Курс высшей математики

Часть 1

УГТУ-УПИ
2004г.

Лекция 5

Аналитическая геометрия

1. **Аналитическое представление линии и поверхности в пространстве .**

2. **Плоскость в пространстве.**

3. **Прямая в пространстве.**

1. Аналитическое представление линии и поверхности в пространстве.

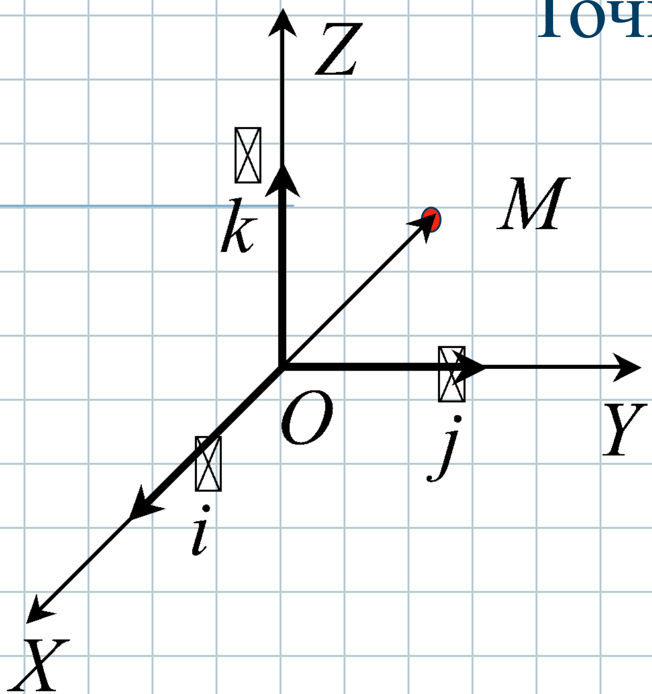
Задачей аналитической геометрии является изучение геометрических объектов аналитическими методами, то есть средствами алгебры и математического анализа, без геометрических построений.

***Геометрические объекты*: ** точка,линия,поверхность, тело.

В основе аналитической геометрии лежит **метод координат** , позволяющий описывать положение точки в пространстве с помощью чисел (координат точки), что и обеспечивает возможность привлечения методов алгебры и анализа **.**

Из всех используемых при этом систем координат наиболее часто применяется ***декартова система*** – совокупность точки O и ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, **OX, OY, OZ** **-** ***координатные оси.***

Точку М можно задать вектором



$$\vec{r}_M \equiv \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{r}_M = (x, y, z)$$

Декартовыми координатами точки **М** называются декартовы координаты её радиус-вектора

$$\vec{r}_M = (x, y, z) \Rightarrow M(x, y, z)$$

Более ***сложные*** геометрические объекты задаются ***уравнениями*** (или неравенствами), связывающими координаты точек, образующих эти объекты.

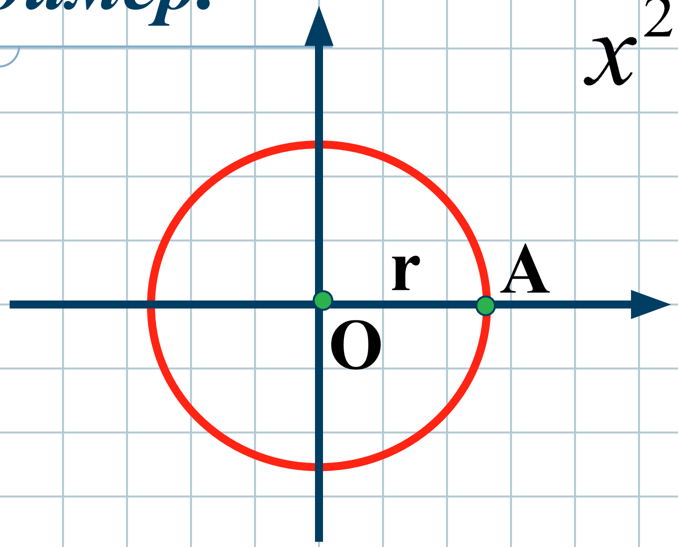
Линия на плоскости .

Уравнение вида **Ф(x,y) = 0** называется уравнением линии **L** на плоскости, если ему удовлетворяют координаты ***x*** и ***y*** любой точки **M(*x,y*)** лежащей на этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки не лежащей на этой линии.

-

Линия **L** - ***геометрическое место*** точек, удовлетворяющих уравнению **Ф(*x*,*y*)=0**.

Пример.



$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

A(r,0) ∈ L

O(0,0) ∉ L

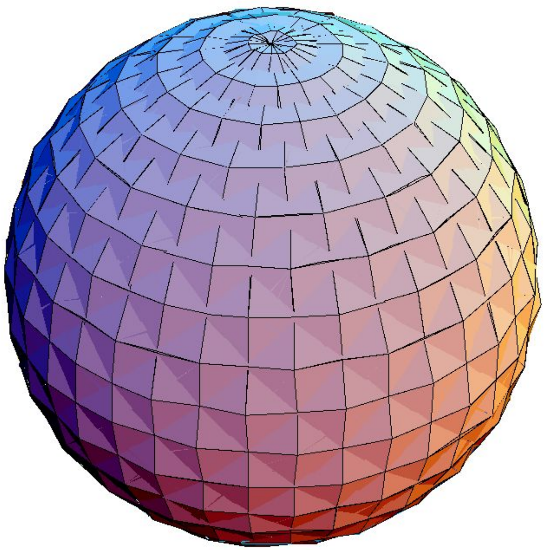
Поверхность в пространстве .

Пусть S - некоторая поверхность.

Уравнение вида **Ф(*x*,*y*,*z*)=0** называется уравнением этой поверхности,если ему удовлетворяют координаты любой точки ***M(x,y,z)*** лежащей на этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой поверхности.

Поверхность **S** - ***геометрическое место*** точек, координаты которых удовлетворяют уравнению **Ф*(x,y,z)*=0**.

Пример: $$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$



Линия в пространстве .

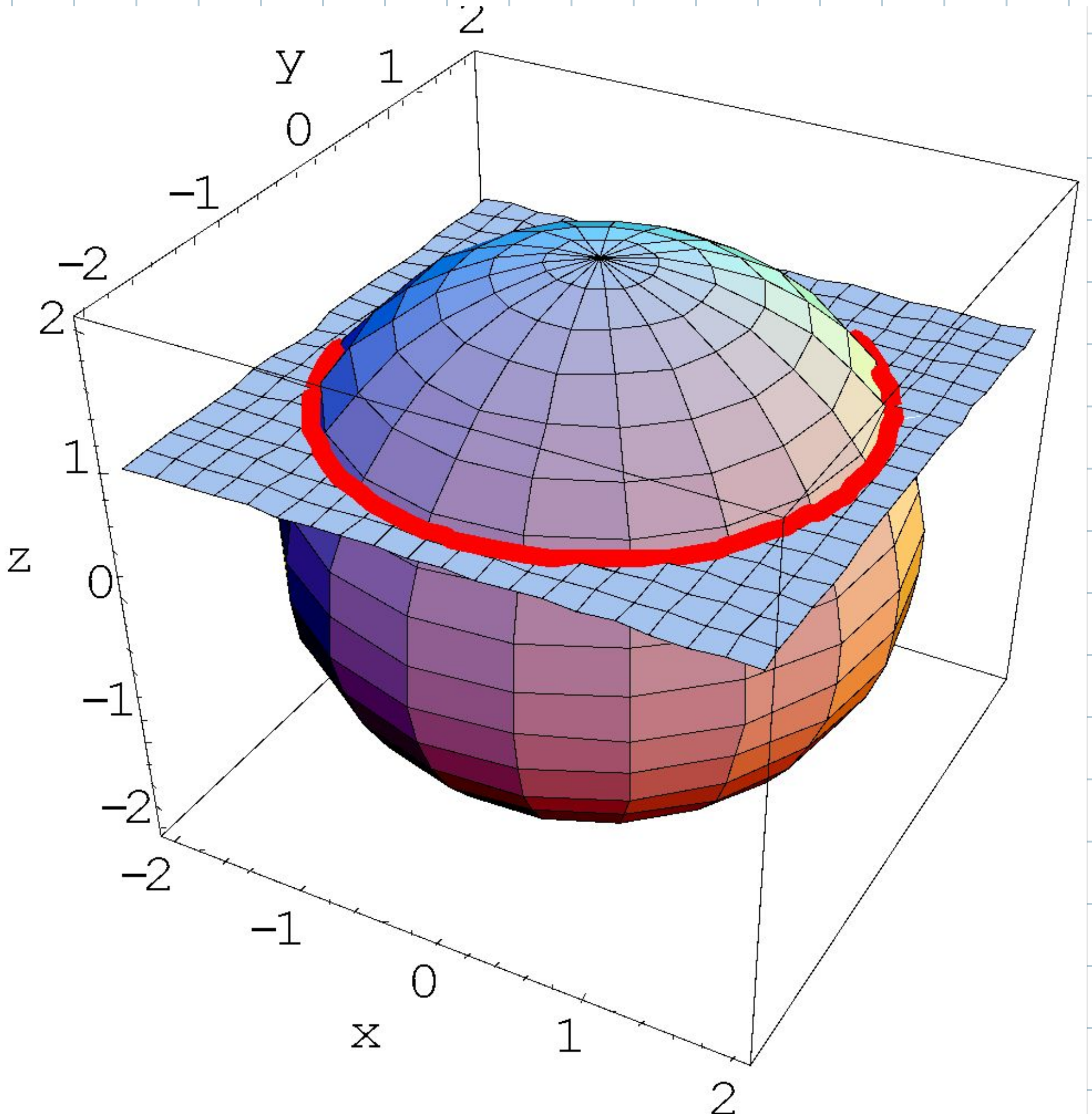
Кривую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, то есть как геометрическое место точек, принадлежащих обеим поверхностям.

Следовательно, координаты этих точек должны удовлетворять системе уравнений :

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

(Здесь **Φ_1*(x,y,z)*=0** и **Φ_2*(x,y,z)*=0** – уравнения пересекающихся поверхностей).

Пример. *Окружность – линия пересечения сферы и плоскости*:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1 \end{cases}$$

Параметрические уравнения линии и поверхности .

При параметрическом задании линии L, её можно рассматривать как траекторию движения точки **M(*x*,*y*,*z*):**

$$\mathbf{L}:\begin{cases}\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{t})\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{t})\\ \mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{t})\end{cases}$$

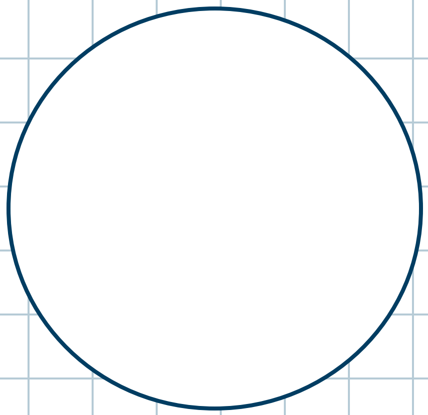
*, **t** – параметр, играющий роль времени.*

Уравнения задают положение точки в каждый момент времени.

Пример:

$$L: \begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0\,, \end{cases} \Longrightarrow$$



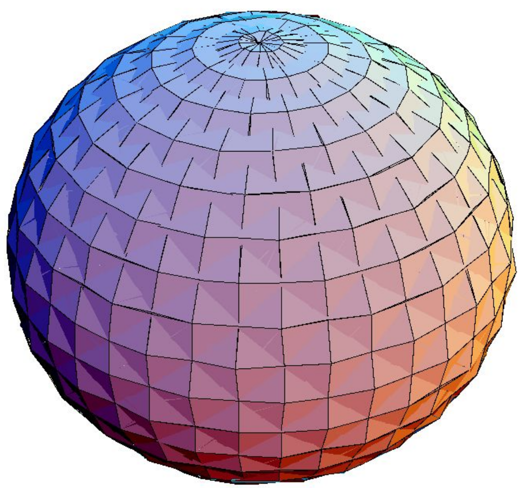
- уравнение окружности радиуса **r**.

Для параметрического задания **поверхности S** необходимы два параметра – **u** и **v** :

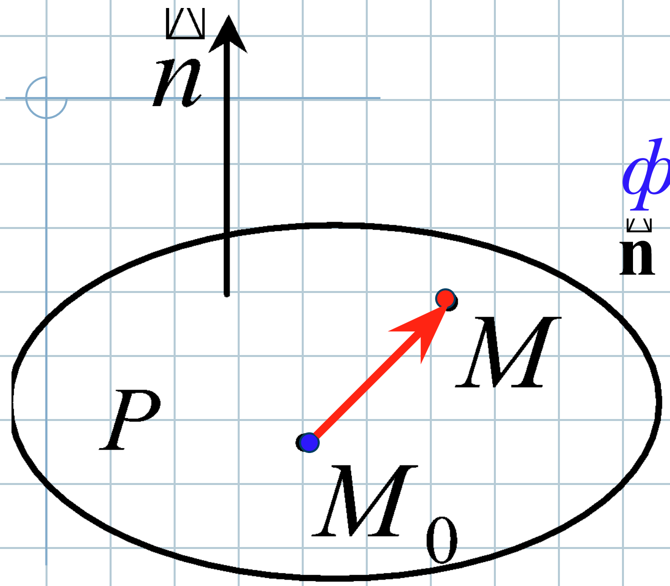
$$S : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Пример. *Уравнение сферы радиуса R:*

$$S:\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$$



2. Плоскость в пространстве.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$ $, M_0 \in P$

фиксированная точка плоскости.

$\vec{n} = (A, B, C)$ - *нормальный вектор* плоскости.

$M(x, y, z)$ $, M \in P$

произвольная точка плоскости.

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$(1) \quad \boxed{\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0}$$

- ***векторное уравнение плоскости.***

$$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0); \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$\Rightarrow$

(2) $$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

- ***уравнение плоскости***, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$\Rightarrow$

(3) $$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

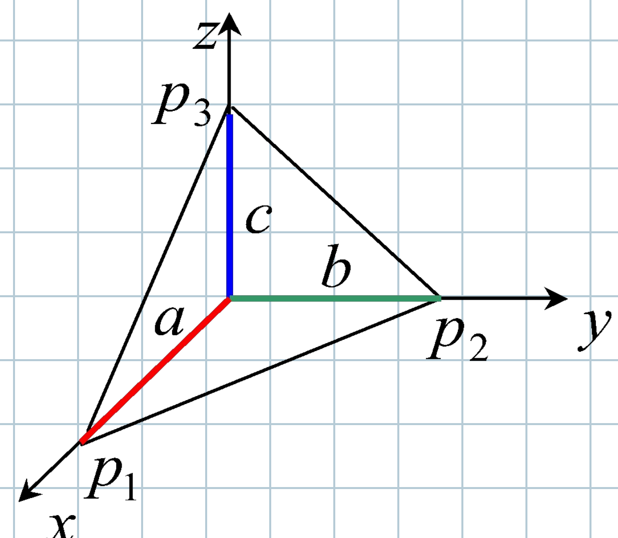
- ***общее уравнение плоскости.***

$$(4)\qquad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1} \qquad a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}$$

- *уравнение плоскости «в отрезках».*

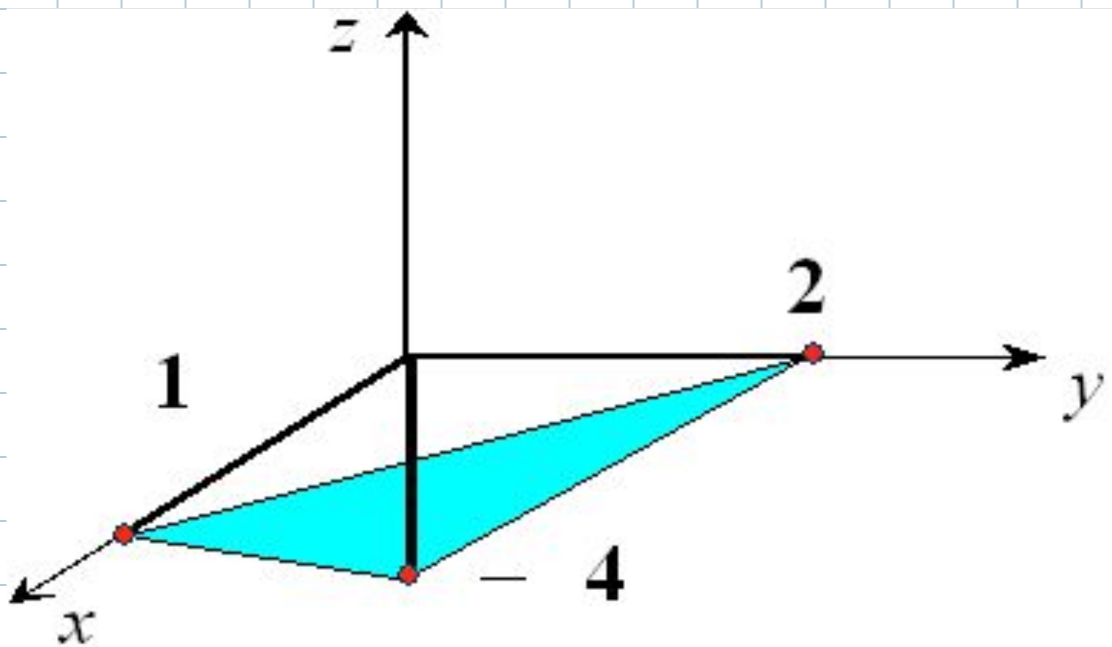
Здесь $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$ – точки пересечения плоскости с координатными осями,

a, b, c - *«отрезки»,* отсекаемые плоскостью на координатных осях.



Пример.

$$4x + 2y - z = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-4} = 1$$



Угол между двумя плоскостями .

Рассмотрим

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

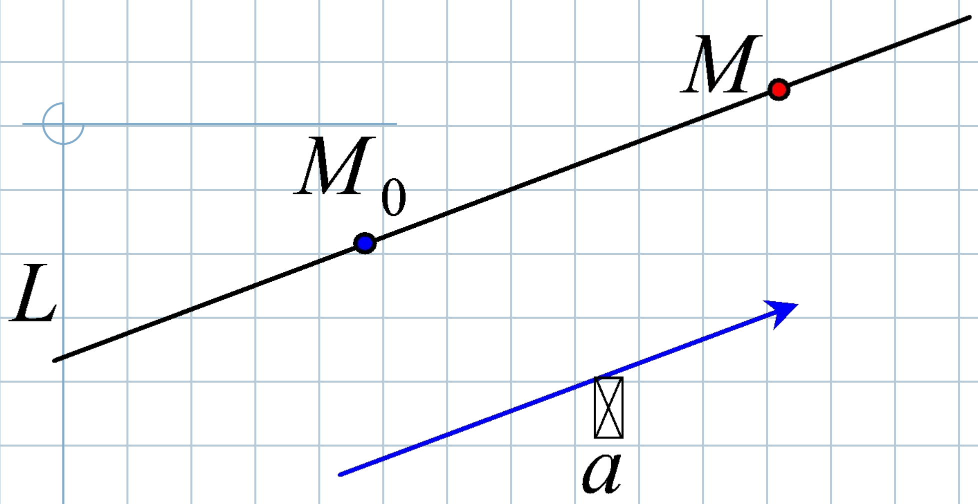
Условие перпендикулярности двух плоскостей.

$$\boxed{P_1 \perp P_2} \Leftrightarrow \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

Условие параллельности двух плоскостей.

$$\boxed{P_1 \parallel P_2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

3. Прямая в пространстве.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$ -*фиксированная* точка прямой $, M_0 \in L$

$\vec{a} = (l, m, n)$ - *направляющий вектор* прямой $, \vec{a} \parallel L$

$M(x, y, z)$ - *произвольная* точка прямой

$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}}$ (1)

(1) - ***векторное*** ***уравнение прямой.***

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\} \rightarrow$$

(2) $$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} \parallel \vec{\mathbf{a}}}$$

- ***канонические*** ***уравнения прямой.***

(3) $$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}}$$

- ***параметрические*** ***уравнения прямой.***

(4) $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- ***общие уравнения прямой.***

Эти уравнения определяют прямую как линию пересечения двух не параллельных плоскостей .

Угол между двумя прямыми

$$\cos\alpha = \frac{\left|\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)\right|}{\left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right|}$$

Если

$\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ – *направляющие векторы*

прямых L_1 *и* L_2, *то угол межу прямыми равен*

$$\cos\alpha = \frac{\left|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

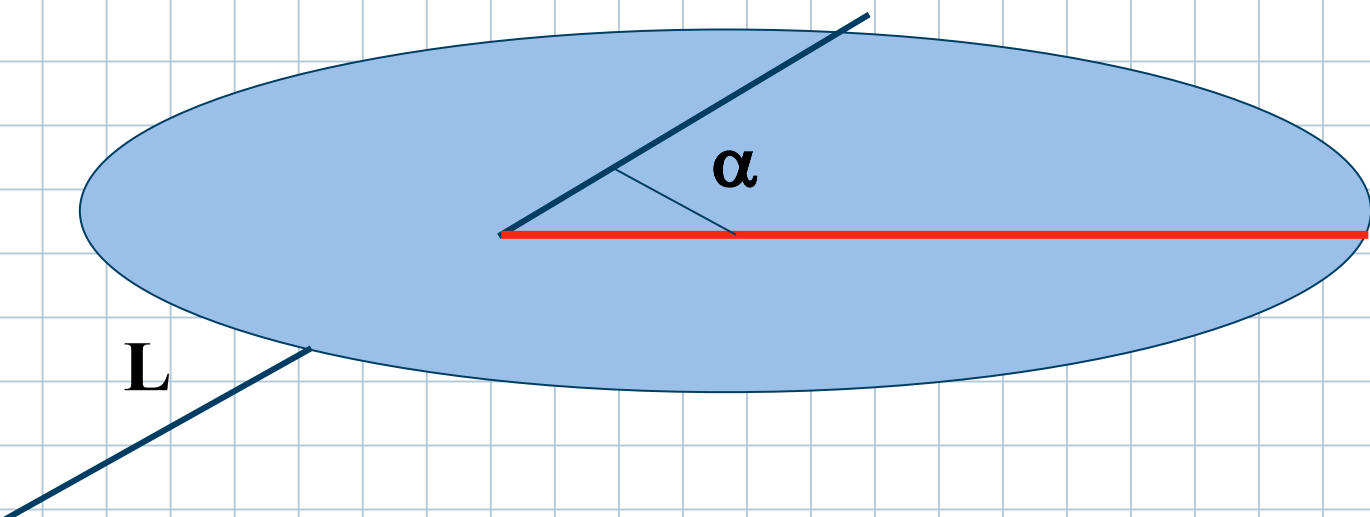
Угол между прямой и плоскостью.

Пусть

$\vec{n}=\{A,B,C\}$ – *нормальный вектор плоскости* .

$\vec{a}=\{l,m,n\}$ – *направляющий вектор прямой* .

$$\sin\alpha=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$



Условие параллельности двух прямых.

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Условие перпендикулярности двух прямых.

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

Условие параллельности прямой и плоскости.

$$L \parallel P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{Al + Bm + Cn = 0}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

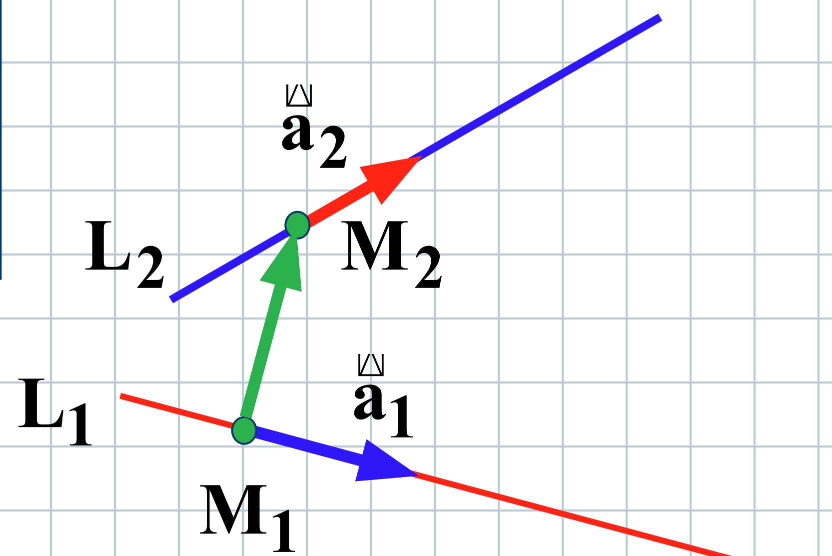
$$L \perp P \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}}$$

Условие скрещиваемости двух прямых.

Две прямые называются ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости.

Если $M_1 \in L_1,\ M_2 \in L_2,\ L_1 \nparallel L_2$

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2 \neq 0}$$



МКТ 7

1. Записать координаты нормального вектора плоскости

$$2x + 4y - 3z + 6 = 0.$$

2. Какое произведение векторов использовано в условии ортогональности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Какой объект описывает система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

4. Указать взаимное расположение плоскостей

2x+y-z+5=0, x-2y-1=0.