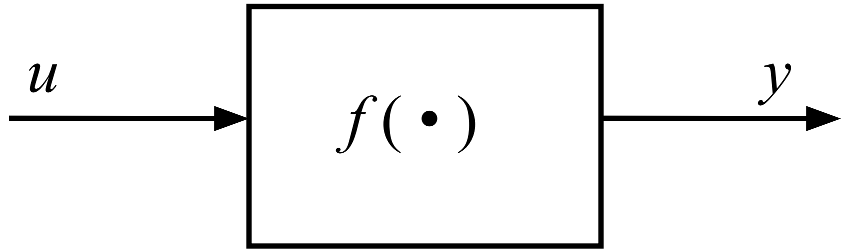
Вычисление неизвестных аналитических зависимостей

Лямин Андрей Владимирович

Постановка задачи



Дано:

- $u=\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$
- $y=\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$

Найти:

- $y = f(u)$

Методы вычисления

- Интерполяция
- Аппроксимация

Интерполяция функций

Интерполяционная формула сопоставляет с функцией $f(u)$ функцию известного класса $\hat{f}(u) = \hat{f}(u, a_0, a_1, \ldots, a_n)$, зависящую от $n+1$ параметров a_i, выбранных так, чтобы значения $\hat{f}(u)$ совпадали со значениями $f(u)$ для данного множества $n+1$ значений аргумента u_k (узлов интерполяции):

$$\hat{f}(u_k) = f(u_k) = y_k.$$

Интерполяционная функция Лагранжа

$$\hat{f}(u) = \frac{(u-u_1)(u-u_2)\cdot\ldots\ \cdot(u-u_n)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)\cdot\ldots\ \cdot(u_0-u_n)}y_0 +$$

$$+\frac{(u-u_0)(u-u_2)\cdot\ldots\ \cdot(u-u_n)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)\cdot\ldots\ \cdot(u_1-u_n)}y_1 + \ldots\ +$$

$$+\frac{(u-u_0)(u-u_1)\cdot\ldots\ \cdot(u-u_{n-1})}{(u_n-u_0)(u_n-u_1)\cdot\ldots\ \cdot(u_n-u_{n-1})}y_n\,.$$

Пример 1:

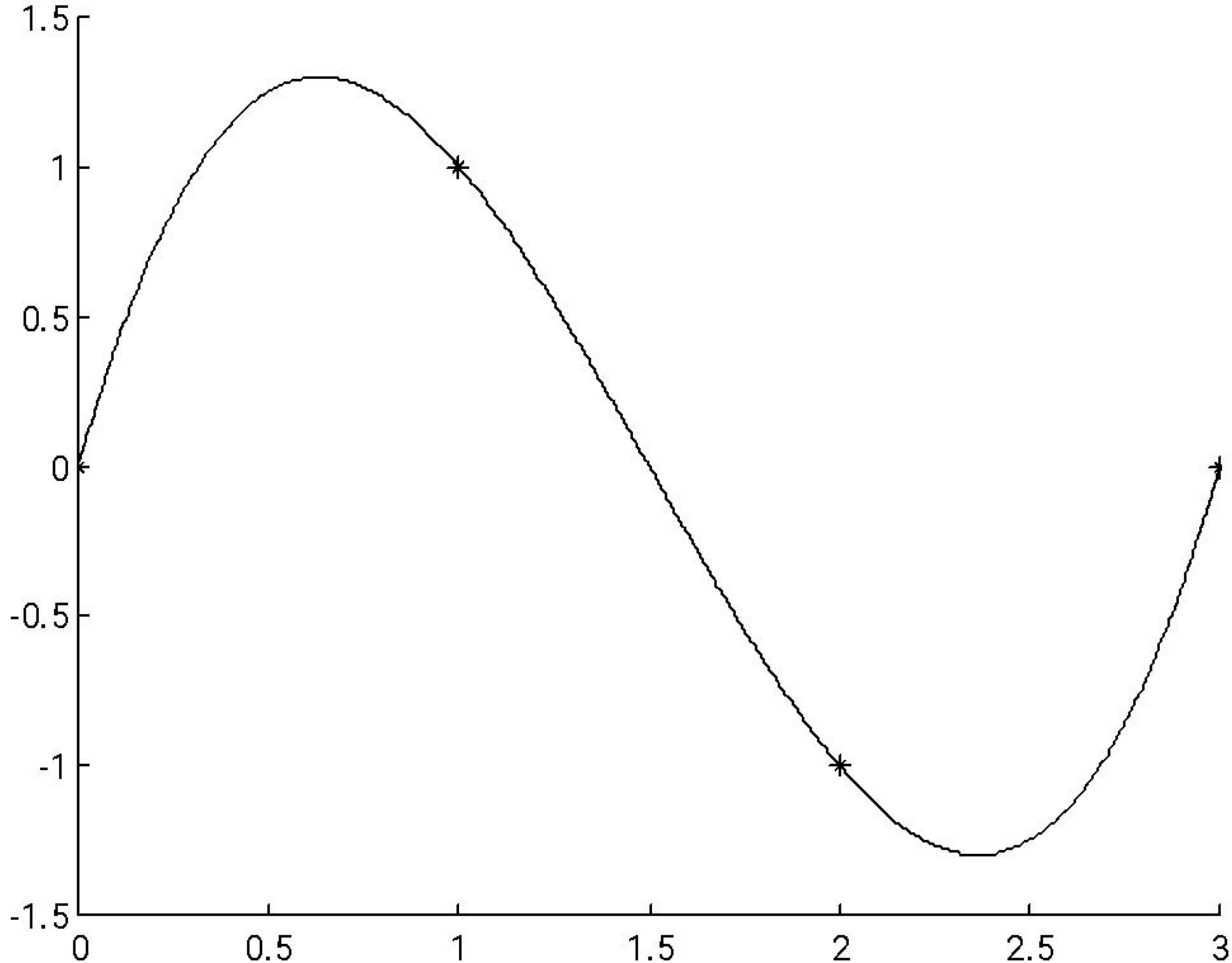
Пусть:

- u={0, 1, 2, 3}
- y={0, 1, -1, 0}

Тогда:

$$\hat{f}(u) = \frac{(u-0)(u-2)(u-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \cdot (1) + \frac{(u-0)(u-1)(u-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \cdot (-1),$$

$$\hat{f}(u) = u^3 - 4.5 \cdot (u^2 - u).$$



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Интерполяционная функция Ньютона

$$\hat{f}(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta_i(u_0, \ldots, u_i) \prod_{k=0}^{i-1} (u - u_k) \right],$$

$$\Delta_1(u_0, u_1) = \frac{(y_1 - y_0)}{(u_1 - u_0)},$$

$$\Delta_r(u_0, u_1, \ldots, u_r) = \frac{\Delta_{r-1}(u_1, u_2, \ldots, u_r) - \Delta_{r-1}(u_0, u_1, \ldots, u_{r-1})}{(u_r - u_0)}.$$

Пример 2:

Пусть:

- $u=\{0, 1, 2, 3\}$
- $y=\{0, 1, -1, 0\}$

Тогда:

$$\hat{f}(x) = y_0 + \Delta_1(u_0, u_1)(u - u_0) +$$
$$+\Delta_2(u_0, u_1, u_2)(u - u_0)(u - u_1) +$$
$$+\Delta_3(u_0, u_1, u_2, u_3)(u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)$$

$$\Delta_1(u_0,u_1)=\frac{(y_1-y_0)}{(u_1-u_0)},$$

$$\Delta_2(u_0,u_1,u_2)=\frac{(\Delta_1(u_1,u_2)-\Delta_1(u_0,u_1))}{(u_2-u_0)},$$

$$\Delta_3(u_0,u_1,u_2,u_3)=\frac{(\Delta_2(u_1,u_2,u_3)-\Delta_2(u_0,u_1,u_2))}{(u_3-u_0)}.$$

$$\Delta_1(u_0,u_1)=\frac{(1-0)}{(1-0)}=1,\Delta_1(u_1,u_2)=\frac{(-1-1)}{(2-1)}=-2,\Delta_1(u_2,u_3)=\frac{(0+1)}{(3-2)}=1,$$

$$\Delta_2(u_0,u_1,u_2)=\frac{(-2-1)}{(2-0)}=-1.5,\Delta_2(u_1,u_2,u_3)=\frac{(1+2)}{(3-1)}=1.5,$$

$$\Delta_3(u_0,u_1,u_2,u_3)=\frac{(1.5+1.5)}{(3-0)}=1.$$

$$\hat{f}(x)=0+1(u-0)-1.5(u-0)(u-1)+$$

$$+1(u-0)(u-1)(u-2)=u^3-4.5\cdot(u^2-u).$$

Аппроксимация функциональных зависимостей

$$f(u): y_k = f(u_k),\ k = \overline{0, n}$$

$$\hat{f}(u) = \sum_{i=0}^{m} \theta_i \varphi_i(u) = \theta^{\mathrm{T}} \varphi(u),$$

$$\theta^{\mathrm{T}} = [\theta_0, \ldots, \theta_m],\ \varphi^{\mathrm{T}} = [\varphi_0, \ldots, \varphi_m]$$

$$J(\theta) = \left[\sum_{k=0}^{n} (\hat{f}(u_k) - f(u_k))^2 \right] =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} (\theta^{\mathrm{T}} \varphi(u_k) - f(u_k))^2 \right] \xrightarrow{\theta} \min$$

Решение задачи аппроксимации

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sum_{k=0}^{n}(\theta^{\mathrm{T}}\varphi(u_k) - f(u_k))^2\right] = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{k=0}^{n}(\theta^{\mathrm{T}}\varphi\varphi^{\mathrm{T}}\theta - 2\theta^{\mathrm{T}}\varphi f + f^2) = 2\sum_{k=0}^{n}(\varphi\varphi^{\mathrm{T}}\theta - \varphi f) = 0$$

$$\theta = \left[\sum_{k=0}^{n}(\varphi\varphi^{\mathrm{T}})\right]^{-1}\sum_{k=0}^{n}\varphi f,\ \det\left[\sum_{k=0}^{n}(\varphi\varphi^{\mathrm{T}})\right] \neq 0$$

Пример 3:

Пусть:

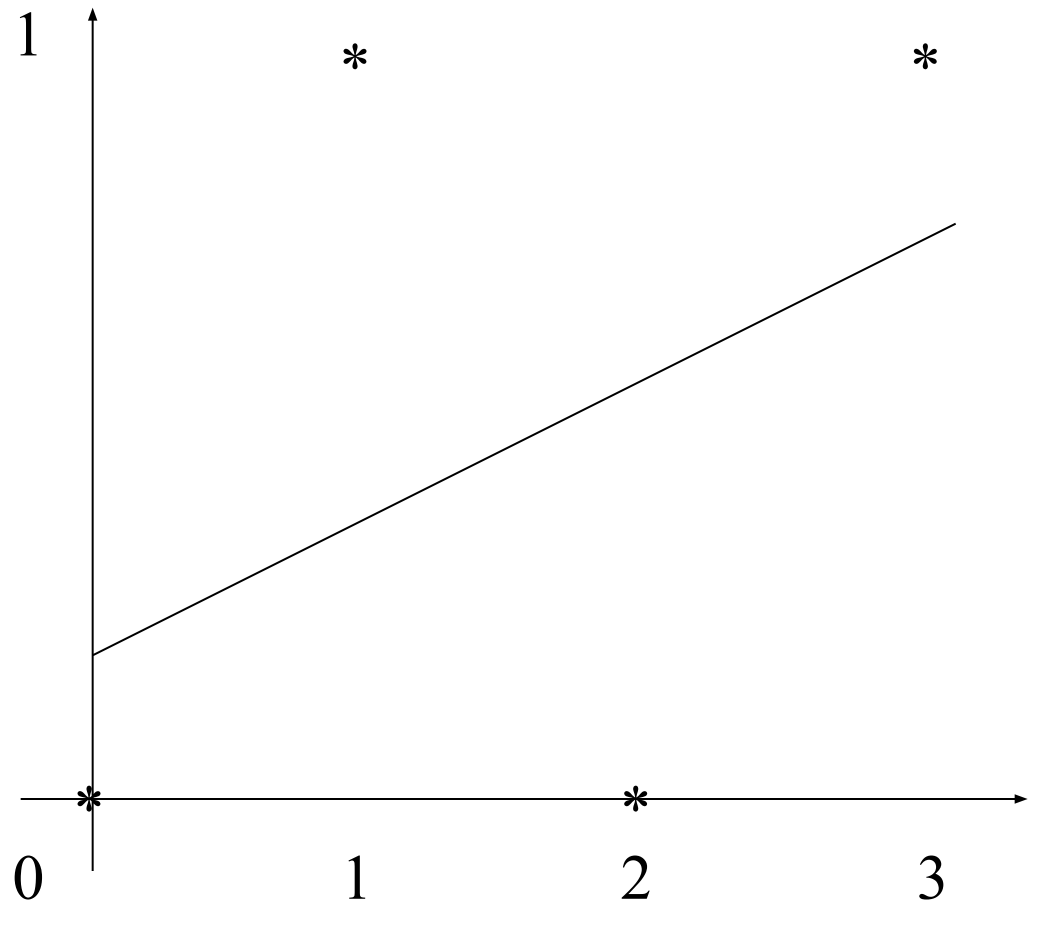
- $u=\{0, 1, 2, 3\}$, $y=\{0, 1, 0, 1\}$, $\phi=[1,u]^{\mathrm{T}}$

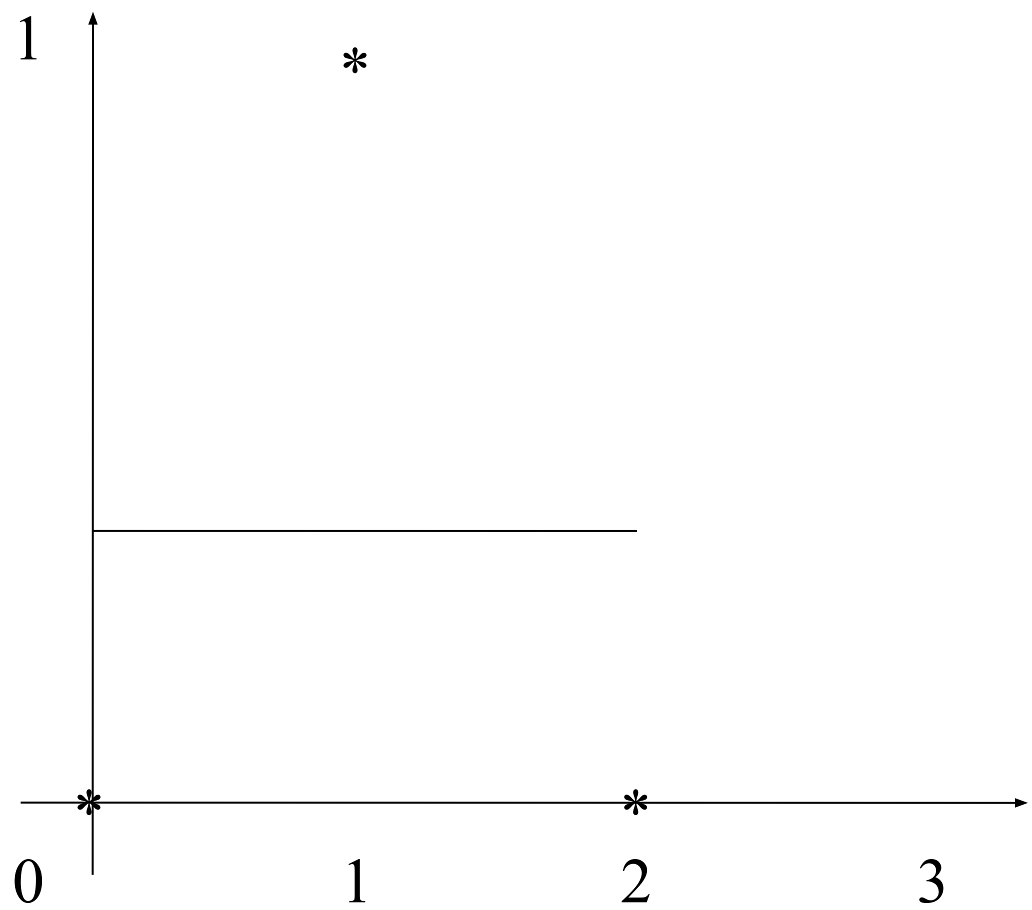
Тогда:

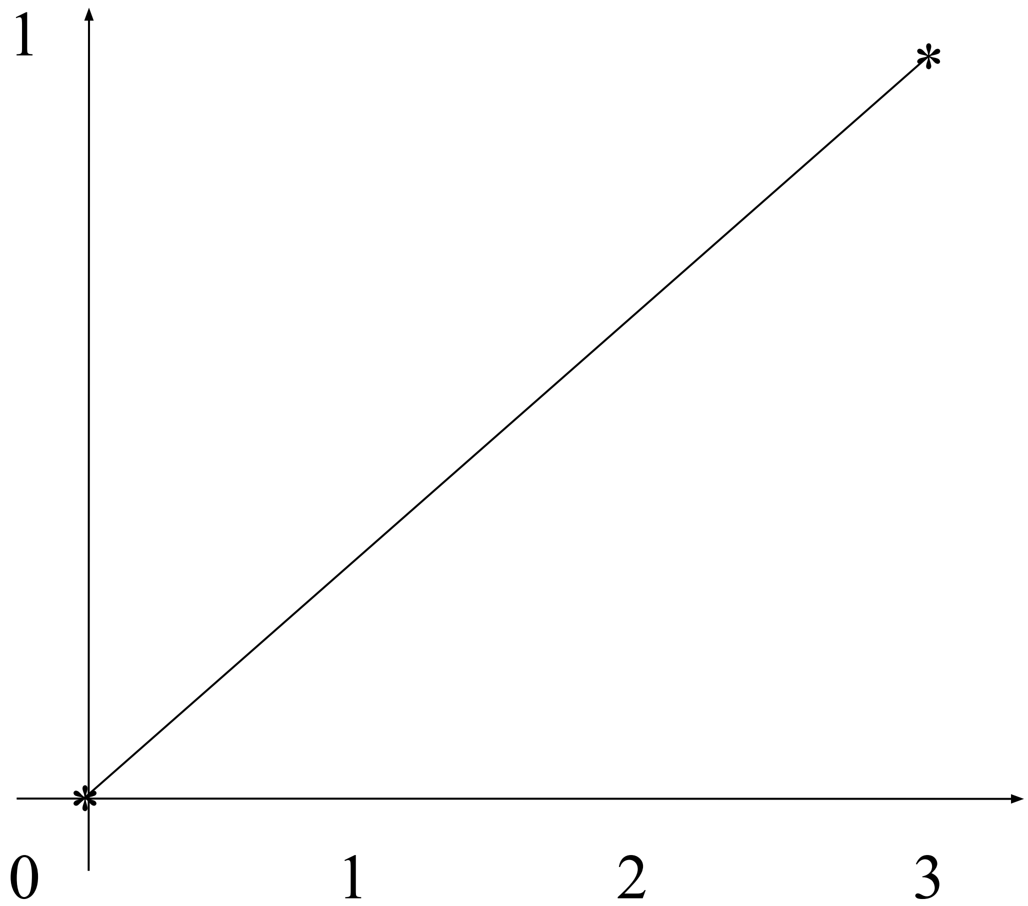
$$\left[\sum_{k=0}^{n}(\varphi\varphi^{\mathrm{T}})\right]^{-1}=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 14\end{vmatrix}^{-1}=\frac{1}{20}\begin{vmatrix}14 & -6\\ -6 & 4\end{vmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi f=\begin{vmatrix}2\\ 4\end{vmatrix},\ \theta=\frac{1}{20}\begin{vmatrix}14 & -6\\ -6 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2\\ 4\end{vmatrix}=\frac{1}{20}\begin{vmatrix}4\\ 4\end{vmatrix}$$

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{5}(1+u),\quad J(\theta)=\frac{4}{5}$$


1
*
*
*
*
0
1
2
3


1
*
*
*
0
1
2
3


1
*
*
0
1
2
3

Способы повышения точности аппроксимации

- Замена базисных функций
- Увеличение количества базисных функций