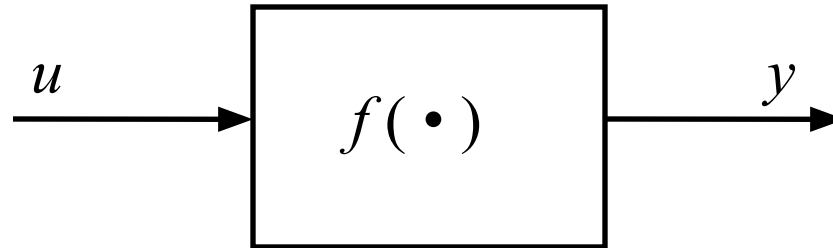


Вычисление неизвестных аналитических зависимостей

Лямин Андрей Владимирович

Постановка задачи



Дано:

- $u = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$
- $y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$

Найти:

- $y = f(u)$

Методы вычисления

- Интерполяция
- Аппроксимация

Интерполяция функций

Интерполяционная формула сопоставляет с функцией $f(u)$ функцию известного класса, зависящую от параметров a_0, a_1, \dots, a_n , выбранных так, чтобы значения совпадали со значениями $f(u_k)$ для данного множества значений аргумента u_k (узлов $n + 1$ интерполяции):

$$\hat{f}(u_k) = f(u_k) = y_k$$

Интерполяционная функция Лагранжа

$$\begin{aligned}\hat{f}(u) = & \frac{(u - u_1)(u - u_2) \cdot \dots \cdot (u - u_n)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2) \cdot \dots \cdot (u_0 - u_n)} y_0 + \\ & + \frac{(u - u_0)(u - u_2) \cdot \dots \cdot (u - u_n)}{(u_1 - u_0)(u_1 - u_2) \cdot \dots \cdot (u_1 - u_n)} y_1 + \dots + \\ & + \frac{(u - u_0)(u - u_1) \cdot \dots \cdot (u - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \cdot \dots \cdot (u_n - u_{n-1})} y_n.\end{aligned}$$

Пример 1:

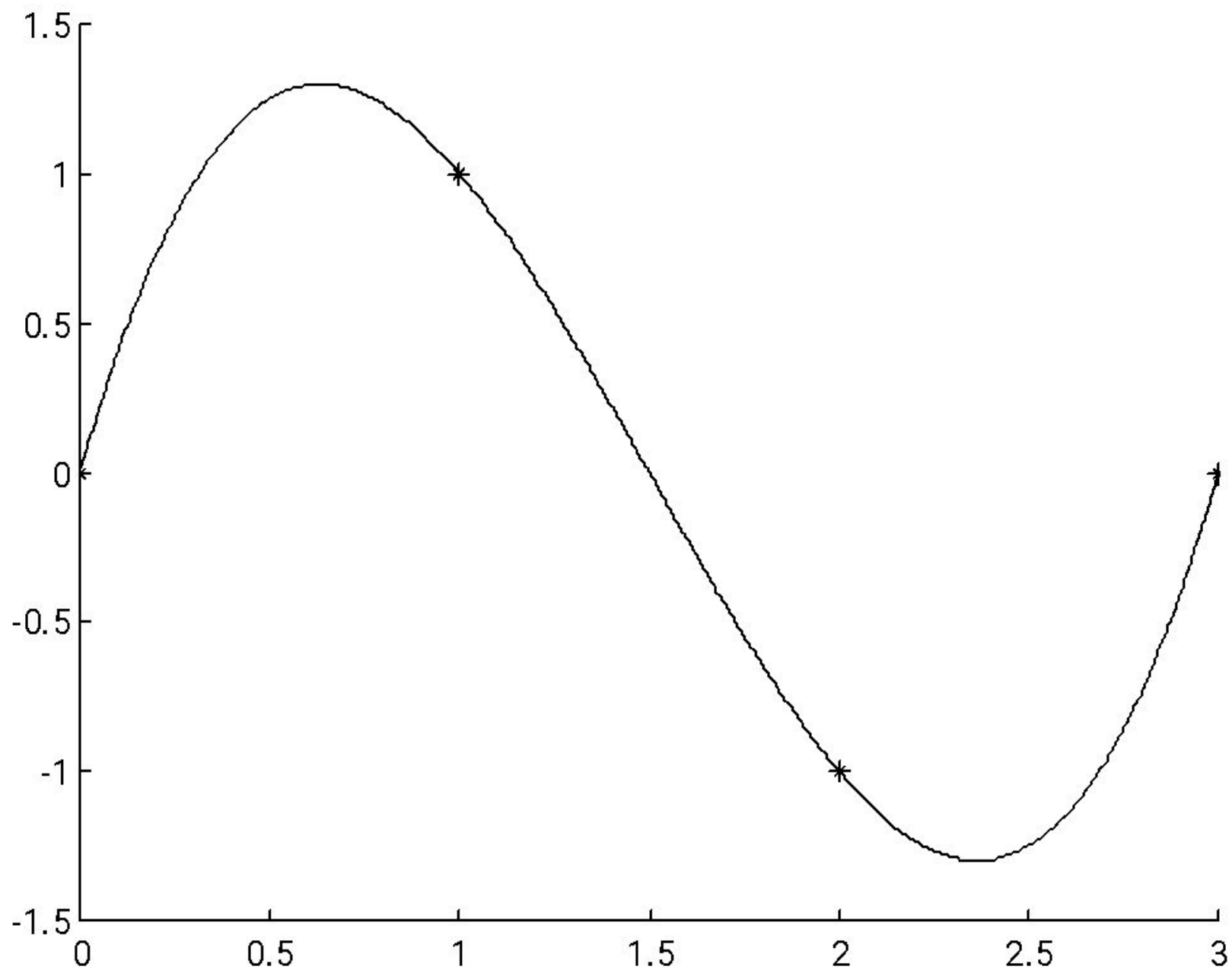
Пусть:

- $u = \{0, 1, 2, 3\}$
- $y = \{0, 1, -1, 0\}$

Тогда:

$$\hat{f}(u) = \frac{(u-0)(u-2)(u-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \cdot (1) + \frac{(u-0)(u-1)(u-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \cdot (-1),$$

$$\hat{f}(u) = u^3 - 4.5 \cdot (u^2 - u).$$



Интерполяционная функция Ньютона

$$\hat{f}(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\Delta_i(u_0, \dots, u_i) \prod_{k=0}^{i-1} (u - u_k) \right],$$

$$\Delta_1(u_0, u_1) = \frac{(y_1 - y_0)}{(u_1 - u_0)},$$

$$\Delta_r(u_0, u_1, \dots, u_r) = \frac{\Delta_{r-1}(u_1, u_2, \dots, u_r) - \Delta_{r-1}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1})}{(u_r - u_0)}.$$

Пример 2:

Пусть:

- $u = \{0, 1, 2, 3\}$
- $y = \{0, 1, -1, 0\}$

Тогда:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) = & y_0 + \Delta_1(u_0, u_1)(u - u_0) + \\ & + \Delta_2(u_0, u_1, u_2)(u - u_0)(u - u_1) + \\ & + \Delta_3(u_0, u_1, u_2, u_3)(u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)\end{aligned}$$

$$\Delta_1(u_0, u_1) = \frac{(y_1 - y_0)}{(u_1 - u_0)},$$

$$\Delta_2(u_0, u_1, u_2) = \frac{(\Delta_1(u_1, u_2) - \Delta_1(u_0, u_1))}{(u_2 - u_0)},$$

$$\Delta_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{(\Delta_2(u_1, u_2, u_3) - \Delta_2(u_0, u_1, u_2))}{(u_3 - u_0)}.$$

$$\Delta_1(u_0, u_1) = \frac{(1-0)}{(1-0)} = 1, \Delta_1(u_1, u_2) = \frac{(-1-1)}{(2-1)} = -2, \Delta_1(u_2, u_3) = \frac{(0+1)}{(3-2)} = 1,$$

$$\Delta_2(u_0, u_1, u_2) = \frac{(-2-1)}{(2-0)} = -1.5, \Delta_2(u_1, u_2, u_3) = \frac{(1+2)}{(3-1)} = 1.5,$$

$$\Delta_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{(1.5+1.5)}{(3-0)} = 1.$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= 0 + 1(u-0) - 1.5(u-0)(u-1) + \\ &+ 1(u-0)(u-1)(u-2) = u^3 - 4.5 \cdot (u^2 - u). \end{aligned}$$

Аппроксимация функциональных зависимостей

$$f(u) : y_k = f(u_k), k = \overline{0, n}$$

$$\hat{f}(u) = \sum_{i=0}^m \theta_i \varphi_i(u) = \theta^T \varphi(u),$$

$$\theta^T = [\theta_0, \dots, \theta_m], \varphi^T = [\varphi_0, \dots, \varphi_m]$$

$$J(\theta) = \left[\sum_{k=0}^n (\hat{f}(u_k) - f(u_k))^2 \right] =$$
$$= \left[\sum_{k=0}^n (\theta^T \varphi(u_k) - f(u_k))^2 \right] \xrightarrow{\theta} \min$$

Решение задачи аппроксимации

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{k=0}^n (\theta^T \varphi(u_k) - f(u_k))^2 \right] = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{k=0}^n (\theta^T \varphi \varphi^T \theta - 2\theta^T \varphi f + f^2) = 2 \sum_{k=0}^n (\varphi \varphi^T \theta - \varphi f) = 0$$

$$\theta = \left[\sum_{k=0}^n (\varphi \varphi^T) \right]^{-1} \sum_{k=0}^n \varphi f, \quad \det \left[\sum_{k=0}^n (\varphi \varphi^T) \right] \neq 0$$

Пример 3:

Пусть:

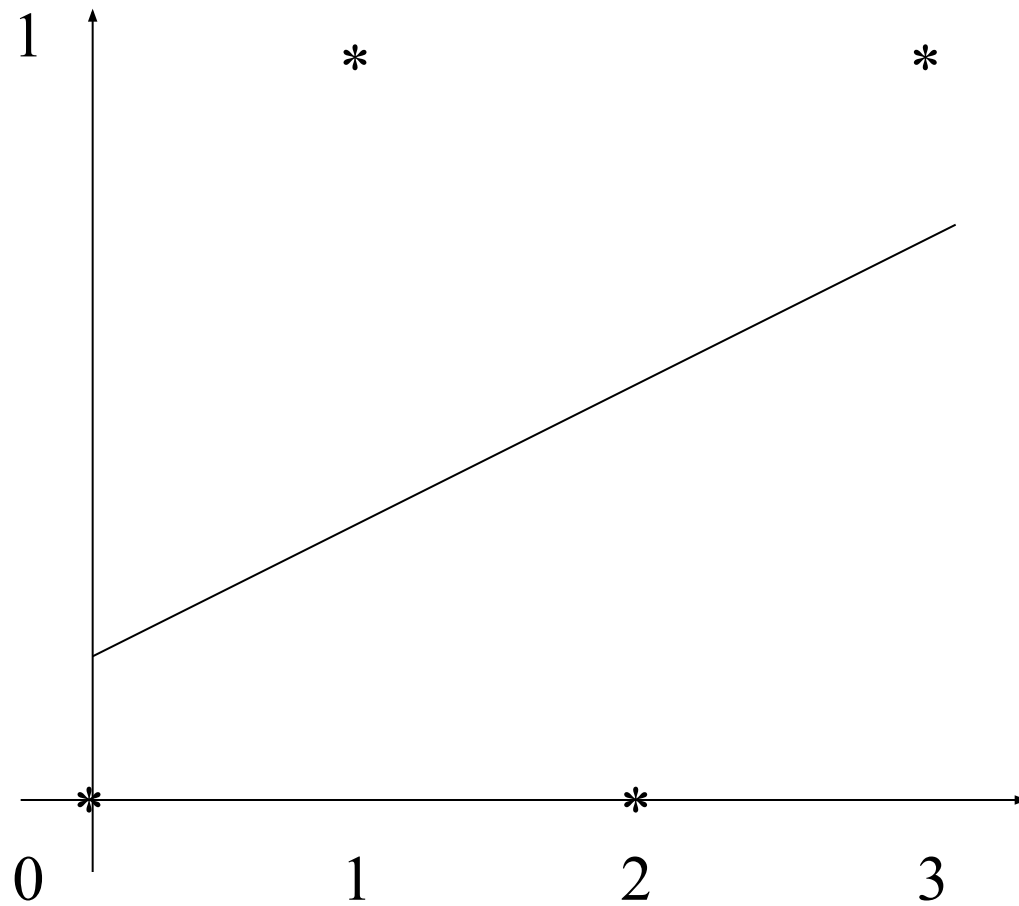
- $u = \{0, 1, 2, 3\}$, $y = \{0, 1, 0, 1\}$, $\phi = [1, u]^T$

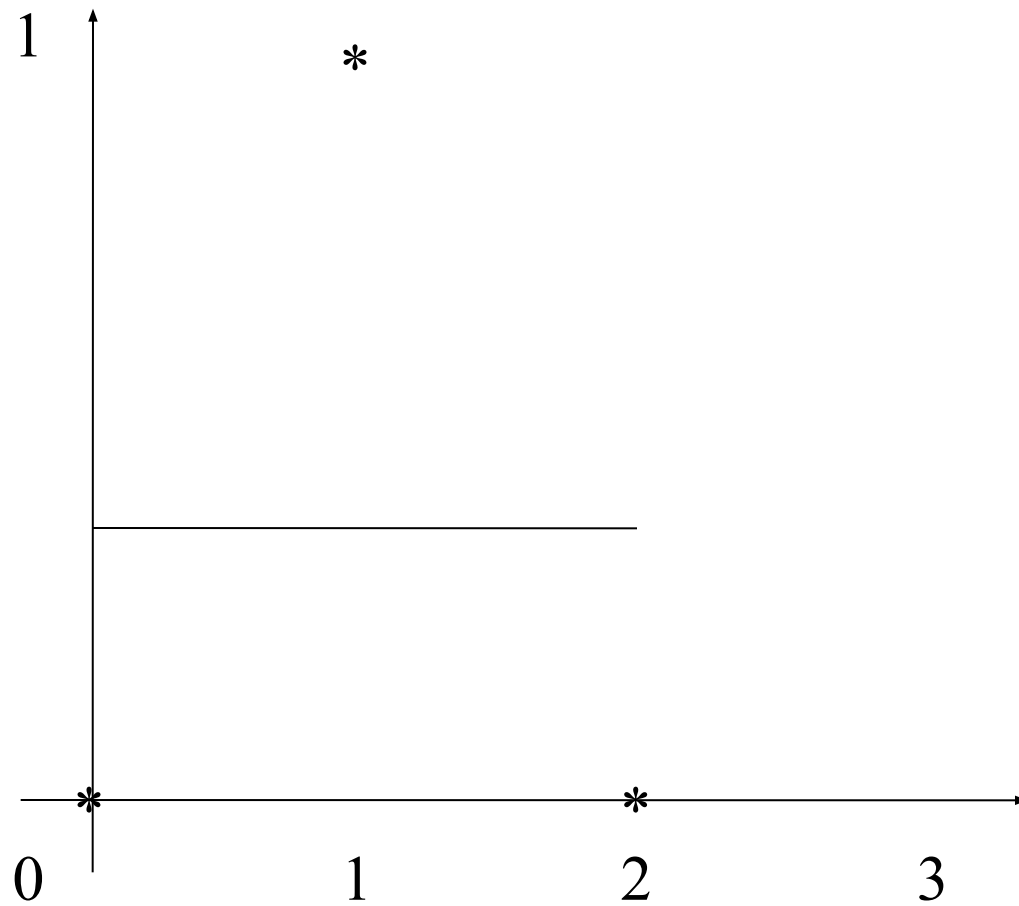
Тогда:

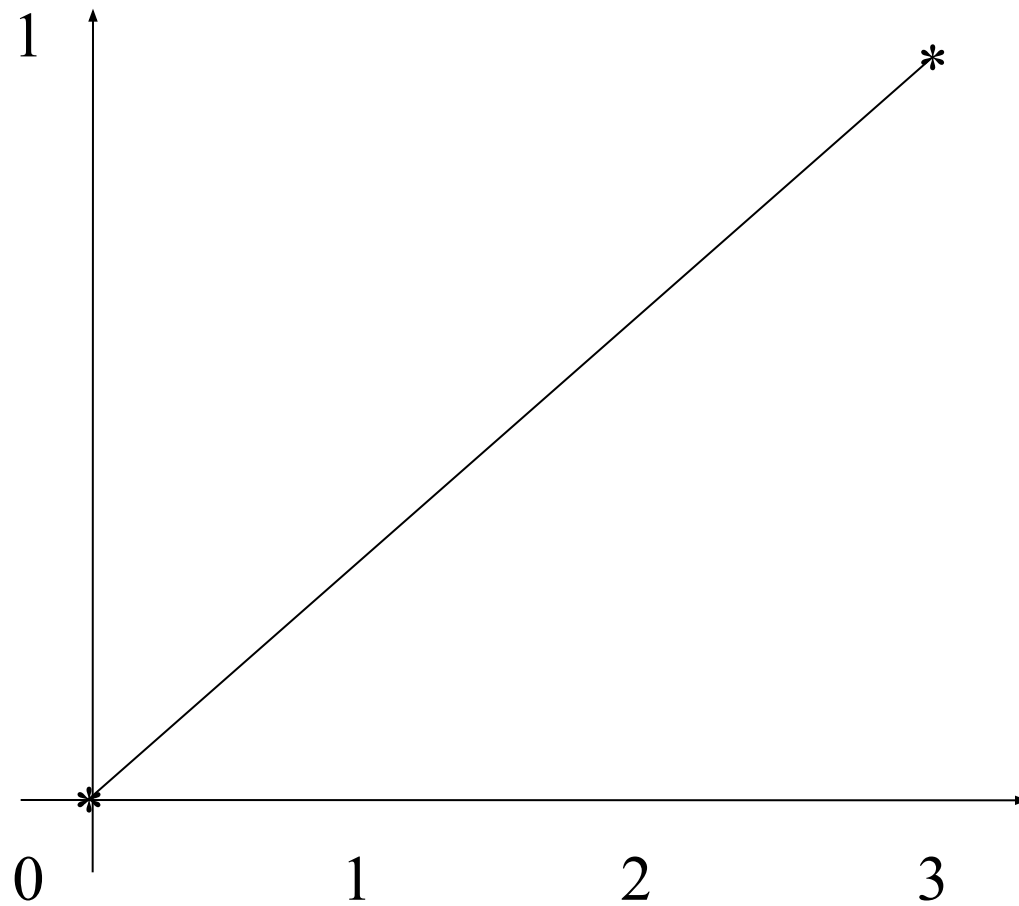
$$\left[\sum_{k=0}^n (\phi \phi^T) \right]^{-1} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^n \phi f = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{20} \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{20} \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{5}(1 + u), \quad J(\theta) = \frac{4}{5}$$







Способы повышения точности аппроксимации

- Замена базисных функций
- Увеличение количества базисных функций