Логические задачи

Задача B15

Особенности решения

- Руководствоваться здравым смыслом при решении логических задач.
- Задание сложное, его невозможно формализовать, в каждом задании – свой путь решения

Основные знания по теме «Логика»

- **Базовые логические операции НЕ, И, ИЛИ**

A	не A
0	1
1	0

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

A	B	A или B
0	**0**	**0**
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Дополнительные логические операции**

Исключающее ИЛИ

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	1	0

Импликация

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	**0**	**0**
1	1	1

Эквивалентность

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	**0**	**1**
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

Основные знания по теме «Логика»

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0,\ A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A,\ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Основные знания по теме «Логика»

- **Замена операций**

  $\oplus \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

через И, ИЛИ и НЕ:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

- **Формулы де Моргана:**

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}, \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

- **Приоритет логических операций** :
  - вычисление в скобках
  - НЕ, И, ИЛИ, исключающее ИЛИ
  - импликация
  - эквивалентность

Примеры решения задач

I. Простая задача, решаемая с методом рассуждений:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L \vee M) \wedge (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

N-любое (0 или 1)

K	L	M	N
0	0	1	0(1)
0	1	0	0(1)
0	1	1	0(1)
1	0	0	0(1)
1	0	1	0(1)
1	1	0	0(1)
1	1	1	0(1)

Итого 7 x 2 = **14** решений

K-любое, L=0, M=0, N=1, всего **два** решения

K	L	M	N
0	0	0	1
1	0	0	1

Есть только одно совпадающее решение **K=1, L=0, M=0, N=1**

Сколько будет решений, если заменить $\wedge \to \vee$?

Примеры решения задач

II. Задача, решаемая с методом рассуждений:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_3) \wedge (X_3 \rightarrow X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_5) = 1$$

Все скобки должны быть равны **1**

Операция импликации дает только одно решение = 0, когда **1 → 0,**
то есть **нельзя**, чтобы после **1 был 0**

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	1	1
5	0	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1

Вывод:
Количество решений на единицу больше количества переменных (**6** реш.)

Если $X_1 \ldots X_{10}$, то количество решений будет равно **11**

Примеры решения задач

III. Задача, решаемая с помощью замены переменных:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((x_1 \equiv x_2) \lor (x_3 \equiv x_4)) \land (\neg(x_1 \equiv x_2) \lor \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1$$

$$((x_3 \equiv x_4) \lor (x_5 \equiv x_6)) \land (\neg(x_3 \equiv x_4) \lor \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1$$

$$((x_5 \equiv x_6) \lor (x_7 \equiv x_8)) \land (\neg(x_5 \equiv x_6) \lor \neg(x_7 \equiv x_8)) = 1$$

$$((x \equiv x) \lor (x \equiv x_1)) \land (\neg(x \equiv x) \lor \neg(x \equiv x))$$

Произведем замену:

Перепишем уравнения, заметим, что уравнения = 1, когда t1 ≠ t2

$$t_1 = (x_1 \equiv x_2)$$
$$t_2 = (x_3 \equiv x_4)$$
$$t_3 = (x_5 \equiv x_6)$$
$$t_4 = (x_7 \equiv x_8)$$
$$t_5 = (x_9 \equiv x_{10})$$

$$(t_1 \lor t_2) \land (\neg t_1 \lor \neg t_2) = 1$$

$$(t_2 \lor t_3) \land (\neg t_2 \lor \neg t_3) = 1$$

$$(t_3 \lor t_4) \land (\neg t_3 \lor \neg t_4)$$

Примеры решения задач

Поскольку значения переменных в скобках должны быть разными, они будут чередоваться:

$(t_1 \vee t_2) \wedge (\neg t_1 \vee \neg t_2) = 1$

$(t_2 \vee t_3) \wedge (\neg t_2 \vee \neg t_3) = 1$

$(t_3 \vee t_4) \wedge (\neg t_3 \vee \neg t_4) = 1$

$(t_4 \vee t_5) \wedge (\neg t_4 \vee \neg t_5) = 1$

Получим 2 решения:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

$t_1 = (x_1 \equiv x_2)$
$t_2 = (x_3 \equiv x_4)$
$t_3 = (x_5 \equiv x_6)$
$t_4 = (x_7 \equiv x_8)$
$t_5 = (x_9 \equiv x_{10})$

Для каждой комбинации из 5-ти значений $t_1 \dots t_5$ существует по 2 решения:

если $t_1 = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = 0$
или $x_1 = 0, x_2 = 1$

если $t_1 = 1$, то $x_1 = 1, x_2 = 1$
или $x_1 = 0, x_2 = 0$

То есть 2 варианта по 5 переменным дают $2^5=32$ решения, 32+32=64

Источники дополнительных сведений

- ФИПИ httpФИПИ http://ФИПИ http://wwwФИПИ http://www.ФИПИ http://www.fipiФИПИ http://www.fipi.ФИПИ http://www.fipi.ruФИПИ http://www.fipi.ru/ФИПИ http://www.fipi.ru/view
- Открытый сегмент ЕГЭ http://www.fipi.ru/view/sections/160/docs/
- КИМ ЕГЭ по информатике httpКИМ ЕГЭ по информатике http://КИМ ЕГЭ по