# Курс высшей математики

## Часть 1

УГТУ-УПИ
2004г.

# Лекция 5

## Аналитическая геометрия

1. Аналитическое представление линии и поверхности в пространстве .

2. Плоскость в пространстве.

3. Прямая в пространстве.

1.

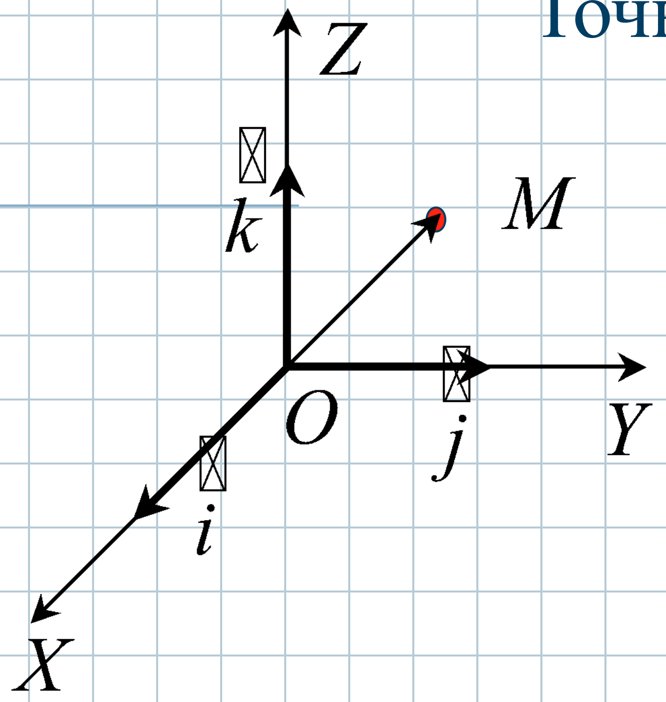
# Аналитическое представление линии и поверхности в пространстве.

Задачей аналитической геометрии является изучение геометрических объектов аналитическими методами, то есть средствами алгебры и математического анализа, без геометрических построений.

***Геометрические объекты*: точка,линия,поверхность, тело.**

В основе аналитической геометрии лежит **метод координат** , позволяющий описывать положение точки в пространстве с помощью чисел (координат точки), что и обеспечивает возможность привлечения методов алгебры и анализа **.**

Из всех используемых при этом систем координат наиболее часто применяется ***декартова система*** – совокупность точки $O$ и ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, **OX, OY, OZ** - ***координатные оси.***




Точку М можно задать вектором

$$\vec{r}_M \equiv \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{r}_M = (x, y, z)$$

***Декартовыми координатами точки*** **М** называются декартовы координаты её радиус-вектора

$$\vec{r}_M = (x, y, z) \Rightarrow M(x, y, z)$$

Более ***сложные*** геометрические объекты задаются ***уравнениями*** (или неравенствами), связывающими координаты точек, образующих эти объекты.

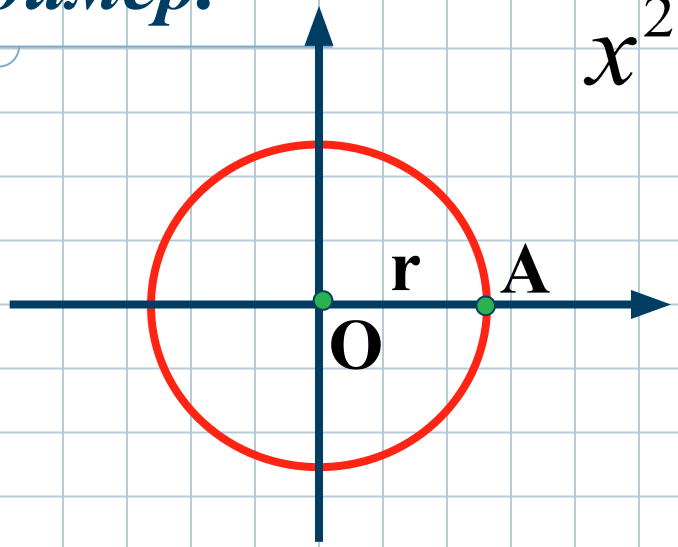
## ***Линия на плоскости .***

Уравнение вида **Ф(x,y) = 0** называется уравнением линии **L** на плоскости, если ему удовлетворяют координаты ***x*** и ***y*** любой точки **M(*x,y*)** лежащей на этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки не лежащей на этой линии.

-

Линия **L** - ***геометрическое место*** точек, удовлетворяющих уравнению **Ф(*x*,*y*)=0**.

***Пример.***




$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$A(r,0) \in L$

$O(0,0) \notin L$

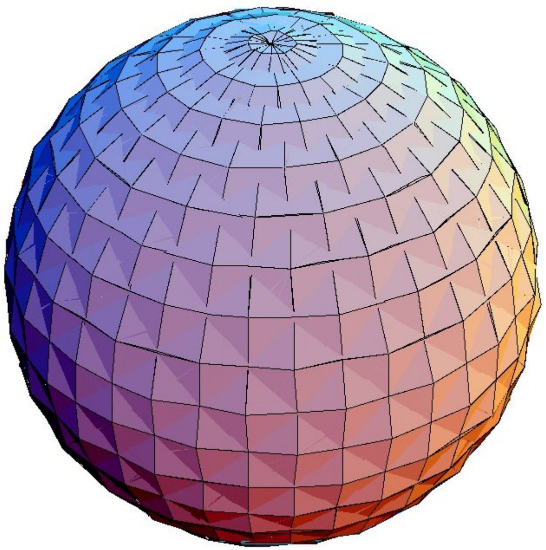
## ***Поверхность в пространстве*** .

Пусть $S$ - некоторая поверхность.

Уравнение вида **Ф(*x*,*y*,*z*)=0** называется уравнением этой поверхности,если ему удовлетворяют координаты любой точки ***M(x,y,z)*** лежащей на этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой поверхности.

Поверхность ***S*** - ***геометрическое место*** точек, координаты которых удовлетворяют уравнению **Ф*(x,y,z)*=0**.

***Пример:*** $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$



## ***Линия в пространстве*** .

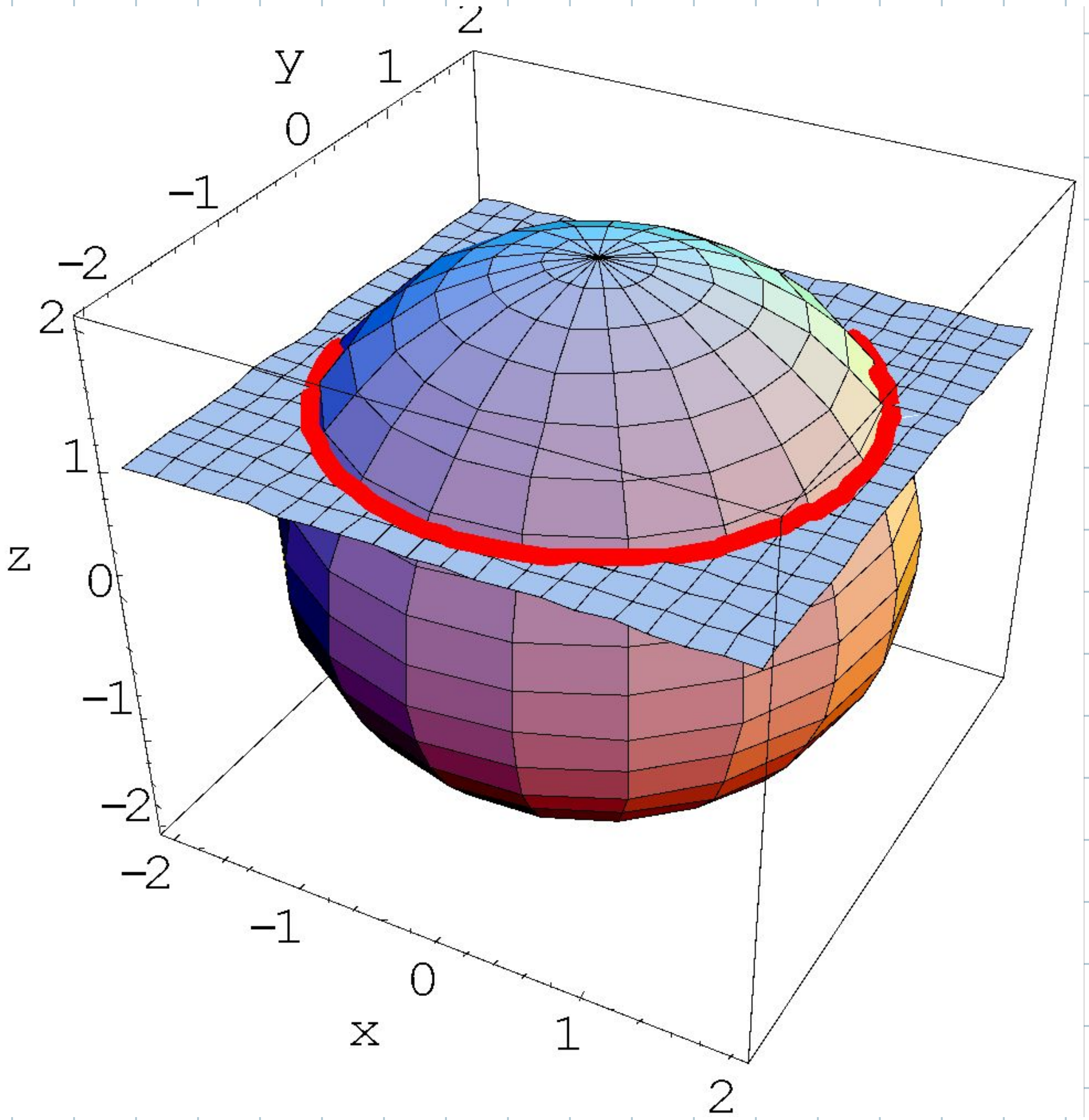
Кривую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, то есть как геометрическое место точек, принадлежащих обеим поверхностям.

Следовательно, координаты этих точек должны удовлетворять системе уравнений :

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

(Здесь $\mathbf{\Phi_1}$***(x,y,z)*****=0** и $\mathbf{\Phi_2}$***(x,y,z)*****=0** – уравнения пересекающихся поверхностей).

***Пример.*** *Окружность – линия пересечения сферы и плоскости*:




$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1 \end{cases}$$

# ***Параметрические уравнения линии и поверхности .***

При параметрическом задании линии L, её можно рассматривать как траекторию движения точки **M**($x,y,z$):

$$\mathbf{L}:\begin{cases}\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{t})\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{t})\\ \mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{t})\end{cases}$$

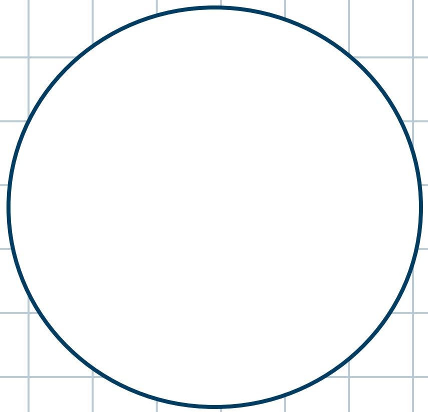
*, **t** – параметр, играющий роль времени.*

Уравнения задают положение точки в каждый момент времени.

## *Пример:*

$$L:\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow$$



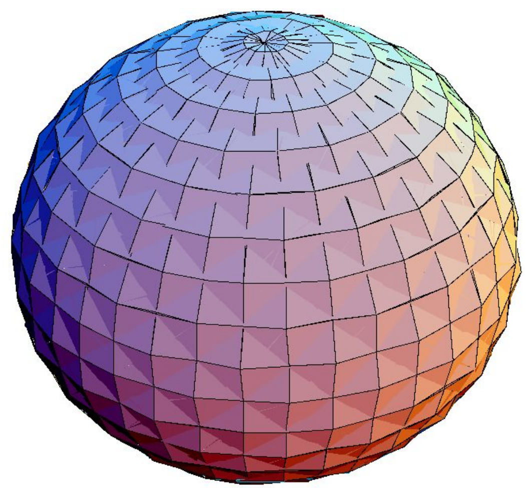
- уравнение окружности радиуса **r**.

Для параметрического задания **поверхности S** необходимы два параметра – **u** и **v** :

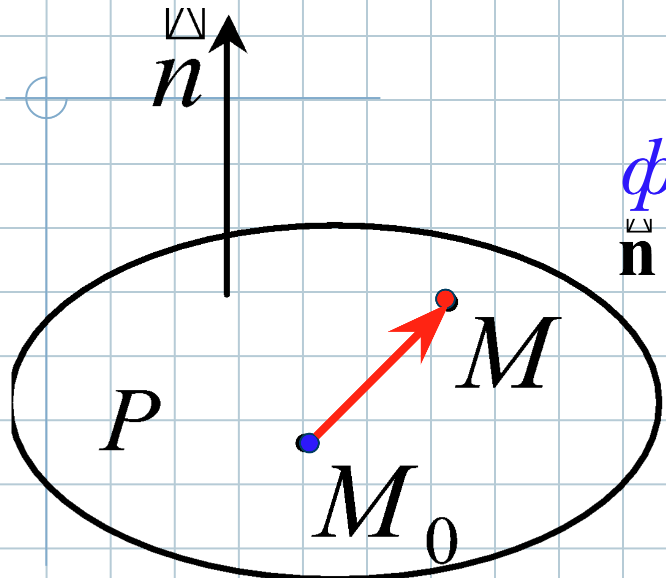
$$S:\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

**Пример.** *Уравнение сферы радиуса R:*

$$S:\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$$



# 2. Плоскость в пространстве.




$\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ $, M_0 \in P$

*фиксированная* точка плоскости.

$\vec{\mathbf{n}} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$- *нормальный вектор* плоскости.

$\mathbf{M(x, y, z)}$ $, M \in P$

*произвольная* точка плоскости.

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{M_0 M}} \perp \vec{\mathbf{n}}$$

$$\Downarrow$$

**(1)** $\boxed{\left(\overrightarrow{M_0 M}, \vec{n}\right) = 0}$ - ***векторное уравнение плоскости.***

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0); \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$(2) \quad \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

- ***уравнение плоскости***, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$(3) \quad \boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

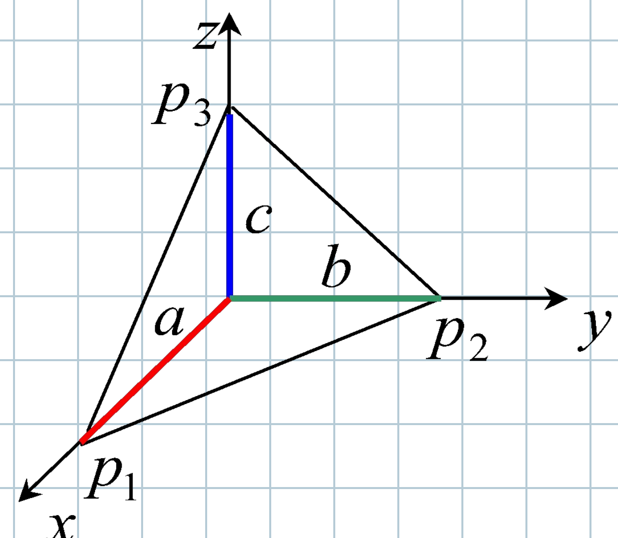
- ***общее уравнение плоскости.***

$$(4)\quad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}\qquad a=-\frac{D}{A},\; b=-\frac{D}{B},\; c=-\frac{D}{C}$$

- *уравнение плоскости* ***«в отрезках».***

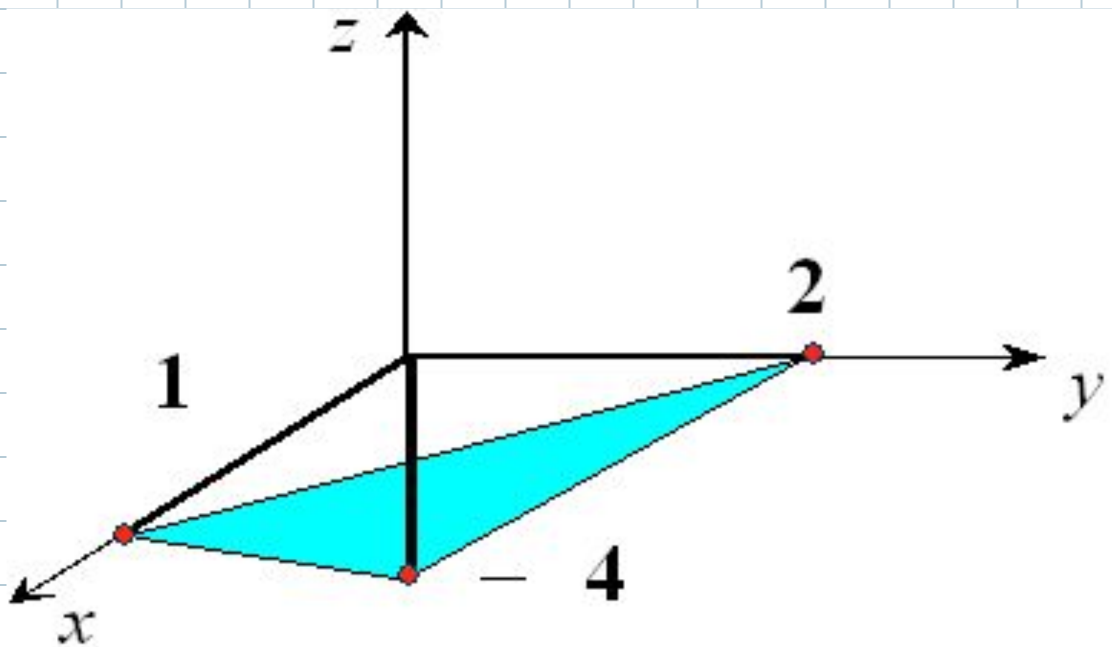
Здесь $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$ – точки пересечения плоскости с координатными осями,

**a, b, c** - ***«отрезки»,*** отсекаемые плоскостью на координатных осях.



**Пример.**

$$4x+2y-z=4 \Longrightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-4}=1$$



# Угол между двумя плоскостями .

Рассмотрим

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\boxed{\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

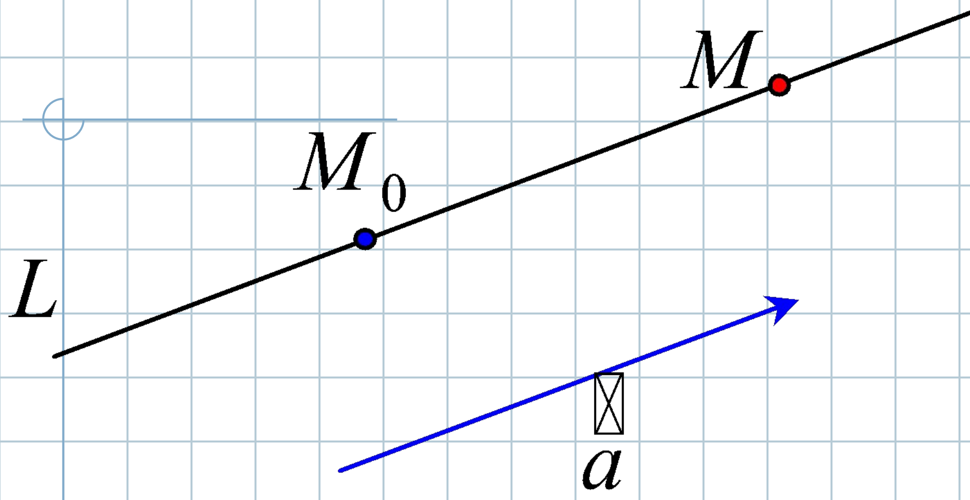
## Условие перпендикулярности двух плоскостей.

$$\boxed{P_1 \perp P_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

## Условие параллельности двух плоскостей.

$$\boxed{P_1 \parallel P_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

# 3. Прямая в пространстве.




$M_0(x_0, y_0, z_0)$ -*фиксированная* точка прямой $, M_0 \in L$

$\vec{a} = (l, m, n)$ - *направляющий вектор* прямой $, \vec{a} \parallel L$

$M(x, y, z)$ - *произвольная* точка прямой

$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}}$ (1)

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\} \rightarrow$$

(1) - *векторное уравнение прямой.*

$$(2) \quad \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} \parallel \vec{\mathbf{a}}}$$

- *канонические уравнения прямой.*

$$(3) \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}}$$

- *параметрические уравнения прямой.*

$$(4)\quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- ***общие уравнения прямой.***

Эти уравнения определяют прямую как линию пересечения двух не параллельных плоскостей .

# Угол между двумя прямыми

$$\cos\alpha = \frac{\left|\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)\right|}{\left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right|}$$

Если

$\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ – *направляющие векторы прямых* $L_1$ *и* $L_2$, *то угол межу прямыми равен*

$$\cos\alpha = \frac{\left|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

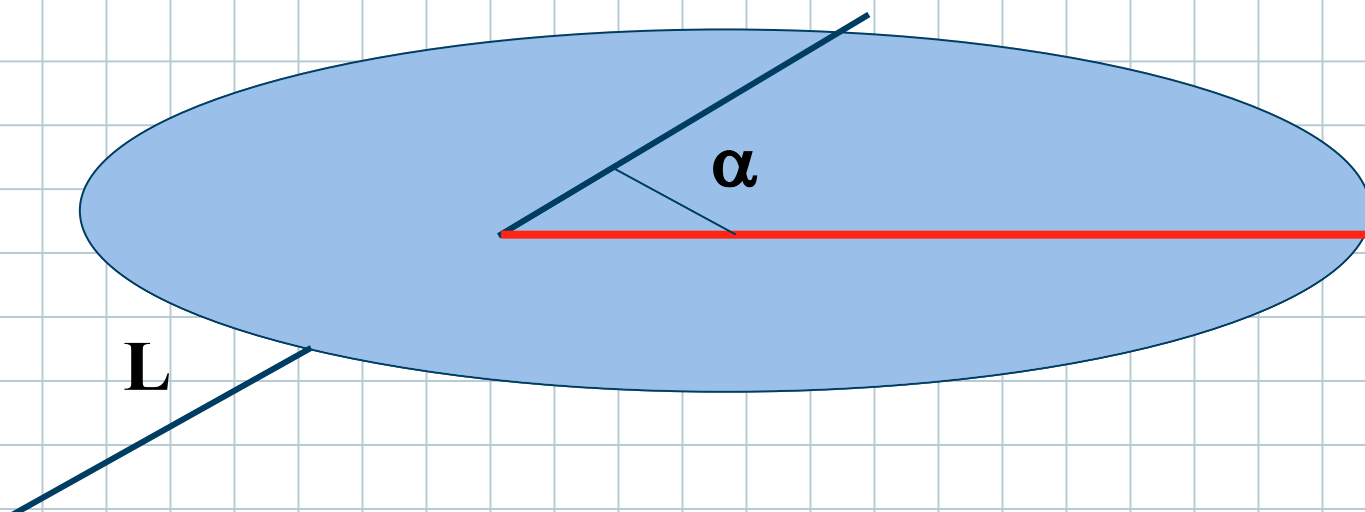
# Угол между прямой и плоскостью.

Пусть

$\vec{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости .

$\vec{a} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой .

$$\sin\alpha = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



## Условие параллельности двух прямых.

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

## Условие перпендикулярности двух прямых.

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

## *Условие параллельности прямой и плоскости.*

$$L \parallel P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{Al + Bm + Cn = 0}$$

## *Условие перпендикулярности прямой и плоскости.*

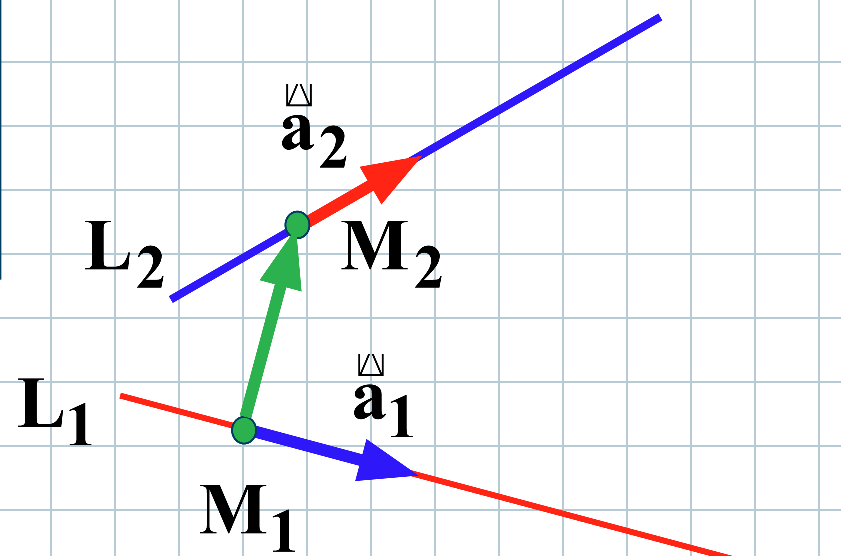
$$L \perp P \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}}$$

# ***Условие скрещиваемости двух прямых.***

Две прямые называются ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости.

Если $\mathbf{M_1 \in L_1,\ M_2 \in L_2,\ L_1 \not\parallel L_2}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}\,\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{1}}\,\overrightarrow{\mathbf{a_2}} \neq \mathbf{0}}$$



# МКТ 7

1. Записать координаты нормального вектора плоскости

$$2x + 4y - 3z + 6 = 0.$$

2. Какое произведение векторов использовано в условии ортогональности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Какой объект описывает система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

4. Указать взаимное расположение плоскостей

**$2x+y-z+5=0$, $x-2y-1=0$.**