4
B	24	1/5	1/4
C	24	1/5	1/4
D	24	1/5	1/4
E	4	1/5	0

	Вес, %	Ш.Ш. и Б. при >1/2	Ш.Ш. и Б. при ≥2/3
A	26	1/3	1/4
B	26	1/3	1/4
C	26	1/3	1/4
D	22	0	1/4

Вычисление индексов Банцафа и Шепли-Шубика по итогам выборов в ВР-2012

1) ПР – 145, 2) БТК – 123, 3) УДАР – 68, КПУ-64, СВБ- 50

Индекс Банцафа

Для ПР вычислим число дотягиваний до выигрышной коалиции.

Составим производящую функцию

$$\cancel{(1+x^{145})}(1+x^{123})(1+x^{68})(1+x^{64})(1+x^{50})$$

Степени x (Mathcad):

0, 50, 64, 68, 114, 118, 123, 132, 173, 182, 187, 191, 237, 241,255, 305 (**)

Диапазоны дотягивания до выигрышной коалиции:

Простое большинство (≥226) – от 226-145=81 до 226-1=225 //8 членов (**)

Две трети голосов (≥300) – от 300-145=155 до 300-1=299 // 7 членов (**)

Аналогично, вычисляем числа Банцафа для других партий.

Для каждой партии в производящей функции вычеркиваем (ее) сомножитель.

Сводная таблица имеет вид

Партия	Места	Диапазон дотягивания		Числа Банцафа		Индексы Банцафа	
		>1/2	2/3	>1/2	2/3	>1/2	2/3
1) ПР	145	81-225	155-299	8	7	0.286	0.305
2) БТК	123	102-225	177-299	8	7	0.286	0.305
3) УДАР	68	158-225	232-299	4	3	0.143	0.130
4) КПУ	64	162-225	236-299	4	3	0.143	0.130
5) СВБ	50	176-225	250-299	4	3	0.143	0.130
Итого	450	–	–	28	23	1	1

Индекс Шепли-Шубика

Составляем двойную производящую функцию

$$(1+zx^{145})(1+zx^{123})(1+zx^{68})(1+zx^{64})(1+zx^{50})$$

x отвечает за число депутатов,
z- за число партий в коалиции
Компоненты вектора $\vec{a}$ весовых коэффициентов (для всех партий) вычисляем по формуле

$a_s = \dfrac{s!\,(n-s-1)!}{n!}$, здесь n=5, s изменяется от 0 до 4.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{24}{120} & \frac{6}{120} & \frac{4}{120} & \frac{6}{120} & \frac{24}{120} \end{pmatrix}$$

Для ПР (k=145) зачеркиваем первую скобку и раскладываем в ряд по степеням z.

Аналогично предыдущему случаю диапазоны дотягивания до простого большинства и 2/3 составляют 81-225 и 155-299 соответственно.

$\vec{a}$		Степени при x	$\vec{b}_1$ 81-225	$\vec{b}_2$ 155-299
24/120	z^0	0	0	0
6/120	z^1	50,64,68,123	1	0
4/120	z^2	114,118,132,173,187,191	6	3
6/120	z^3	182,237,241,255	1	4
24/120	z^4	305	0	0

Индексы Ш-Ш для ПР равны $(\vec{a},\vec{b}_1) = 0.3$, $(\vec{a},\vec{b}_2) = 0.3$

Аналогичным образом вычисляются индексы Ш-Ш для других партий.

Оказалось, что значения ШШ для двух барьеров (226 и 300 из 450) совпадают и равны

Партии	ПР	БТК	УДАР	КПУ	СВБ
Численность	145	123	68	64	50
Индекс Ш-Ш	0.3	0.3	0.133	0.133	0.133

Спасибо за внимание.

Вопросы?