

# Курс высшей математики

## Часть 1

УГТУ-УПИ  
2004г.

# Лекция 5

## Аналитическая геометрия

1. Аналитическое представление линии и поверхности в пространстве .
2. Плоскость в пространстве.
3. Прямая в пространстве.

1.

## Аналитическое представление линии и поверхности в пространстве.

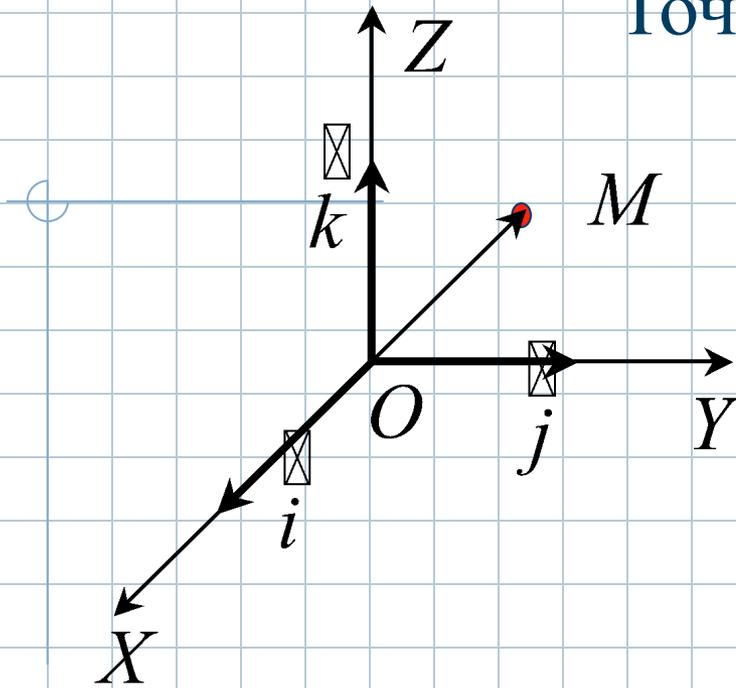
Задачей аналитической геометрии является изучение геометрических объектов аналитическими методами, то есть средствами алгебры и математического анализа, без геометрических построений.

*Геометрические объекты:* точка, линия, поверхность, тело.

В основе аналитической геометрии лежит **метод координат**, позволяющий описывать положение точки в пространстве с помощью чисел (координат точки), что и обеспечивает возможность привлечения методов алгебры и анализа.

Из всех используемых при этом систем координат наиболее часто применяется **декартова система** — совокупность точки  $O$  и ортонормированного базиса  $\{\overset{\boxtimes}{i}, \overset{\boxtimes}{j}, \overset{\boxtimes}{k}\}$ ,  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  - **координатные оси**.

Точку М можно задать вектором



$$\vec{r}_M \equiv \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{r}_M = (x, y, z)$$

Декартовыми координатами точки М называются декартовы координаты её радиус-вектора

$$\vec{r}_M = (x, y, z) \Rightarrow M(x, y, z)$$



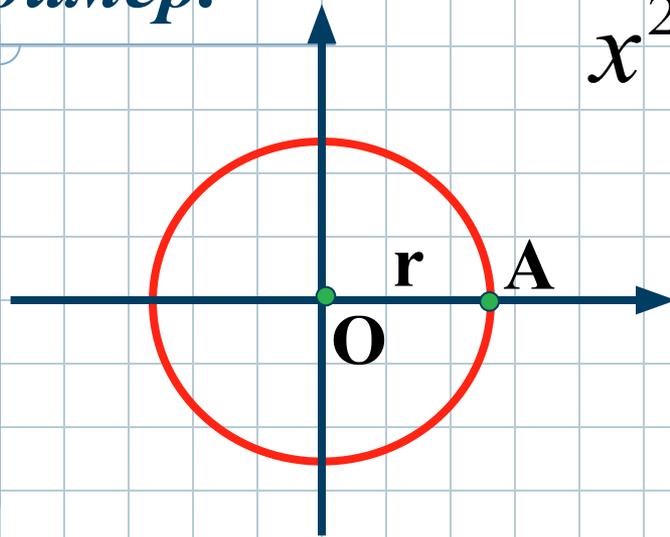
Более *сложные* геометрические объекты задаются *уравнениями* (или неравенствами), связывающими координаты точек, образующих эти объекты.

## Линия на плоскости .

Уравнение вида  $\Phi(x,y) = 0$  называется уравнением линии  $L$  на плоскости, если ему удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  любой точки  $M(x,y)$  лежащей на этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки не лежащей на этой линии.

Линия **L** - *геометрическое место* точек,  
удовлетворяющих уравнению  $\Phi(x,y)=0$ .

*Пример.*



$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$A(r,0) \in L$$

$$O(0,0) \notin L$$

## Поверхность в пространстве .

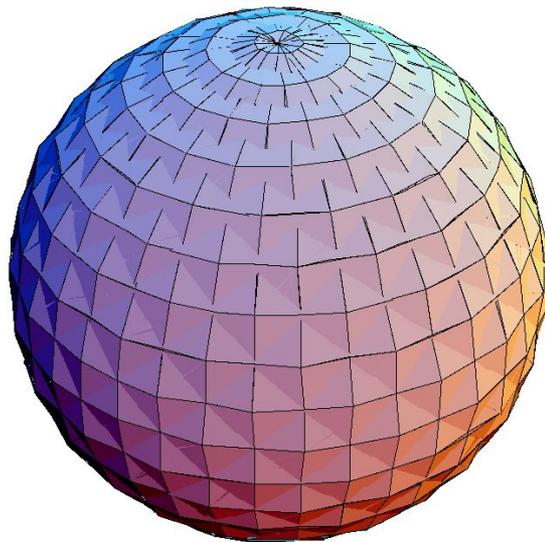
Пусть  $S$  - некоторая поверхность.

Уравнение вида  $\Phi(x,y,z)=0$  называется уравнением этой поверхности, если ему удовлетворяют координаты любой точки  $M(x,y,z)$  лежащей на этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой поверхности.

Поверхность  $S$  - *геометрическое место*  
точек, координаты которых удовлетворяют  
уравнению  $\Phi(x,y,z)=0$ .

*Пример:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$



## *Линия в пространстве .*



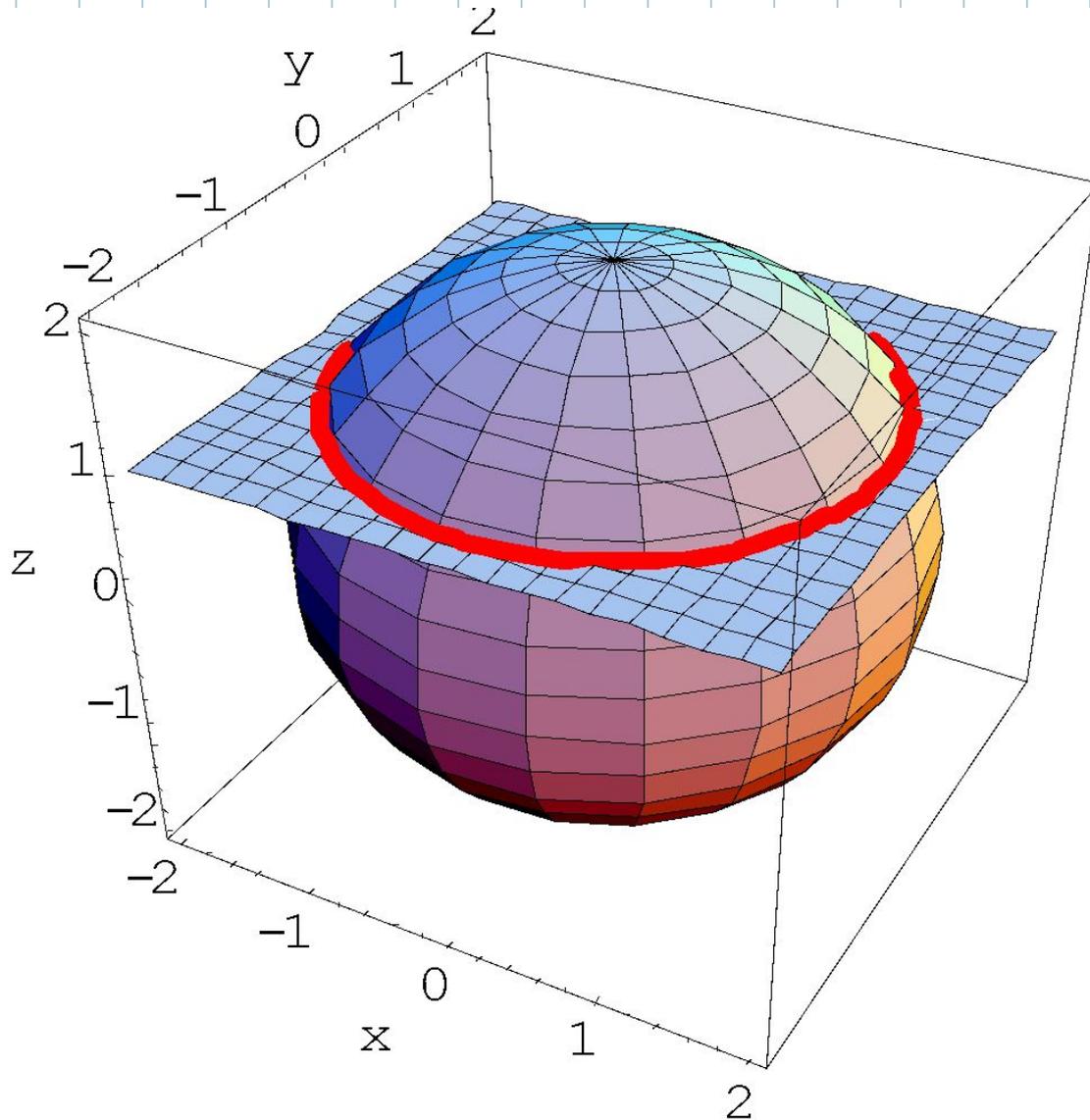
Кривую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, то есть как геометрическое место точек, принадлежащих обеим поверхностям.

Следовательно, координаты этих точек должны удовлетворять системе уравнений :

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

(Здесь  $\Phi_1(x, y, z) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, z) = 0$  – уравнения пересекающихся поверхностей).

*Пример. Окружность – линия пересечения сферы и плоскости:*



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1 \end{cases}$$

# Параметрические уравнения линии и поверхности.

При параметрическом задании линии  $L$ , её можно рассматривать как траекторию движения точки

$M(x,y,z)$ :

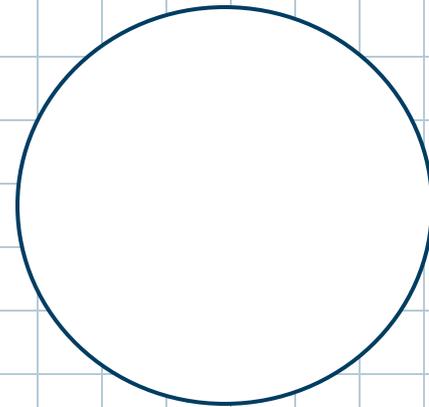
$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t - \text{параметр, играющий роль времени.}$$

Уравнения задают положение точки в каждый момент времени.

*Пример:*

$$\text{L} : \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\text{L} : \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$



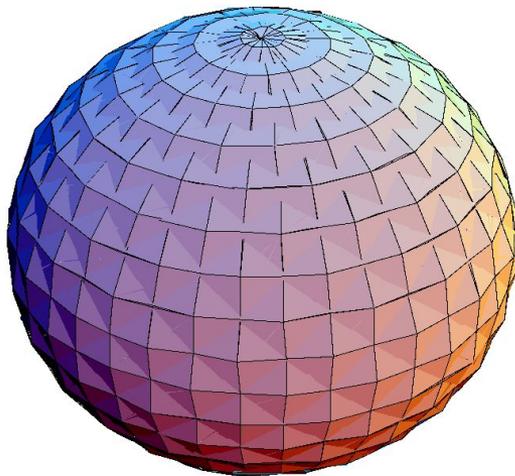
- уравнение окружности радиуса  $r$ .

Для параметрического задания поверхности  $S$  необходимы два параметра –  $u$  и  $v$  :

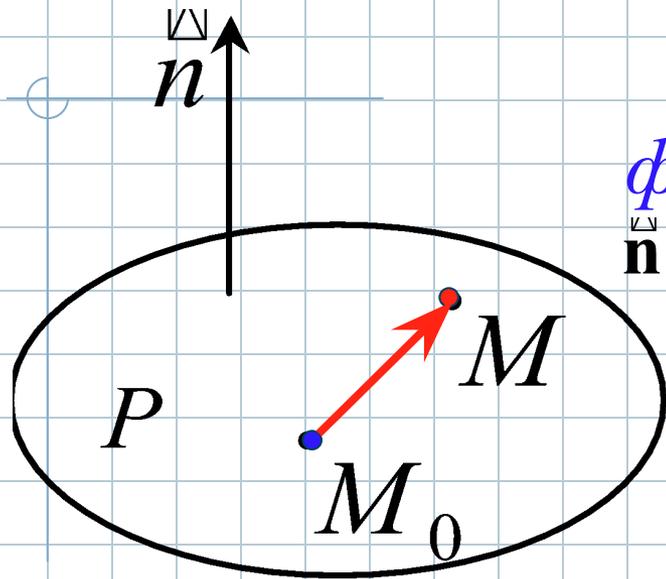
$$S : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

*Пример. Уравнение сферы радиуса  $R$ :*

$$\varphi: \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R \cos \theta. \end{cases}$$



## 2. Плоскость в пространстве.



$$M_0(x_0, y_0, z_0), M_0 \in P$$

*фиксированная* точка плоскости.

$\vec{n} = (A, B, C)$  - *нормальный вектор* плоскости.

$$M(x, y, z), M \in P$$

*произвольная* точка плоскости.

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

(1)  $\boxed{(M_0M, \vec{n}) = 0}$

- *векторное уравнение* плоскости.

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0); \quad \vec{n} = (A, B, C)$$



$$(2) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- *уравнение плоскости*, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$ .



$$(3) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

- *общее уравнение плоскости.*

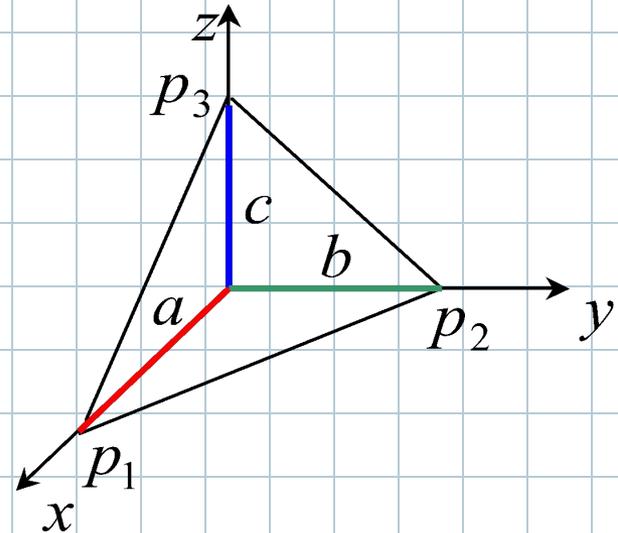
(4)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

- уравнение плоскости «в отрезках».

Здесь  $P_1(a,0,0)$ ,  $P_2(0,b,0)$ ,  $P_3(0,0,c)$  – точки пересечения плоскости с координатными осями,  $a, b, c$  - «отрезки», отсекаемые плоскостью на координатных осях.

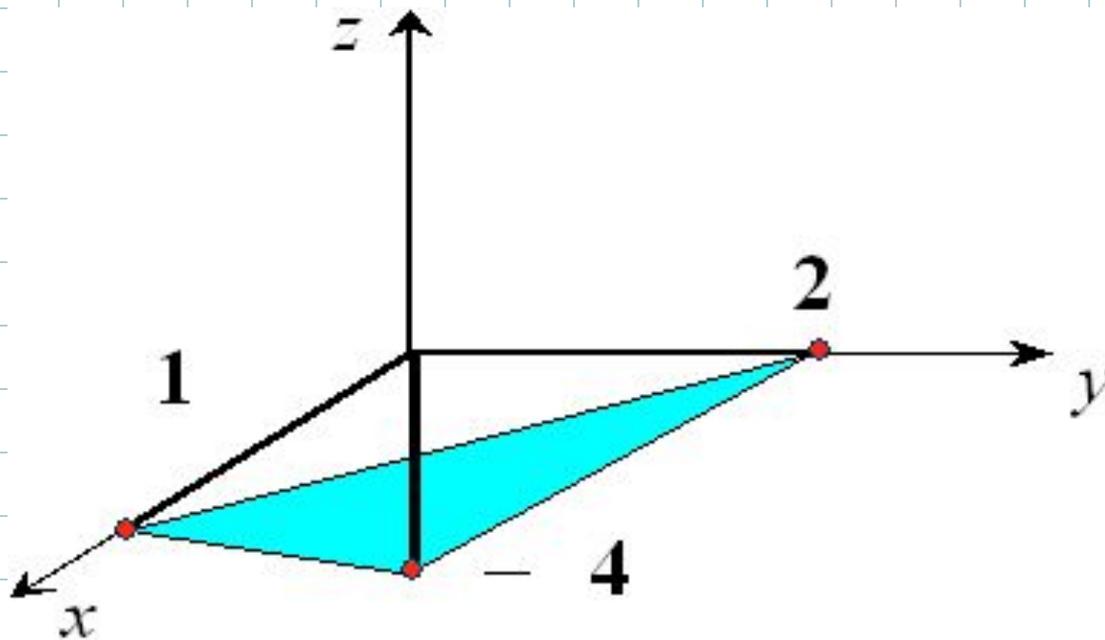


*Пример.*

$$4x + 2y - z = 4$$



$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-4} = 1$$



## Угол между двумя плоскостями.

Рассмотрим

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

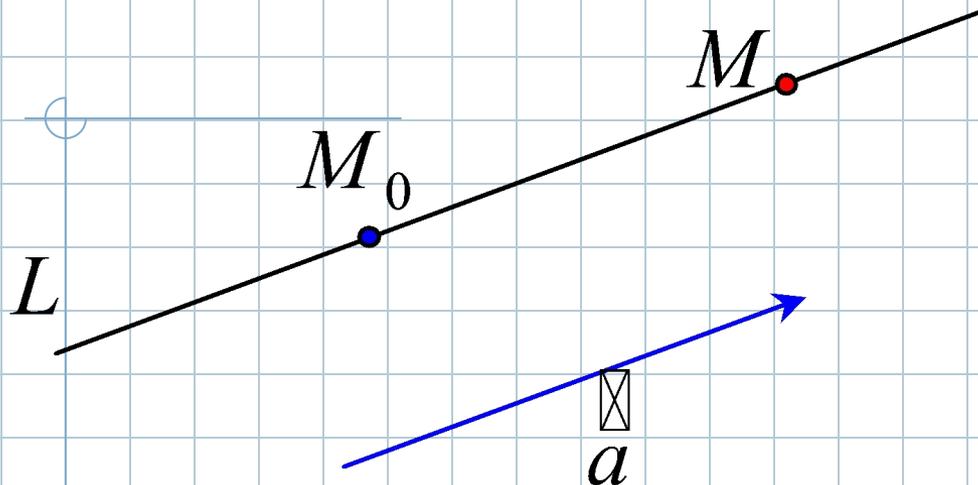
## Условие перпендикулярности двух плоскостей.

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

## Условие параллельности двух плоскостей.

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

### 3. Прямая в пространстве.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$  - *фиксированная* точка прямой,  $M_0 \in L$

$\vec{a} = (l, m, n)$  - *направляющий вектор* прямой,  $\vec{a} \parallel L$

$M(x, y, z)$  - *произвольная* точка прямой

$$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$$



$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$$

(1)

(1) - *векторное уравнение прямой.*

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\} \rightarrow$$

$$(2) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \iff \overline{M_0M} \parallel \vec{a}$$

- *канонические уравнения прямой.*

$$(3) \quad \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

- *параметрические уравнения прямой.*

(4)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- *общие уравнения прямой.*

Эти уравнения определяют прямую как линию пересечения двух не параллельных плоскостей .

# Угол между двумя прямыми

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \right|}{|a_1| \cdot |a_2|}$$

Если

$a_1 \in (l_1, m_1, n_1)$  и  $a_2 \in (l_2, m_2, n_2)$  — направляющие векторы  
прямых  $L_1$  и  $L_2$ , то угол между прямыми равен

$$\cos \alpha = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

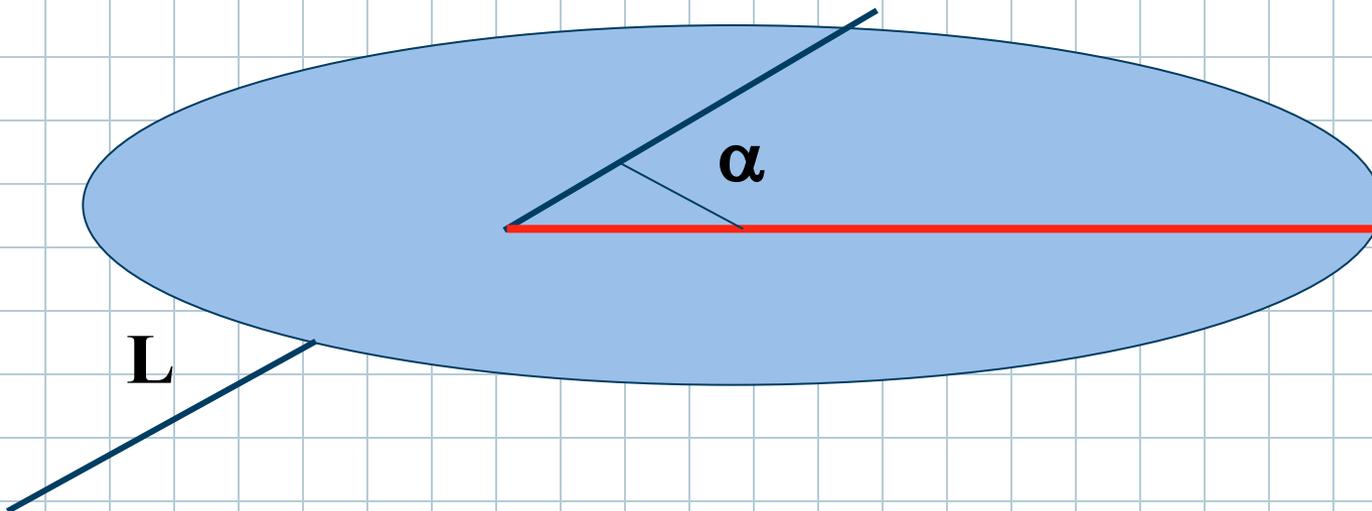
## Угол между прямой и плоскостью.

Пусть

⊗ нормальный вектор плоскости .

⊗ направляющий вектор прямой .

$$\sin \alpha = \frac{|A l + B m + C n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



## Условие параллельности двух прямых.

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

## Условие перпендикулярности двух прямых.

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

## Условие параллельности прямой и плоскости.

$$L \parallel P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{A l + B m + C n = 0}$$

## Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

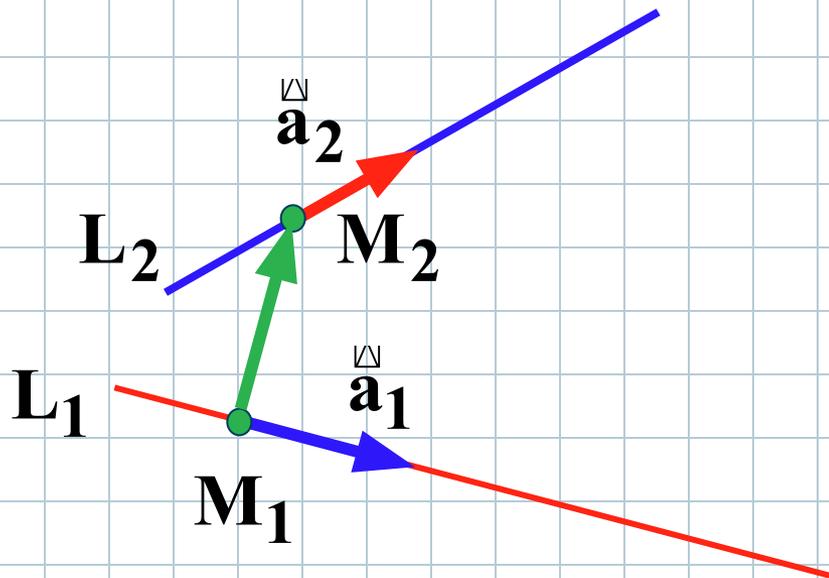
$$L \perp P \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}}$$

## Условие скрещиваемости двух прямых.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Если  $M_1 \in L_1$ ,  $M_2 \in L_2$ ,  $L_1 \not\parallel L_2$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \neq 0$$



# МКТ 7

1. Записать координаты нормального вектора плоскости

$$2x + 4y - 3z + 6 = 0.$$

2. Какое произведение векторов использовано в условии ортогональности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Какой объект описывает система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

4. Указать взаимное расположение плоскостей

$$2x + y - z + 5 = 0, \quad x - 2y - 1 = 0.$$