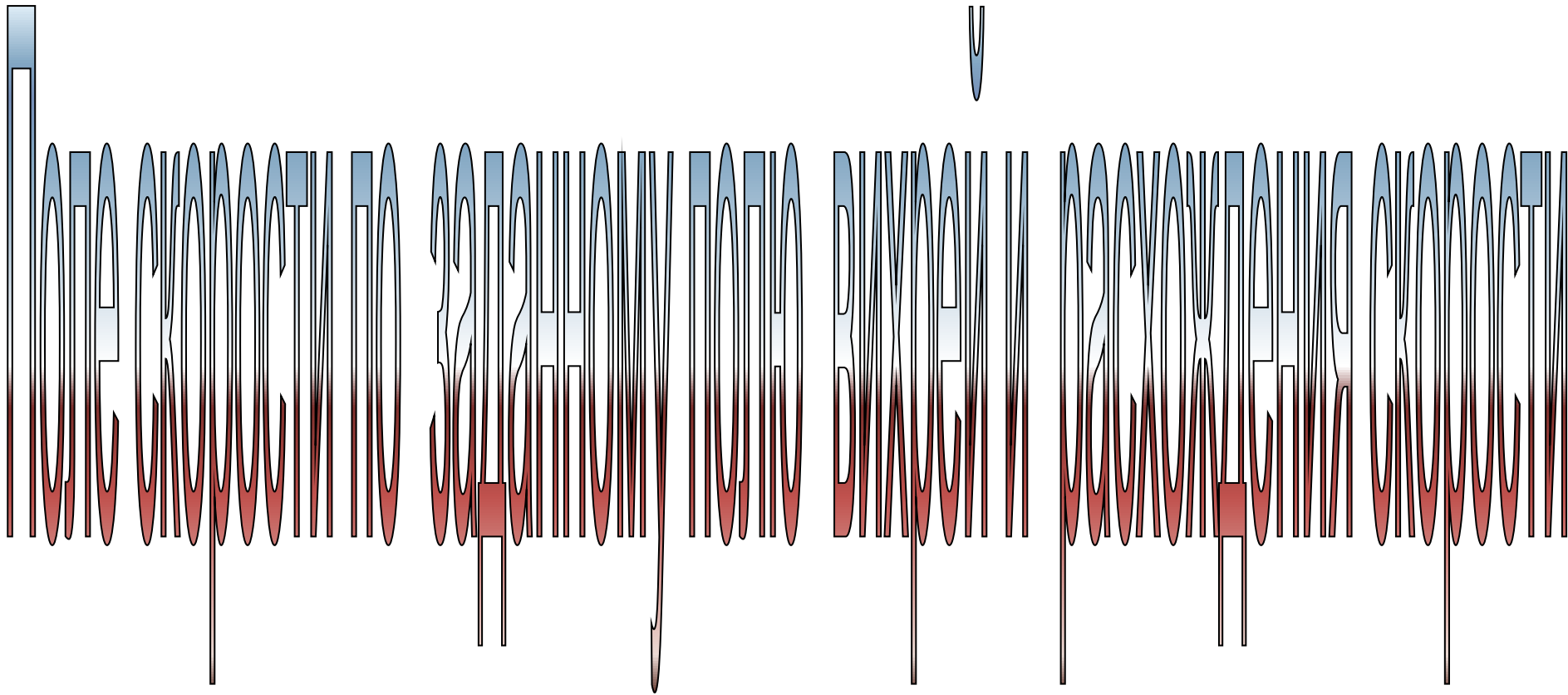


Эйлер, Ляпунов, Навье и Стокс



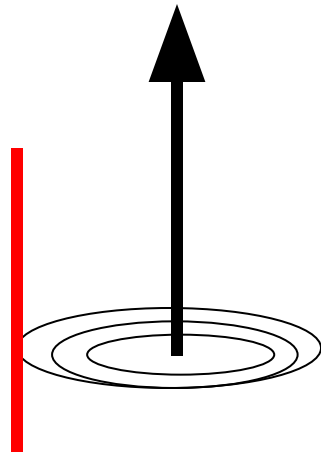
Компоненты ротора скорости:

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{u}$$

$$\Omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

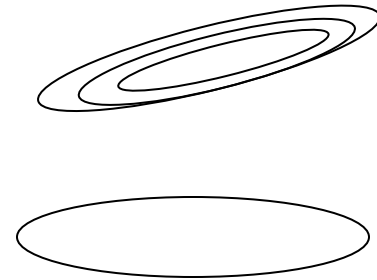


**Вихревые линии** - линии, направление которых совпадает всюду с мгновенной осью вращения жидкости.

# Дифференциальное уравнение вихревых линий

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$

Если через каждую точку малой замкнутой кривой провести соответствующую вихревую линию, то получим трубку, которая называется вихревой трубкой. Жидкость внутри трубки образует вихревую нить или просто вихрь.



# Задача

**Заданы распределения вихря и дивергенции скорости в любой точке жидкости, нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей данный объем жидкости**

# Предположения

1. Жидкость заполняет все пространство,
2. находится в покое на бесконечности.
3. Заданы вихрь скорости  $\Omega$  расхождение (дивергенция) скорости  $\Theta$ , равные 0 вне объема  $\tau$ .
4. Область  $\tau$  может быть разложена на конечное число частей, в которых  $\Theta$  и  $\Omega$  равномерно непрерывны, так же как и их частные производные.

5. На поверхностях разрыва нормальная составляющая  $\Omega$  остается непрерывной

Искомую скорость  $u$  будем рассматривать как сумму двух слагаемых: одно определяется расхождением скорости, и ее вихрь равен нулю, а второе – ротором скорости, а ее дивергенция равна нулю.

Скорость задается уравнениями:

$$\operatorname{div} u = \Theta \quad \operatorname{rot} u = \Omega$$

$$u = u_1 + u_2$$

существует

$$\operatorname{div} u_1 = \Theta \quad \operatorname{rot} u_1 = 0 \quad u_1 = \nabla \varphi$$

$$\operatorname{rot} u_2 = \Omega \quad \operatorname{div} u_2 = 0$$



Для определения  $u_1$  получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Theta$$

Предположим, что функция  $\Theta$  равна 0 всюду, кроме очень малой окрестности  $\tau_0$  начала координат, причем

$$\int_{\tau_0} \Theta d\tau = 1$$

По теореме Гаусса

$$\int_{\tau_0} \overset{\boxminus}{\nabla} u d\tau = \int_{S_0} u_n ds$$

Т.е. объемный интеграл от расхождения вектора скорости равен потоку вектора скорости через поверхность  $S_0$ , ограничивающую объем  $\tau_0$ . Поток должен равняться единице в силу предположения

$$\int_{\tau_0} \Theta d\tau = 1$$

Пусть  $\tau \rightarrow 0$ . Получаем картину течения от точечного источника в начале координат интенсивности 1. В силу симметрии потенциал скорости  $\varphi$  – функция только  $r$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\varphi$  всюду, кроме начала координат, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$\varphi$  – функция только  $r$ , в сферических координатах нет зависимости от широты и долготы.

$$\Delta\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0$$

Интегрируем:

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \text{Const}$$

Произвольная постоянная определяется из условия, что поток скорости через произвольную сферу с центром в начале координат равен 1. На сфере нормальная составляющая скорости имеет постоянное значение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Const}{r^2}$$

а площадь поверхности сферы равна  $4\pi r^2$

$$\Pi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} 4\pi r^2 = \frac{Const}{r^2} 4\pi r^2 = 1$$

Получаем:

$$Const = \frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r}$$

Произвольная постоянная не влияет на величину скорости течения и может быть отброшена

Предположим, что интенсивность источника имеет значение  $q$

$$\int_{\tau} \Theta d\tau = q$$

В этом случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \varphi = -\frac{q}{4\pi r} \quad u = \frac{q}{4\pi r^2}$$

**Если задано распределение источников**  
 **$\Theta(\xi, \eta, \zeta)$**

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r} d\tau$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

Где  $r$  расстояние от точки  $N(x, y, z)$ , где ищем поле скорости до точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$ , где расположен источник. Интегрировать надо по  $(\xi, \eta, \zeta)$ .



# Решение системы

$$\operatorname{div} u_1 = \Theta$$

$$\operatorname{rot} u_1 = 0$$

$$u_1 = \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau$$

Определим вектор  $u_2$  для системы

$$\operatorname{rot} u_2 = \Omega \quad \operatorname{div} u_2 = 0$$

Удовлетворим второму уравнению, если

положим  $u_2 = \operatorname{rot} A$

где  $A$  – векторный потенциал. Тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \Omega$$

Можно доказать тождество:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A$$

Получаем уравнение:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A = \Omega$$

$$\operatorname{div} A = 0 \quad (\text{Можно считать не нарушая общности})$$

$$\Delta A = -\Omega$$

$$\Delta A_x = -\Omega_x \quad \Delta A_y = -\Omega_y \quad \Delta A_z = -\Omega_z$$

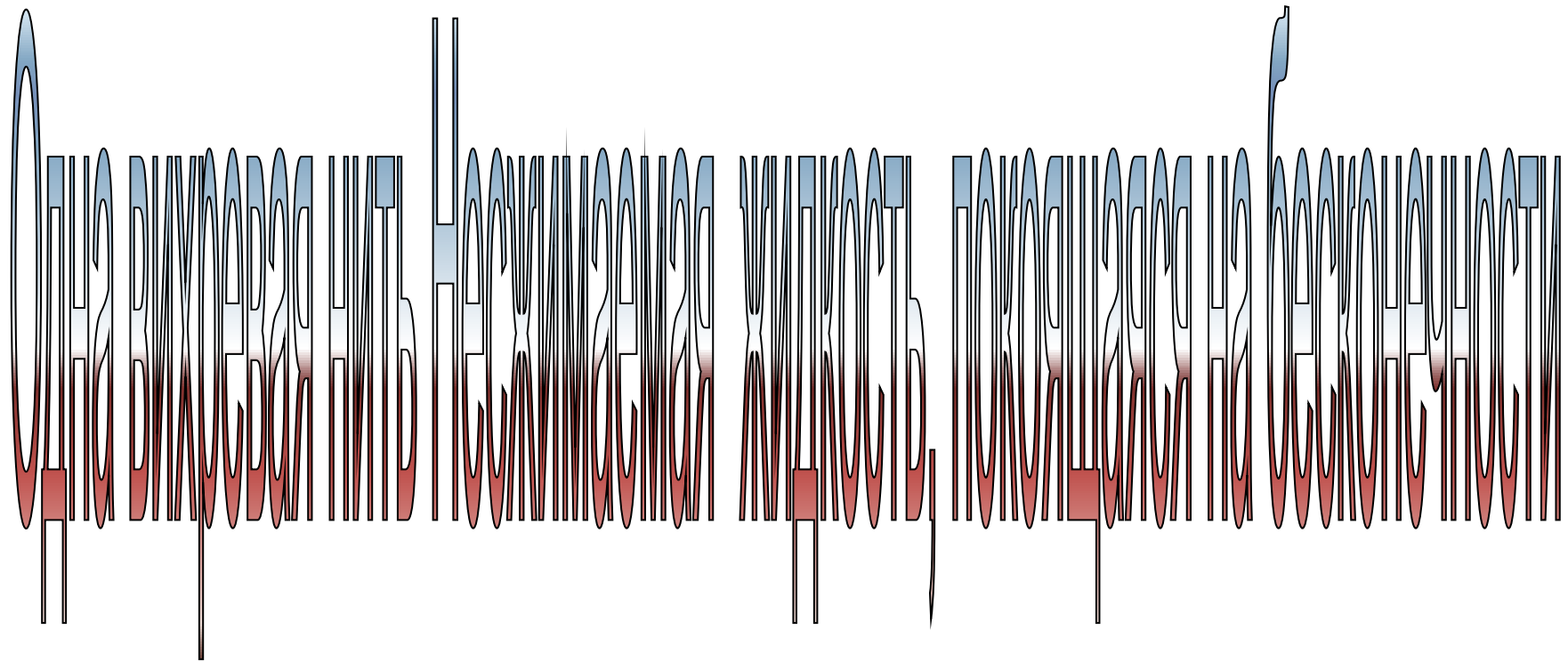
$$A(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau$$

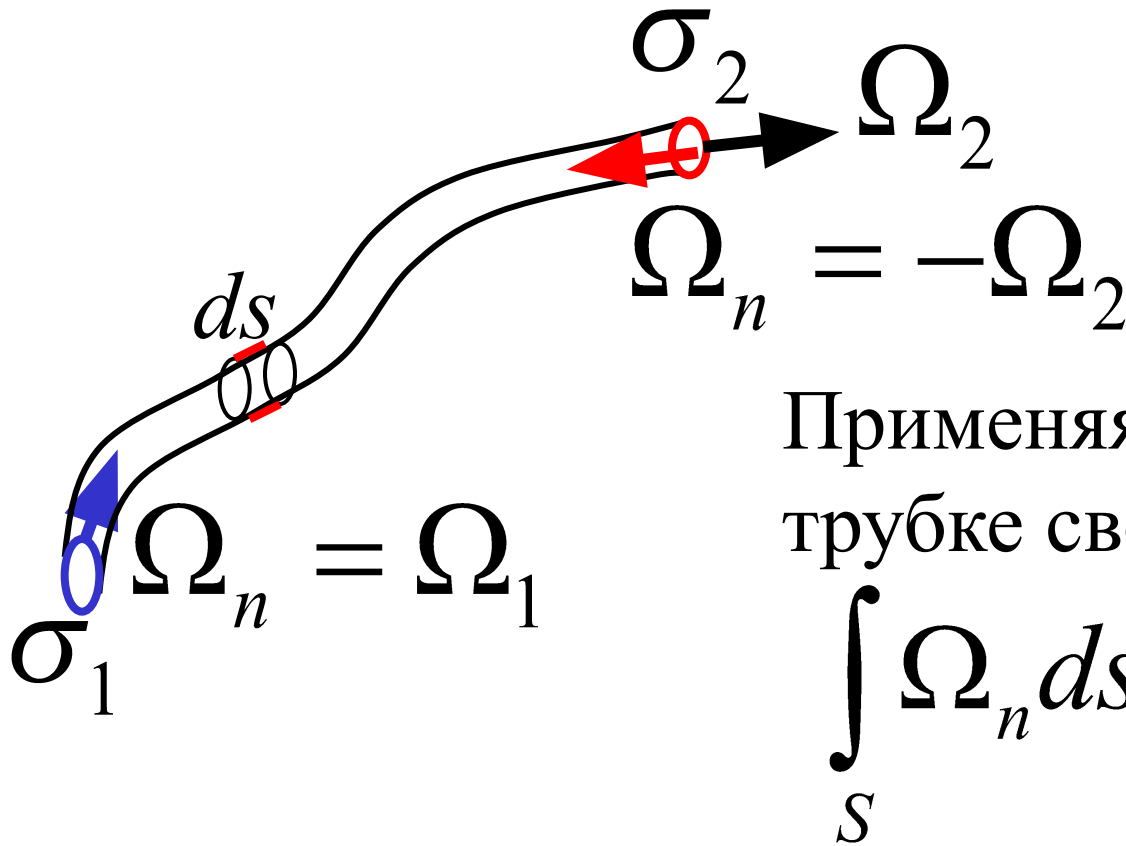
$$u_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\Omega}{r} d\tau$$

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}A$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Theta}{r} d\tau$$

$$A = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\Omega}}{r} d\tau$$





учитывая, что боковые поверхности трубки – есть вихревые линии, т.е. параллельны ротору скорости, получаем для суммарного потока вихря:

$$\Omega_1 \sigma_1 - \Omega_2 \sigma_2 = 0$$

$$\Theta = 0 \quad \Delta\varphi = 0$$

$$d\tau = \sigma ds$$

$$\Omega_x = \Omega \cos(\Omega, x) = \Omega \frac{d\xi}{ds}$$

$$\Omega_y = \Omega \frac{d\eta}{ds} \quad \Omega_z = \Omega \frac{d\zeta}{ds}$$

$$\frac{\Omega_x d\tau}{r} = \frac{\Omega \sigma d\xi}{r}; \quad \frac{\Omega_y d\tau}{r} = \frac{\Omega \sigma d\eta}{r};$$

$$\frac{\Omega_z d\tau}{r} = \frac{\Omega \sigma d\zeta}{r}$$

$$\vec{u} = \text{rot} \vec{A} \quad \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\vec{\Omega}}{r} d\tau$$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\xi}{r}; \quad A_y = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\eta}{r}; \quad A_z = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\zeta}{r}$$

$$\gamma = \Omega\sigma$$



$$u_x = \left( \text{rot} \overset{\boxtimes}{A} \right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) d\eta \right]$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

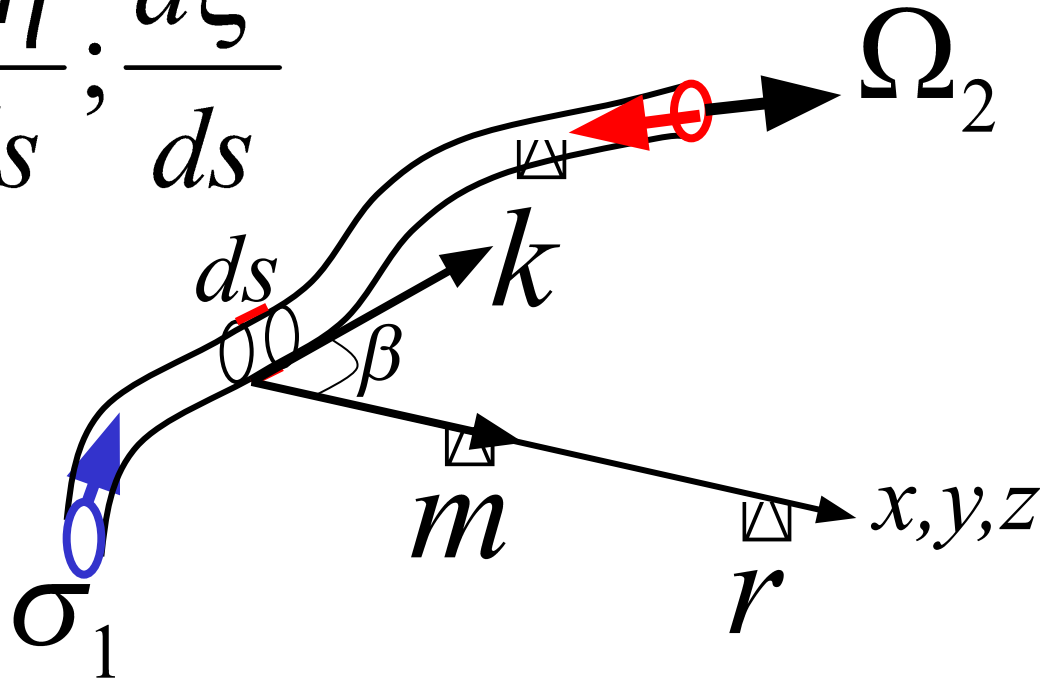
$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \left[ \left( \frac{\eta - y}{r} \right) \frac{d\zeta}{ds} - \left( \frac{\zeta - z}{r} \right) \frac{d\eta}{ds} \right] \frac{ds}{r^2}$$

$$u_y = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \left[ \left( \frac{\zeta - z}{r} \right) \frac{d\xi}{ds} - \left( \frac{\xi - x}{r} \right) \frac{d\zeta}{ds} \right] \frac{ds}{r^2}$$

$$u_z = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \left[ \left( \frac{\xi - x}{r} \right) \frac{d\eta}{ds} - \left( \frac{\eta - y}{r} \right) \frac{d\xi}{ds} \right] \frac{ds}{r^2}$$

Составляющие единичного вектора  $\mathbf{k}$

$$\frac{d\xi}{ds}; \frac{d\eta}{ds}; \frac{d\zeta}{ds}$$



Составляющие единичного вектора  $\mathbf{m}$

$$-\frac{\xi - x}{r}; -\frac{\eta - y}{r}; -\frac{\zeta - z}{r}$$

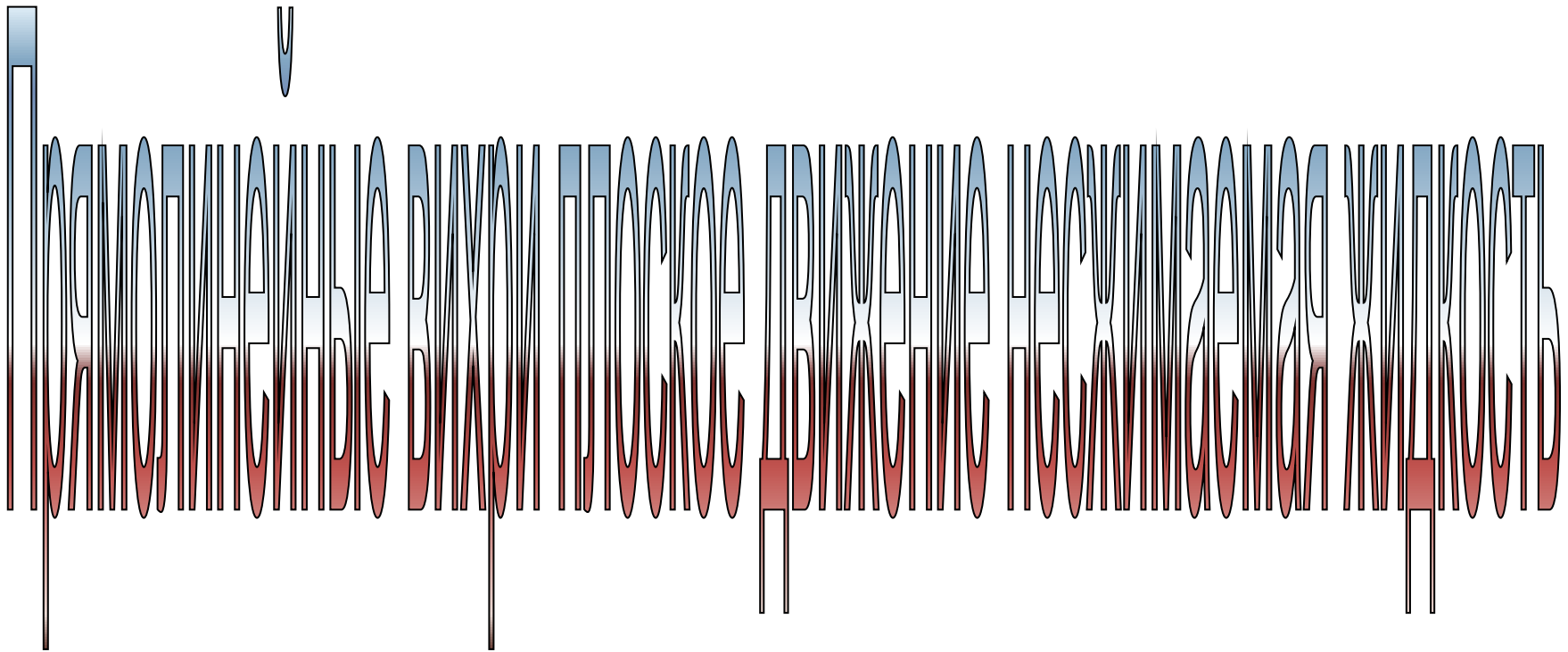
Вклад в величину скорости в точке  $(x, y, z)$  от элемента вихревой трубки  $ds$  определяется выражением:

$$\vec{u}_{ds} = \frac{\gamma}{4\pi} \left( \vec{k} \times \vec{m} \right) \frac{ds}{r^2}$$

$$|\vec{u}_{ds}| = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{\sin(\beta) ds}{r^2}$$

Электродинамика:

Сила, действующая на магнитный полюс в точке  $(x, y, z)$  от элемента проводника  $ds$ , по которому течет ток (Био и Савара)



Пусть движение происходит в плоскости  $x, y$ .

**Вихревые линии** являются прямыми,  
параллельными оси  $z$ .  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты точек  
вихревой трубки,  $ds$  – элемент дуги трубки

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 1$$

Скорость жидкости в точке  $(x, y)$  определяется:

$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta$$

$$u_y = -\frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi - x}{r^3} d\zeta$$

$$u_z = 0$$

Считая  $\xi, \eta, (x, y, z)$  постоянными,  
интегрируем



Достаточно рассматривать движение на плоскости  $Oxy$ , причем вместо вихревой нити точку пересечения ее с плоскостью  $Oxy$ . Будем называть ее точечным вихрем. Под влиянием такого вихря частицы жидкости двигаются по окружностям, центром которых является вихрь. Положительным  $\gamma$  соответствует движение против часовой стрелки.

**Вследствие симметрии движения центр вихря не будет смещаться.**

Найти комплексный потенциал для  
точечного вихря.

$$u_x = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{y-\eta}{r^2}; u_y = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{x-\xi}{r^2}$$

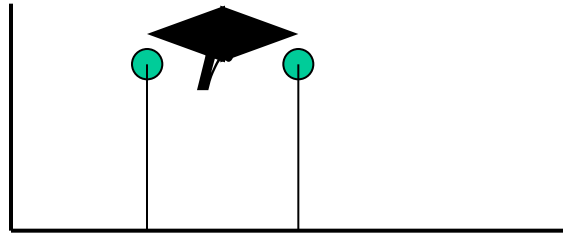
$$u_x - iu_y = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{y-\eta + i(x-\xi)}{r^2} =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{(z^* - z_0^*)}{(z - z_0)(z^* - z_0^*)} = \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)}$$

$$z_0 = \xi + i\eta; \quad z^* = x - iy; \quad z_0^* = \xi - i\eta$$

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0); \quad \frac{dw}{dz} = u_x - iu_y$$

## 2 Вихря



Две параллельные прямые вихревые нити в точках  $z_1$  и  $z_2$ . Показать, что нити всегда сохраняют одинаковое расстояние друг от друга и вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг общего центра  $S$ . Пусть циркуляция одной нити равна  $\gamma_1$ , а второй  $\gamma_2$ .

Запишите комплексный потенциал для 2 нитей<sup>36</sup>

$$w = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \ln(z - z_1) + \frac{\gamma_2}{2\pi i} \ln(z - z_2)$$

Комплексная сопряженная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{dw}{dz} = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_1)} + \frac{\gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_2)}$$

$$u_x - iu_y = \frac{dz^*}{dt}$$

$$\frac{dz^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_1)} + \frac{\gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_2)}$$

Скорость первого вихря в точке  $z_1$  (сам на себя не действует)

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}$$

Скорость второго вихря в точке  $z_2$

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}$$

Отделяем мнимые и действительные части.

Обозначим расстояние между вихрями

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\times \gamma_1 + \times (\gamma_2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (1) \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (2) \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (4)$$

$$\gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \gamma_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \text{const}$$

$$\gamma_1 \frac{dy_1}{dt} + \gamma_2 \frac{dy_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 = \text{const}$$

Получаем интеграл движения центра инерции  
системы двух вихрей

$$\frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \text{const}$$

$$\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \text{const}$$

**Точка  $C$  (центр инерции) с координатами**

$$x_c = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2}; \quad y_c = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

**Остается неподвижной во все время движения**



$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (1) \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (2) \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (4)$$

**Вычитаем из первого третье уравнение, из второго – четвертое.**

$$\begin{aligned} + \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} &= -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2} \times (x_1 - x_2) \\ \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \times (y_1 - y_2) \end{aligned}$$

$$(x_1 - x_2) \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2) \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0$$

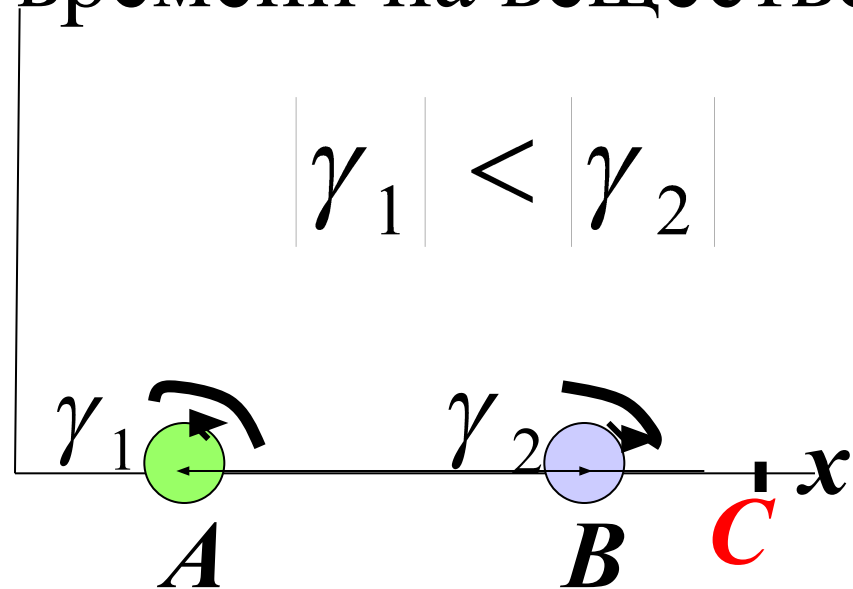
Интегрируем и получаем:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \text{const}$$

$$r = \text{const}$$

Расстояние между вихрями не меняется  
в процессе перемещения

Два вихря, вращающиеся в разных направлениях, находятся в начальный момент времени на вещественной оси.



Найти скорости вихрей, расстояние до центра системы, угловую скорость вращения вихрей.

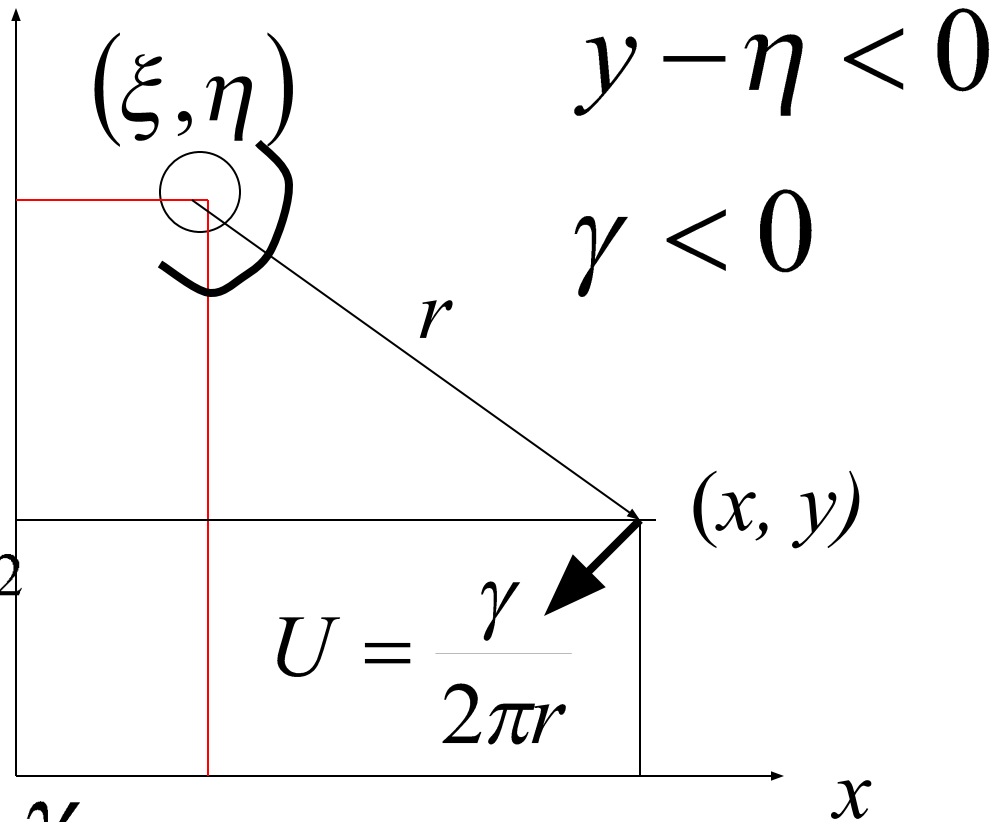
Вихревая нить с координатами  $(\xi, \eta)$  и циркуляцией  $\gamma$  сообщает жидкости в точке  $(x, y)$  скорость, компоненты которой равны

$$u_x = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{y - \eta}{r^2}$$

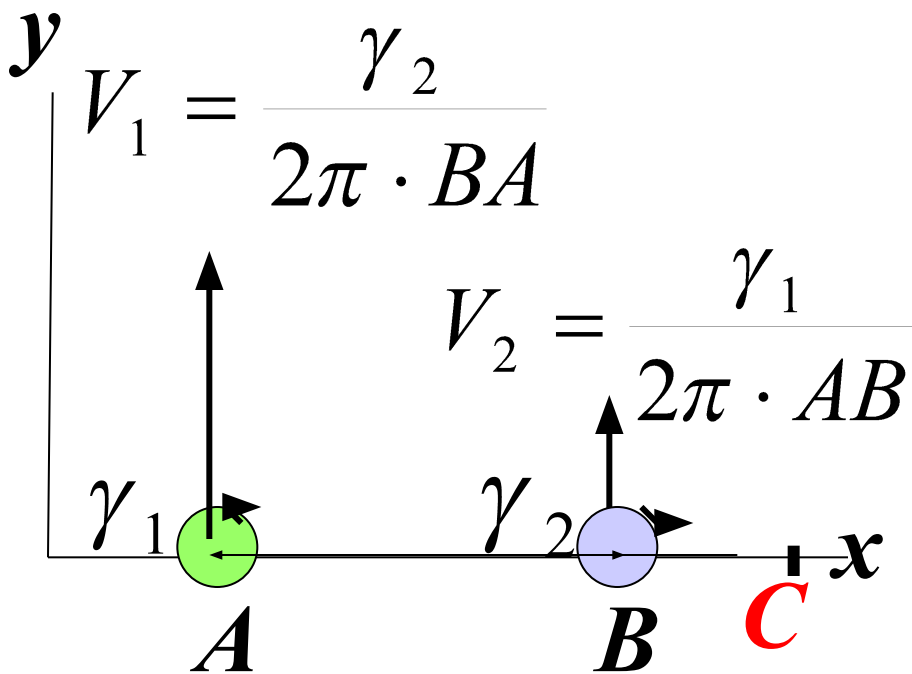
$$u_y = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{x - \xi}{r^2}$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

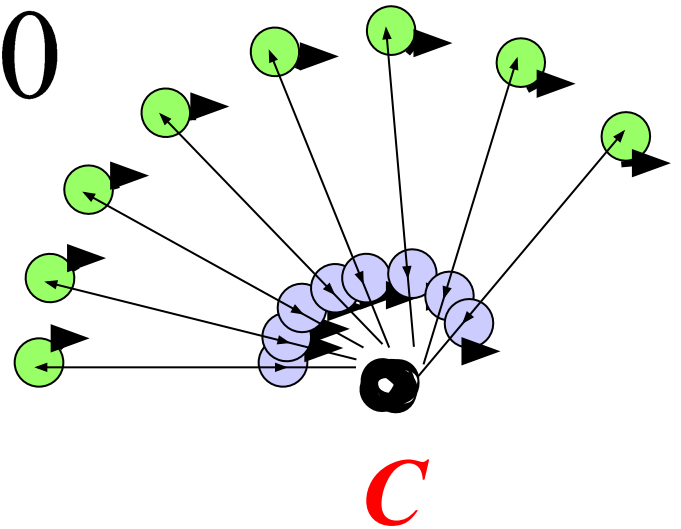


$$|\gamma_1| < |\gamma_2| \quad \gamma_1 > 0; \gamma_2 < 0$$



$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA}$$

$$V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB}$$



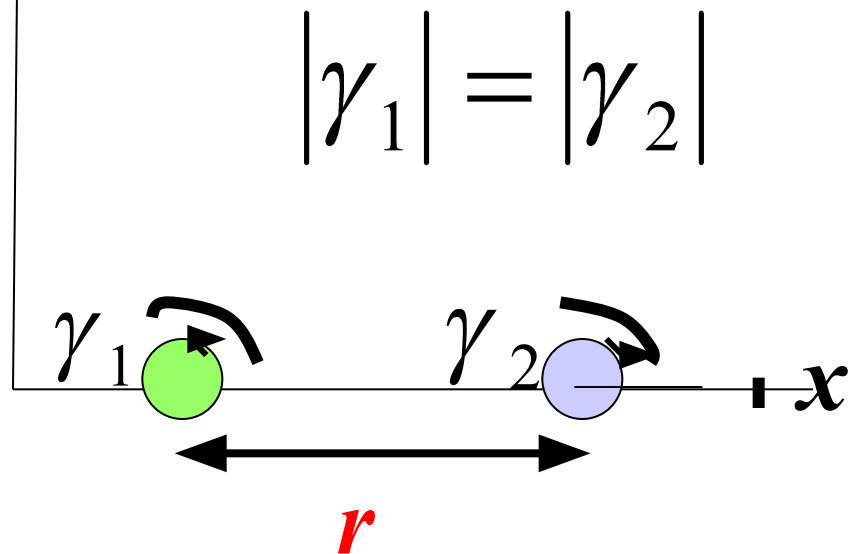
$$AC = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 (x_1 + AB)}{\gamma_1 + \gamma_2} - x_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} AB$$

Угловая скорость вращения вихрей вокруг  
центра **C**

$$|\gamma_1| < |\gamma_2|$$
$$\omega_1 = \frac{V_1}{AC} = \omega_2 = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi \cdot AB^2}$$

Где будет точка C, если вихри  
вращаются в одном направлении?

Два вихря, вращающиеся в разных направлениях, находятся в начальный момент времени на вещественной оси.



Найти скорости вихрей, расстояние до центра системы.

Скорость первого вихря в точке  $z_1$  (сам на себя не действует)

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}$$

Скорость второго вихря в точке  $z_2$

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}$$

Отделяем мнимые и действительные части.

Обозначим расстояние между вихрями

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$



$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{dz_2^*}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{(z_1 - z_2)}$$

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i r} = -\frac{\gamma_1 i}{2\pi r}$$

Отделяем вещественную часть от мнимой :

$$u_{x1} = u_{x2} = 0 \quad u_{y1} = u_{y2} = \frac{\gamma_1}{2\pi L}$$

Вихри перемещаются с постоянной скоростью, перпендикулярно прямой, соединяющей вихри в положительном направлении оси  $y$

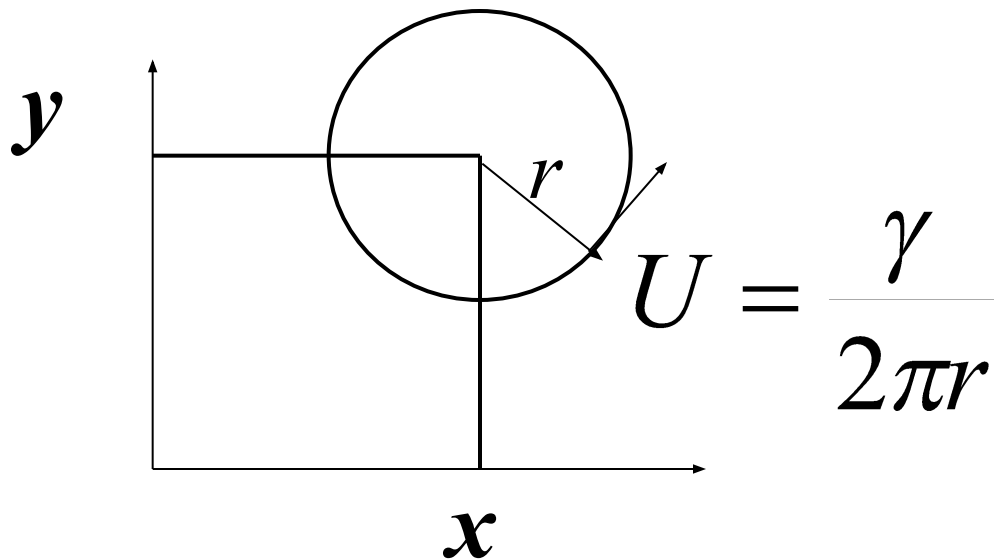
# Пример 1

Одна вихревая нить в точке  $(x, y)$ , циркуляция скорости внутри бесконечно малого сечения имеет постоянное значение.

Найти центр системы

$$\bar{x}_c = \frac{\gamma x}{\gamma} = x$$

$$\bar{y}_c = \frac{\gamma y}{\gamma} = y$$



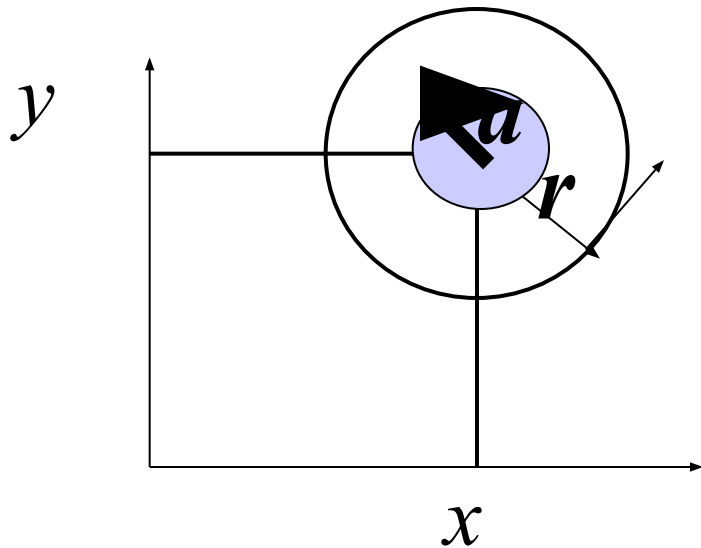
**Центр одиночного  
вихря не  
смещается во  
времени.**

# Пример 2

Внутри круга радиуса  $a$  жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\omega$ . Определить скорость вне круга.

$$U = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

$$\gamma = \text{rot} u \cdot \sigma = \pm 2\omega \pi a^2$$

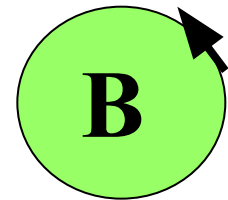
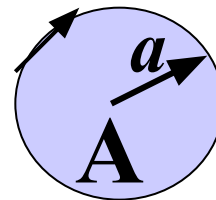
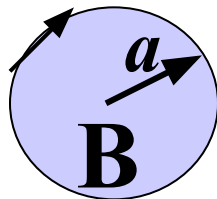
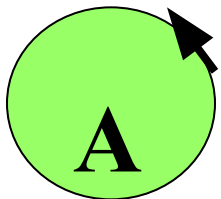


$$U = \frac{\omega a^2}{r}$$

На границе вихря скорость равна  $\omega a$ .

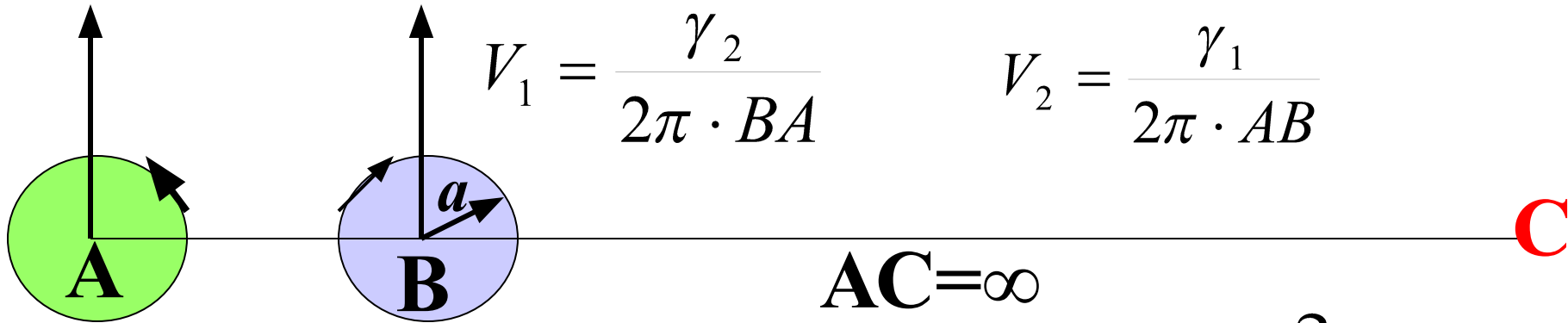
# Пример 3

Как будут двигаться 2 вихря радиуса  $a$ , если они имеют циркуляцию разного знака, но одинаковую по модулю? Вихри вращаются как твердое тело.



**Движение двух вихрей с противоположным направлением вращения и  $\gamma_1 = -\gamma_2$**

$$AC = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad AB = \infty$$



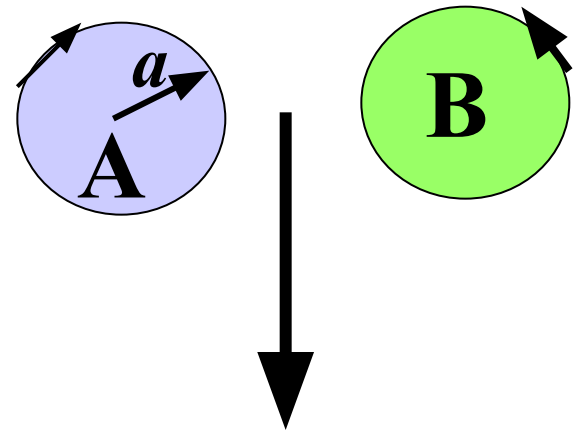
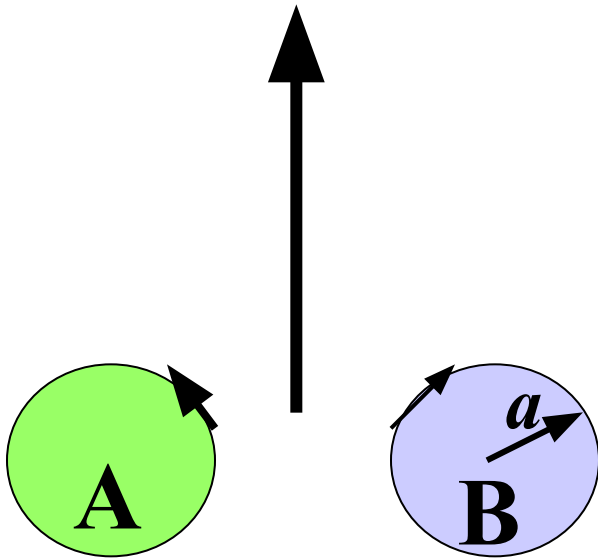
$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA} \quad V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB}$$

$$\gamma = \zeta \sigma = \pm 2\omega \pi a^2$$

$$V_1 = V_2 = \frac{\omega a^2}{AB}$$

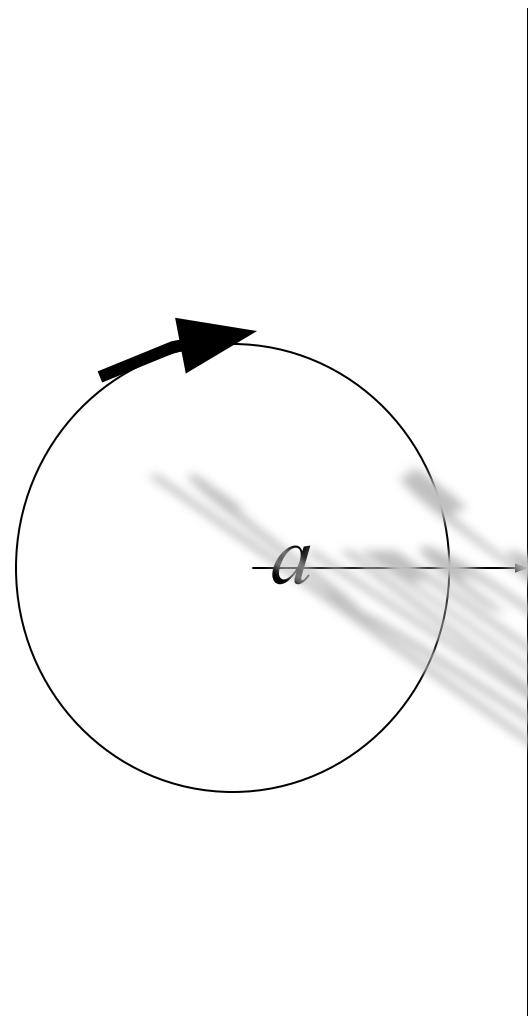
**Вихри двигаются по прямой с одинаковой скоростью**

# Пример 3





# Пример 4

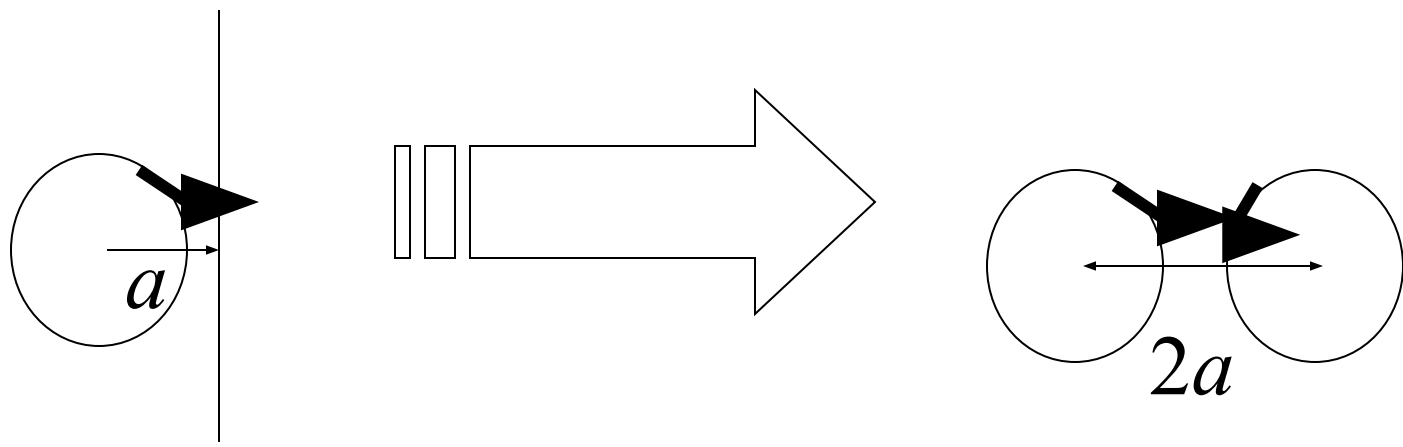


Куда будет двигаться вихрь?

Найти скорость перемещения вихря у  
твердой стенки

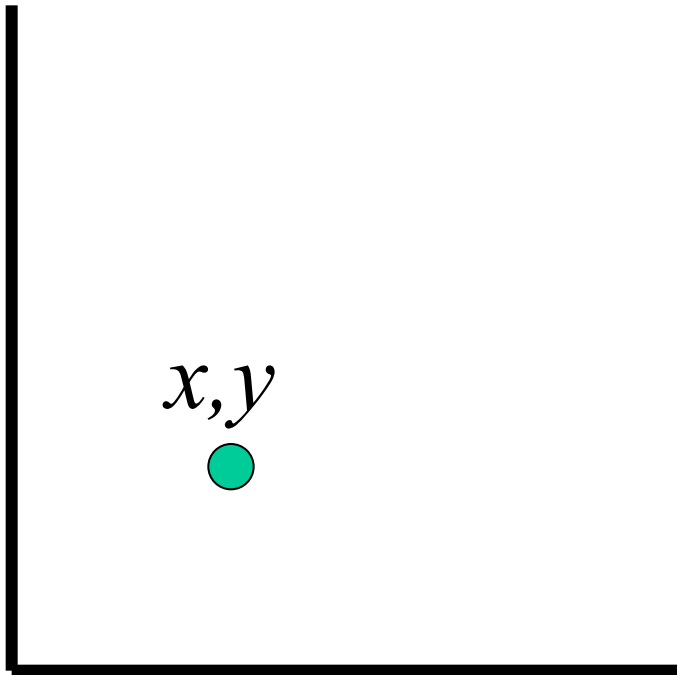
Так как скорость жидкости во всех точках плоскости симметрии направлена по касательной, то можно предположить, что эта плоскость образует твердую границу для жидкости. Таким образом систему «**вихрь у твердой границы**» можно смоделировать системой, представляющей собой пару вихрей. Вихрь у твердой границы будет перемещаться с постоянной скоростью

$$V = \frac{\gamma}{4\pi \cdot a}$$



# Пример 5

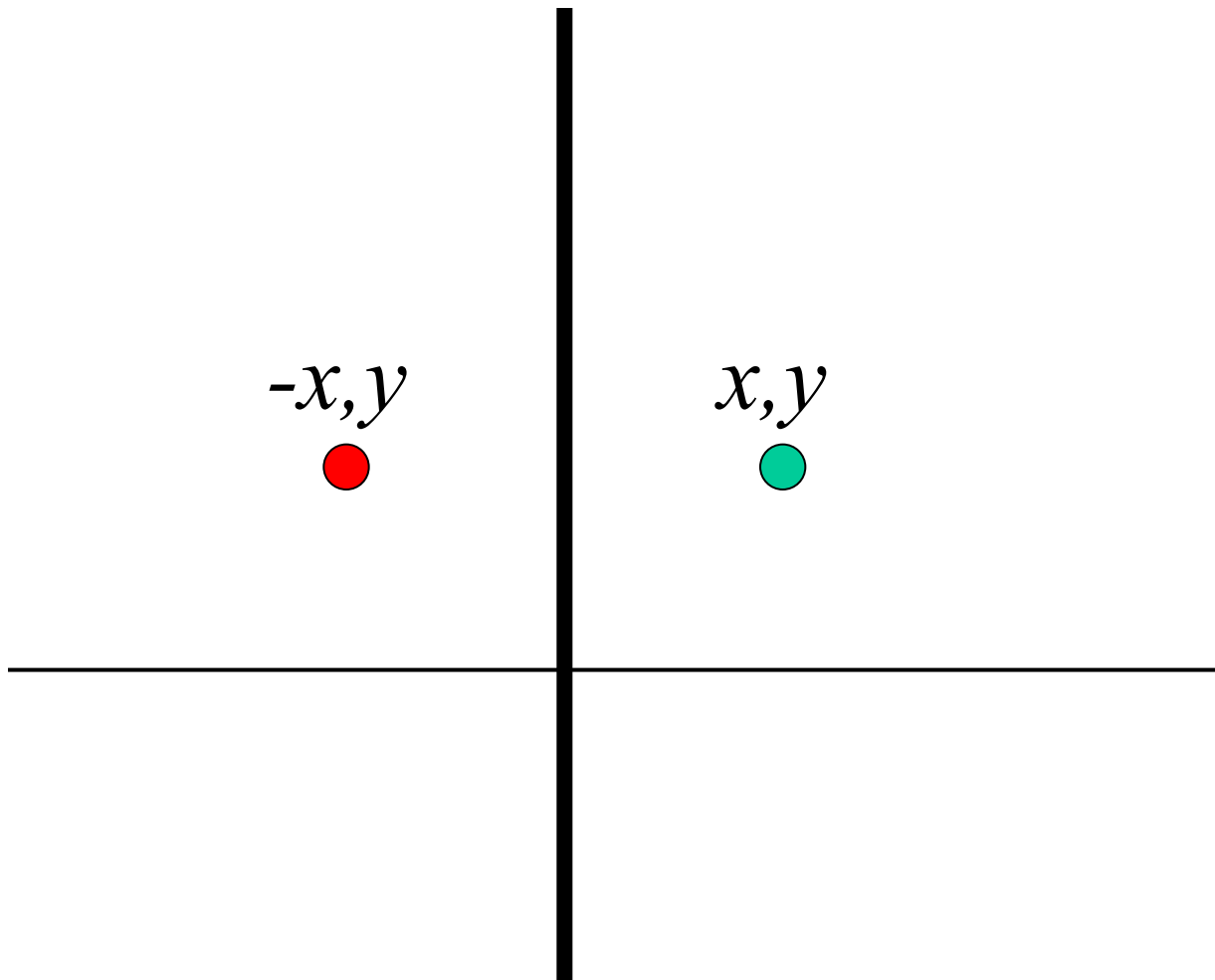
В точке с координатами  $x, y$  находится прямая вихревая нить. Жидкость ограничена твердыми стенками, образующими прямой угол вдоль осей координат. Найти траекторию вихря.



Так как циркуляция скорости вихря постоянна, то течение стационарно. В этом случае траектория вихря совпадает с линией тока, проходящей через точку  $(x, y)$

Для того, чтобы описать влияние стенки, расположенной вдоль мнимой оси, поместим вихрь той же интенсивности, но с противоположным знаком циркуляции в точку  $(-x, y)$  (*отразим вихрь*)

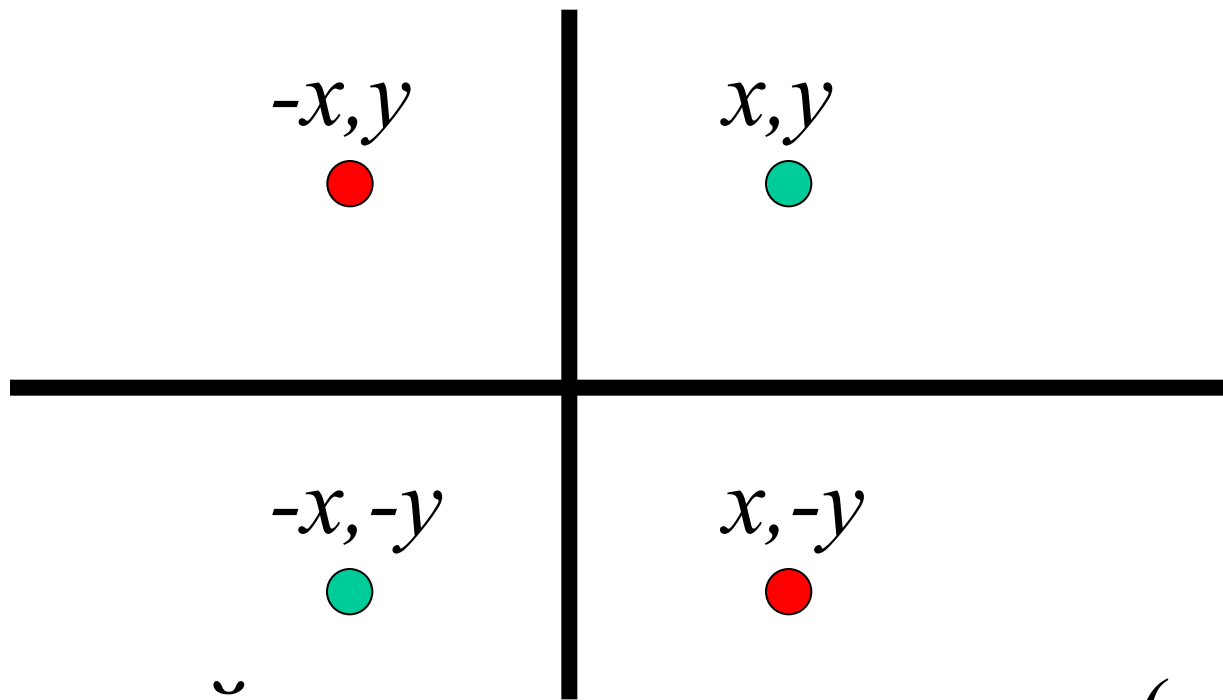
$$w = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_1) - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_2)$$



Для того, чтобы описать влияние стенки, расположенной вдоль действительной оси, поместим вихри той же интенсивности, но с противоположными знаками циркуляции в точки  $(-x, -y)$  и  $(x, -y)$



$$w = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_1) - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_2) +$$
$$+ \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_3) - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_4)$$



Надо найти потенциал в точке  $(x, y)$

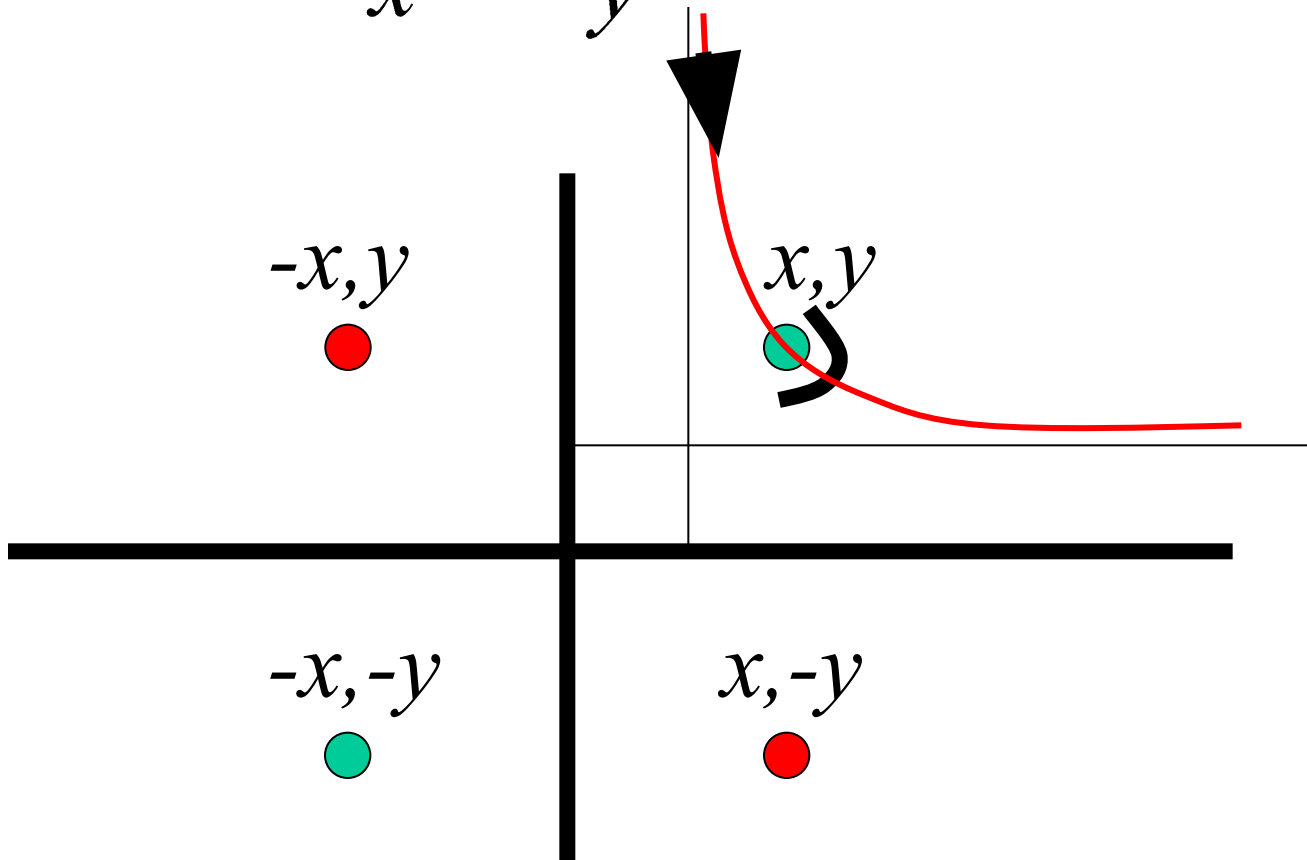
$$\begin{aligned}
w &= -\frac{\gamma}{2\pi i} \ln[(x+iy) - (-x+iy)] + \\
&+ \frac{\gamma}{2\pi i} \ln[(x+iy) - (-x-iy)] - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln[(x+iy) - (x-iy)] = \\
&= -\frac{\gamma}{2\pi i} \ln 2x + \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(2x+2yi) - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln 2yi = \\
&= \frac{\gamma}{2\pi i} \ln \frac{(x+yi)}{xy}
\end{aligned}$$

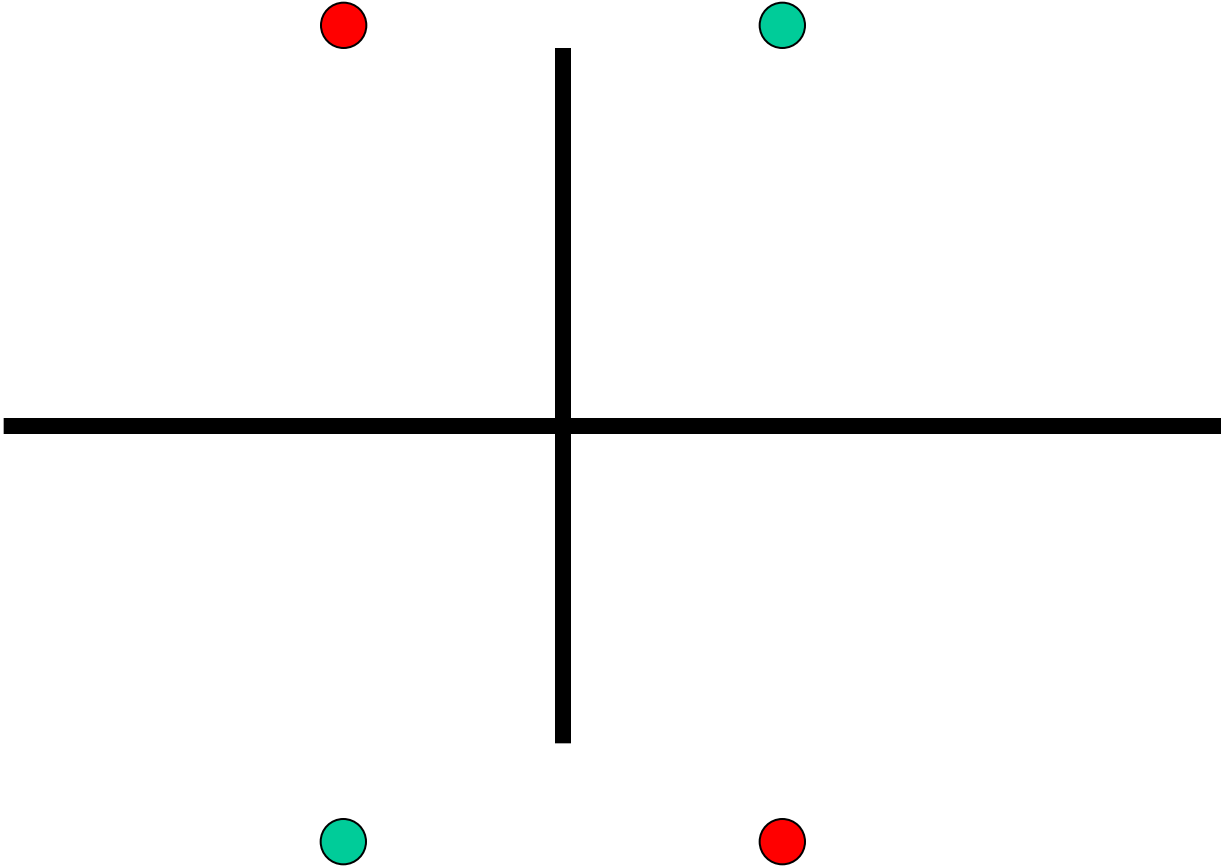
$$w = \varphi + i\psi; \quad \psi = -\frac{\gamma}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \ln \frac{(x+yi)}{xy} \right] = -\frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$

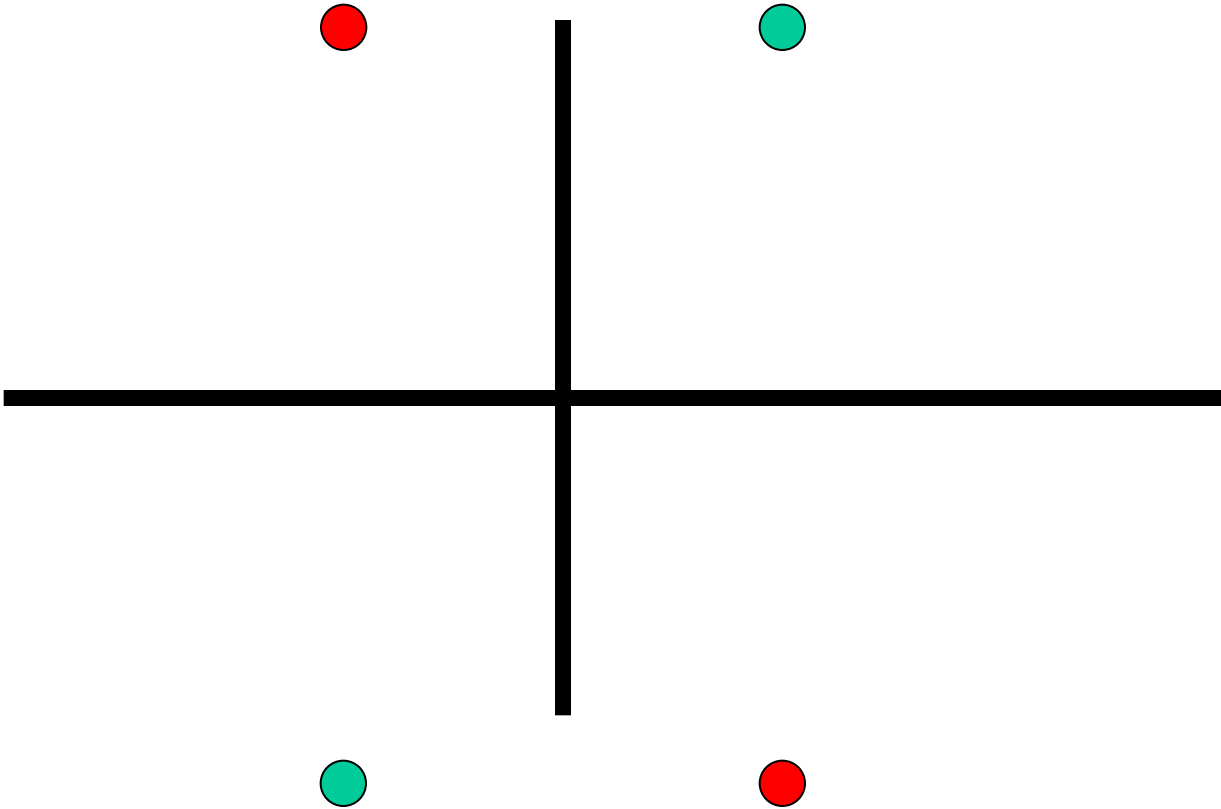
На линии тока  $\psi = \text{const}$ , т.е.  $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \text{const}$

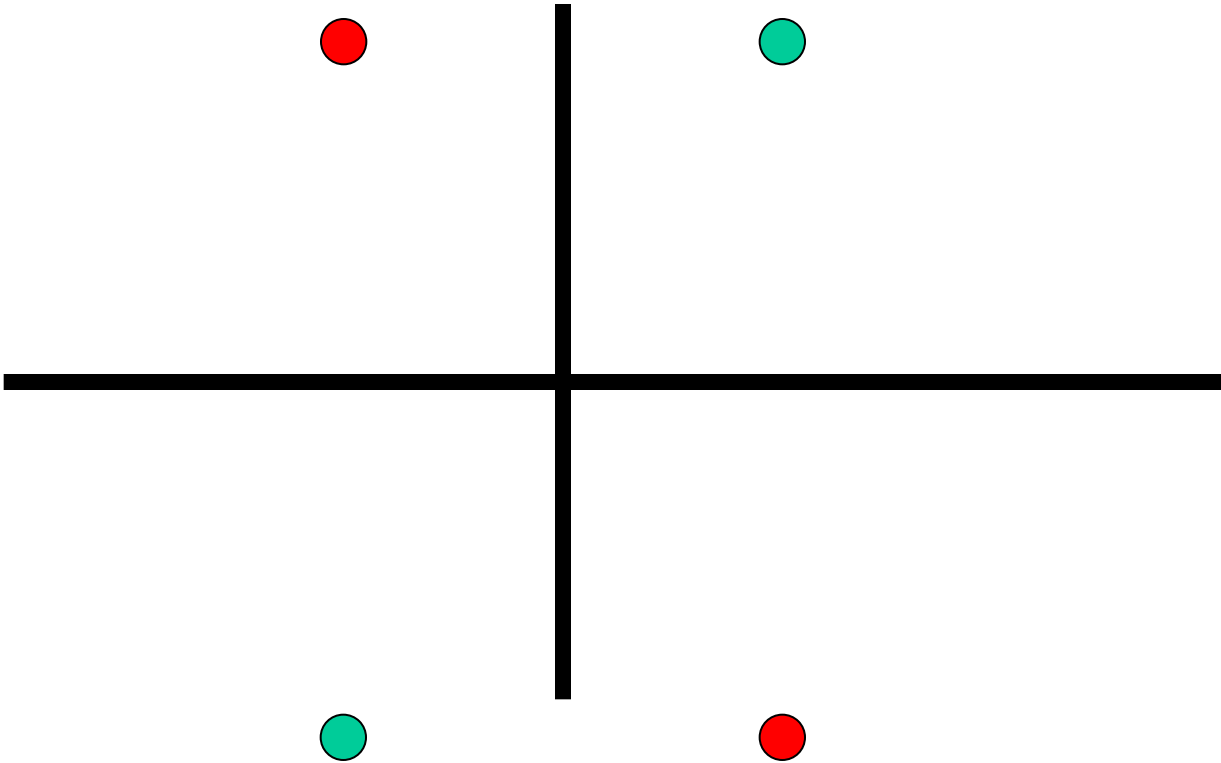
# Траектория вихря в углу, образованном твердыми стенками

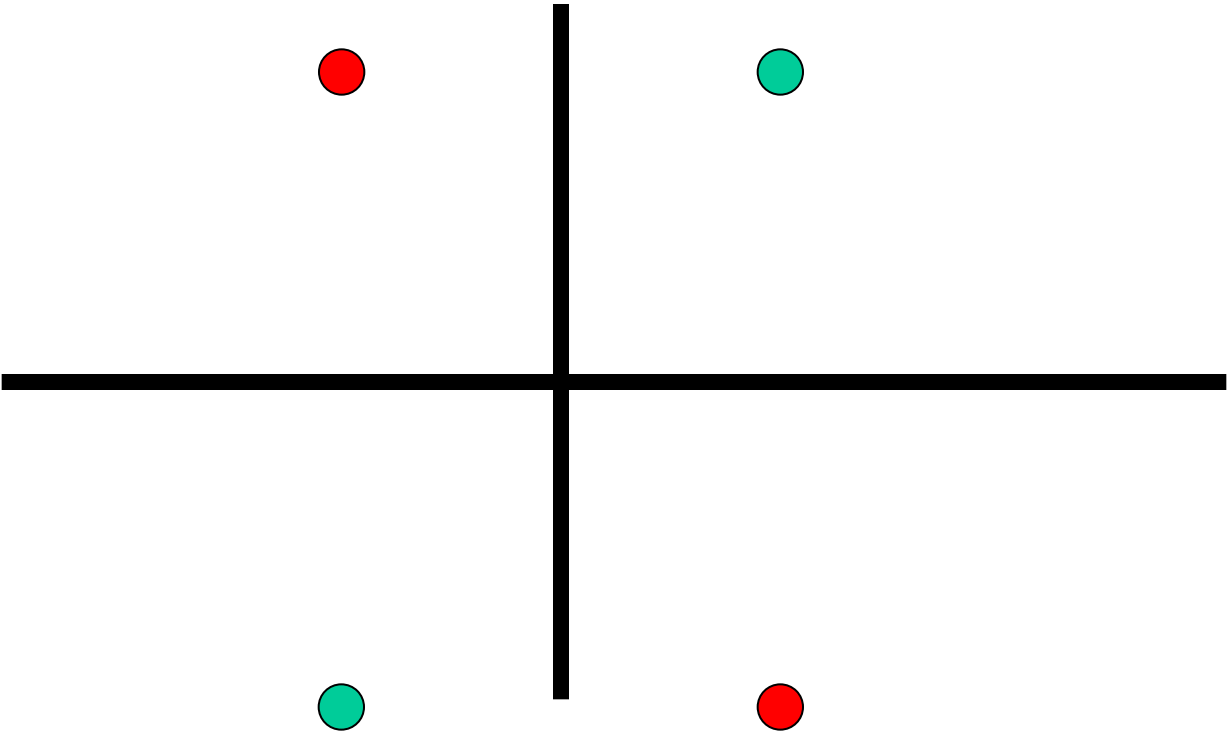
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{const}$$

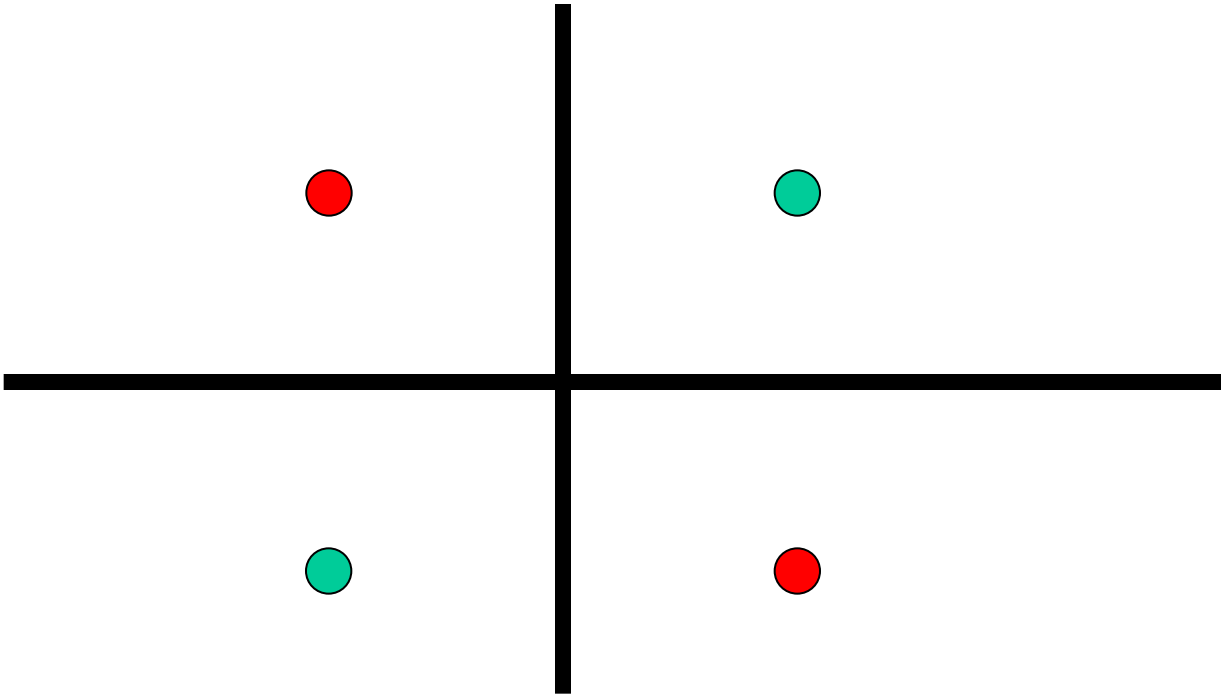




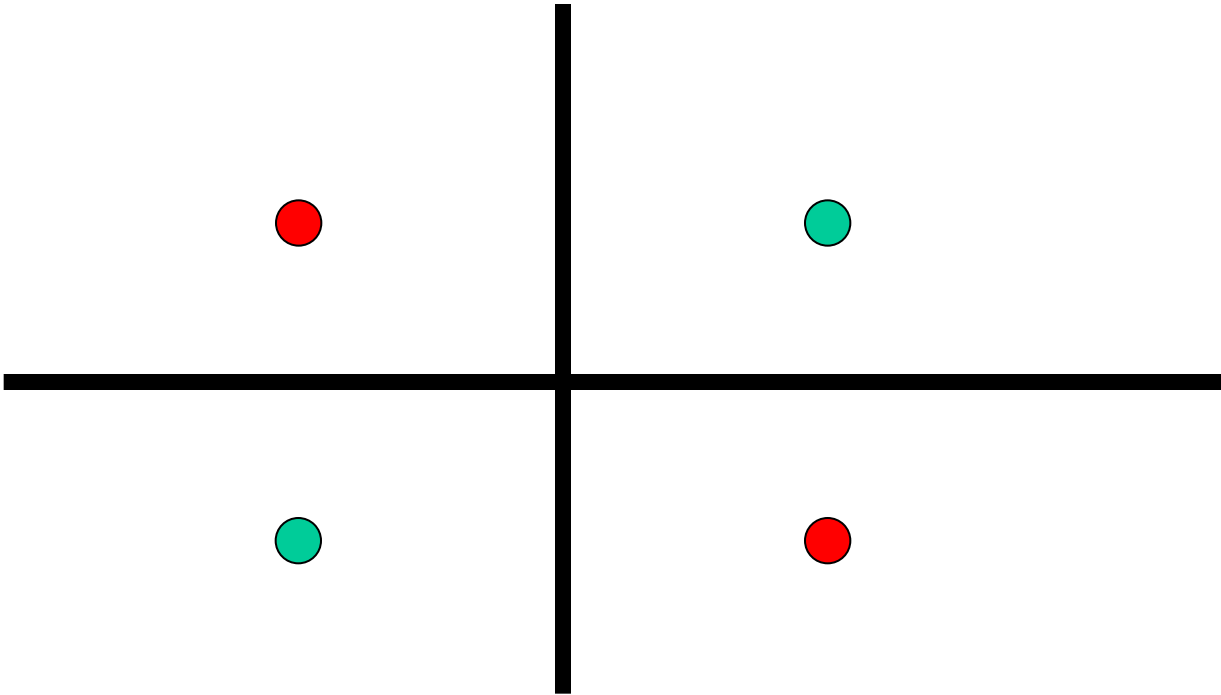


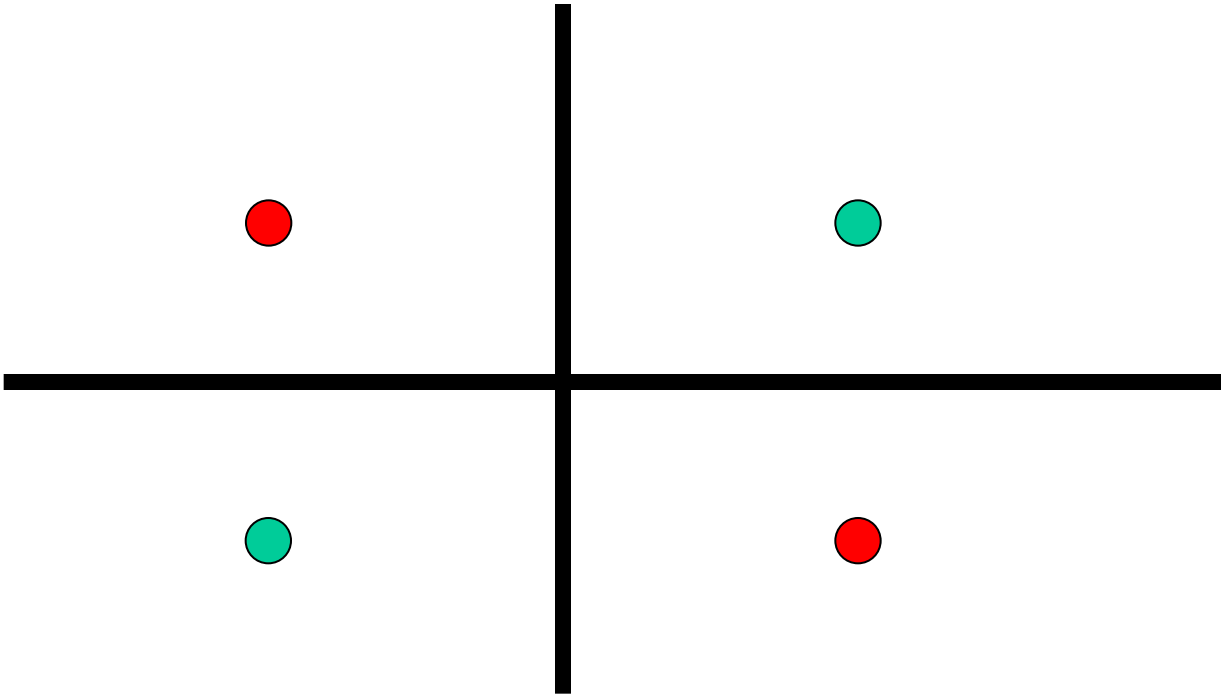


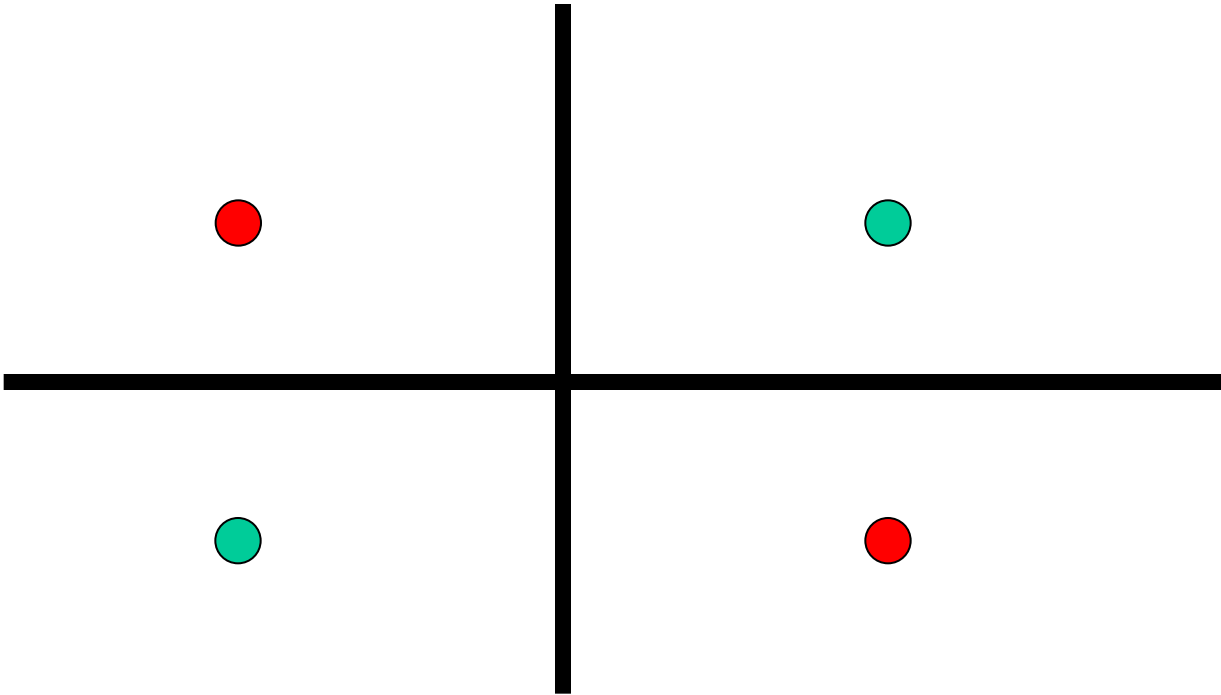


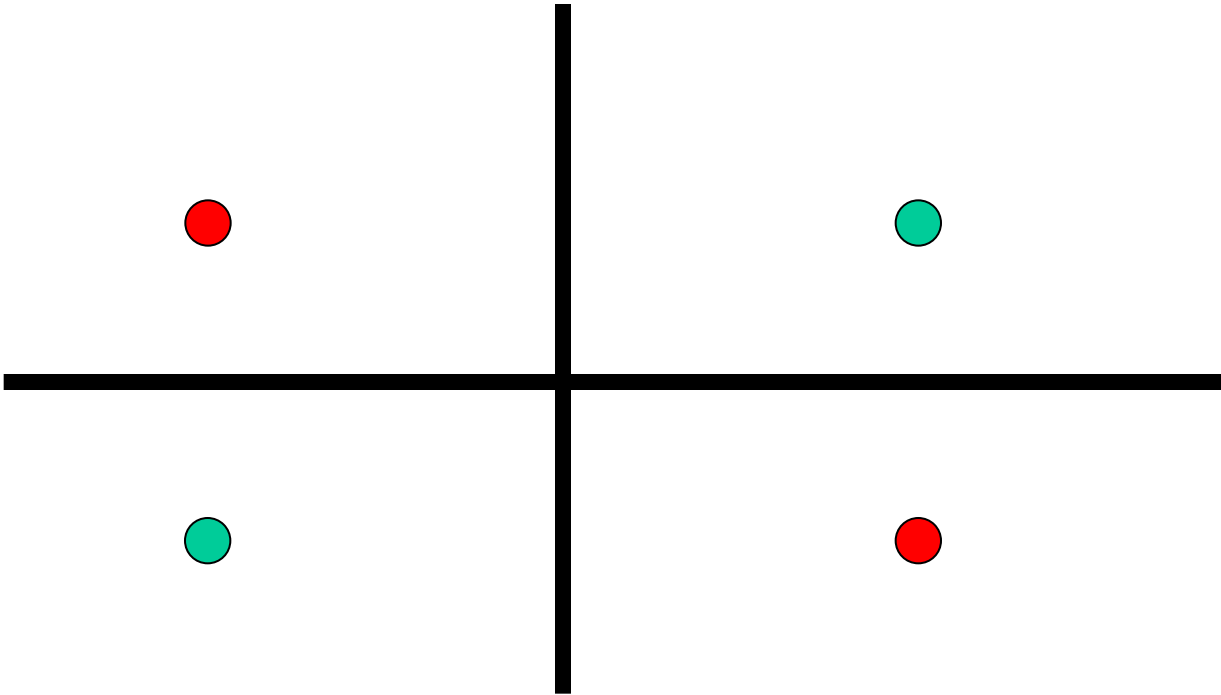


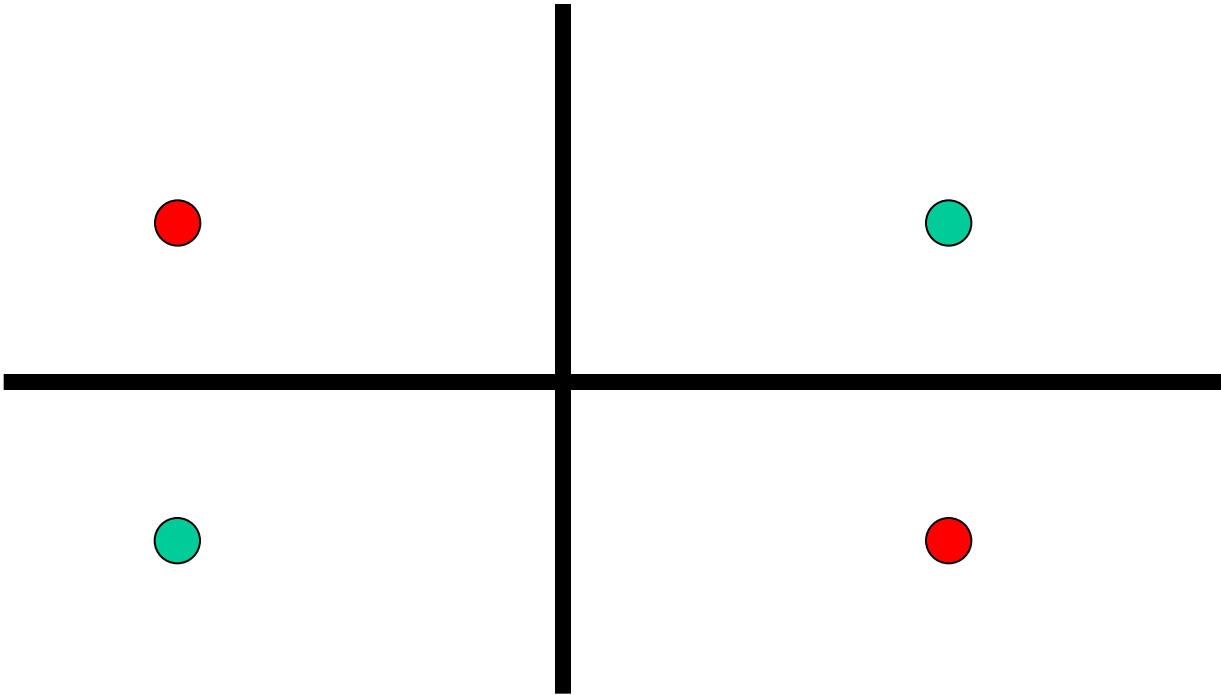












# n Вихрей

расположенных в точках  $z_1, \dots, z_n$  и имеющих интенсивности  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$

Комплексный потенциал

$$w(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k)$$

Комплексная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{dw}{dz} = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_k}$$

Записать скорость вихря в точке  $z_p$  ( $k=p$ ) <sup>78</sup>

Уравнение движения вихря в точке  $z_p$  ( $k=p$ )

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая на  $\gamma_p$  и суммируя по переменной  $p$  от 1 до  $n$ , получаем в правой части

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{\gamma_k \gamma_p}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k} = 0$$

Так как слагаемому с  $(z_p - z_k)$  соответствует слагаемое с  $(z_k - z_p)$

Получаем

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p \frac{dz_p^*}{dt} = 0$$

Следовательно

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p z_p^* = \text{const}$$

Отделяем мнимую и действительную части



$$\sum_{p=1}^n \gamma_p x_p = \text{const};$$

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p y_p = \text{const}$$

Если  $\sum_{p=1}^n \gamma_p \neq 0$ , то получаем интегралы  
движения центров инерции (**следствие 1**)

$$\frac{\sum_{p=1}^n \gamma_p x_p}{\sum_{p=1}^n \gamma_p} = \text{const};$$

$$\frac{\sum_{p=1}^n \gamma_p y_p}{\sum_{p=1}^n \gamma_p} = \text{const}$$

## Следствие 2

Уравнение движения вихря в точке  $z_p$  ( $k=p$ )

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая на  $\gamma_p z_p$  и суммируя по переменной  $p$  от 1 до  $n$ , получаем

$$\frac{z_p}{z_p - z_k} + \frac{z_k}{z_k - z_p} = 1$$

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p z_p \frac{dz_p^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq p} \gamma_k \gamma_p$$

Отделить мнимую и действительную части <sup>82</sup>

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p \left( x_p \frac{dx_p}{dt} + y_p \frac{dy_p}{dt} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p \left( x_p \frac{dy_p}{dt} - y_p \frac{dx_p}{dt} \right) = \sum_{k \neq p} \gamma_k \gamma_p \quad (2)$$

**(2)** Сумма моментов количеств движения масс  $\gamma_p$  относительно начала координат не меняется со временем

(1)

$$\frac{d}{dt} \sum_{p=1}^n \gamma_p (x_p^2 + y_p^2) = 0$$

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p (x_p^2 + y_p^2) = \text{const}$$

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p (r_p^2) = \text{const}$$

Сумма моментов инерции масс  $\gamma_p$  относительно начала координат не меняется со временем

## Следствие 3

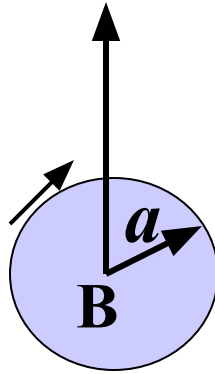
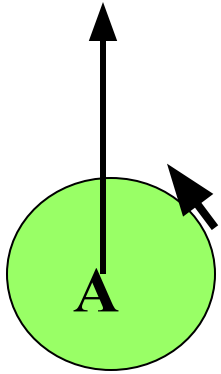
$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая выражения скорости на  $\gamma_p \frac{dz_p}{dt}$

и суммируя по переменной  $p$  от 1 до  $n$ ,  
получаем еще один интеграл

$$\sum_{k \neq p}^n \gamma_k \gamma_p \ln(r_{kp}) = \text{const}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2$$



Такие вихри называются «парой вихрей». Они являются плоской аналогией вихревому кольцу и обладает многими свойствами последнего.



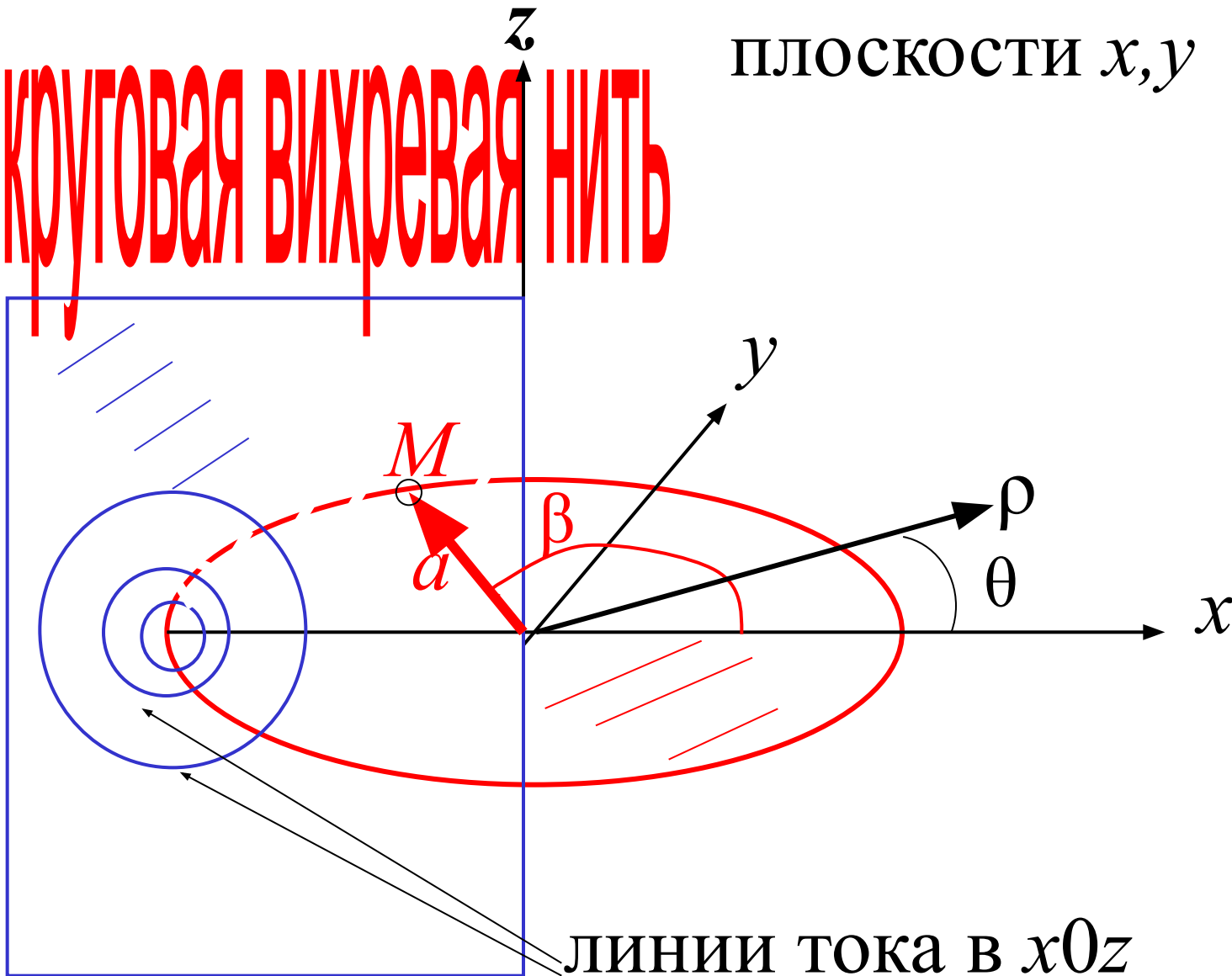
Куда двигается кольцевой вихрь?





радиуса  $a$  лежит в  
плоскости  $x, y$

КРУГОВАЯ ВИХРЕВАЯ НИТЬ



Координаты точки  $M$  на вихревой нити в декартовой системе  $(x, y, z)$

$$\xi = a \cos \beta; \quad \eta = a \sin \beta; \quad \zeta = 0$$

Расстояние от точки  $M$  на вихревой нити до точки  $N(x, y, z)$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\rho \cos \theta - a \cos \beta)^2 + (\rho \sin \theta - a \sin \beta)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\rho^2 - 2a\rho \cos(\theta - \beta) + a^2 + z^2} \end{aligned}$$

Запишем компоненты скорости через

векторный потенциал

$$u = rot A \quad A = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\Omega}{r} d\tau$$

$$(rot A)_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad (1)$$

$$(rot A)_\theta = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

$$(rot A)_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}$$

$$\vec{u} = \text{rot} \vec{A} \quad \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\vec{\Omega}}{r} d\tau$$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\xi}{r}; \quad A_y = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\eta}{r}; \quad A_z = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\zeta}{r}$$

$$\gamma = \text{const}$$

Для векторного потенциала в точке  $x, y, z$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \beta d\beta}{r}$$

$$A_y = \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \beta d\beta}{r}$$

$$A_z = 0$$

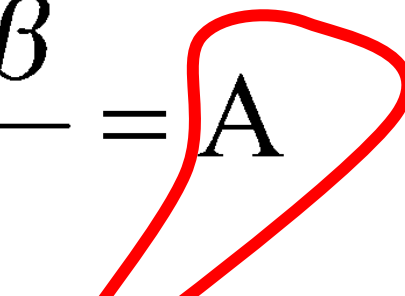
Для плоскости  $x, y$  при  $\theta=0$   $A_x = A_\rho$ ;  $A_y = A_\theta$   
Вследствие симметрии задачи это справедливо для всех углов  $\theta$

$$A_\rho = -\frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \beta d\beta}{r} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d(\cos \beta)}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \beta}} = 0$$

$$\int \frac{d(x)}{\sqrt{b + cx}} = \frac{2\sqrt{b + cx}}{c}$$

$$A_{\rho} = -\frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \beta d\beta}{r} = 0$$

$$A_{\theta} = \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \beta d\beta}{r} = \mathbf{A}$$


$$A_z = 0$$

Подставляем выражения векторного потенциала в (1) и находим компоненты скорости  $u = \text{rot}A$

$$u_{\rho} = -\frac{\partial A}{\partial z}; \quad u_{\theta} = 0; \quad u_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho}$$



ОПРЕДЕЛИТЬ объем жидкости, протекающей через круг с радиусом  $\rho$ , лежащий в плоскости перпендикулярной оси  $z$  с центром на оси  $z$ , через переменную  $A$



Объем жидкости, протекающей через круг с радиусом  $\rho$ , лежащим в плоскости перпендикулярной оси  $z$  с центром на оси  $z$

$$\int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} u_z \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\rho} u_z \rho d\rho = 2\pi \rho A$$

ОПРЕДЕЛИТЬ

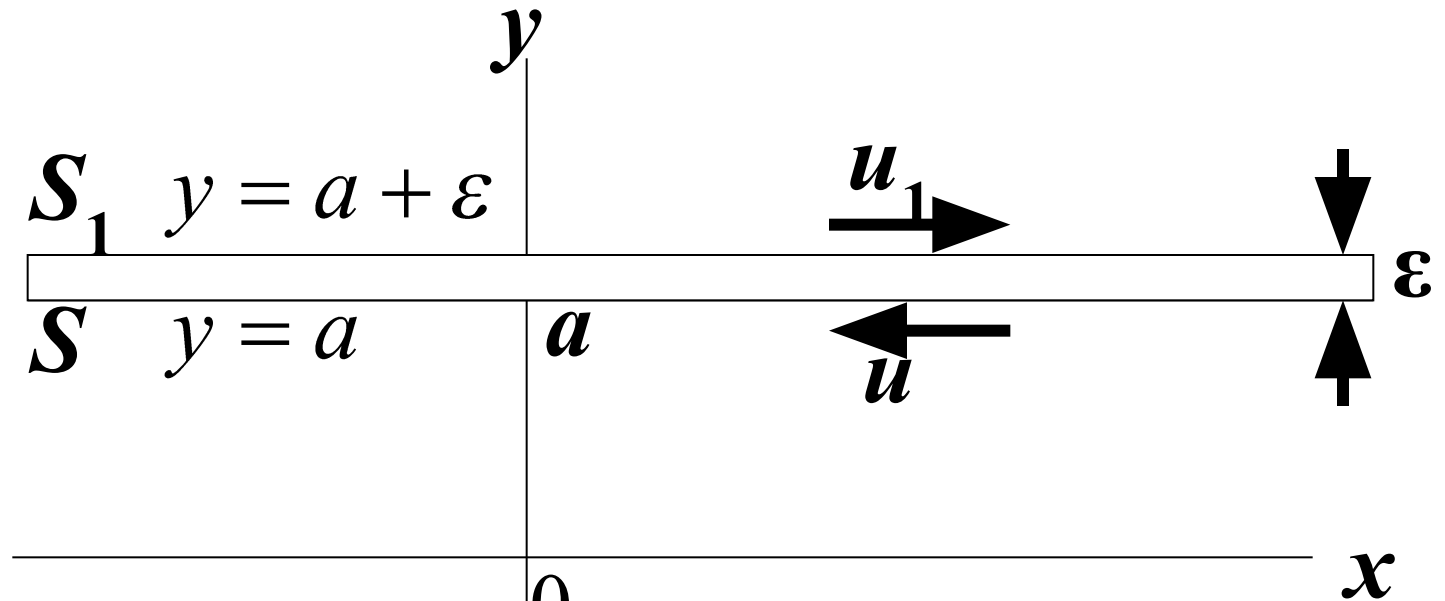
скорость перемещения круговой вихревой  
НИТИ

$$\rho = a; \quad z = 0; \quad r = 0$$

$$u_\rho = -\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$u_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\gamma a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta d\beta}{r} \right) = \infty$$

# Вихревой слой



$$u_x = (u - u_1) \left( 1 - \frac{y - a}{\varepsilon} \right)$$

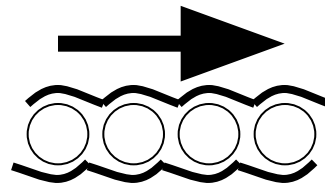
Найти ротор скорости

$$u_y = 0$$

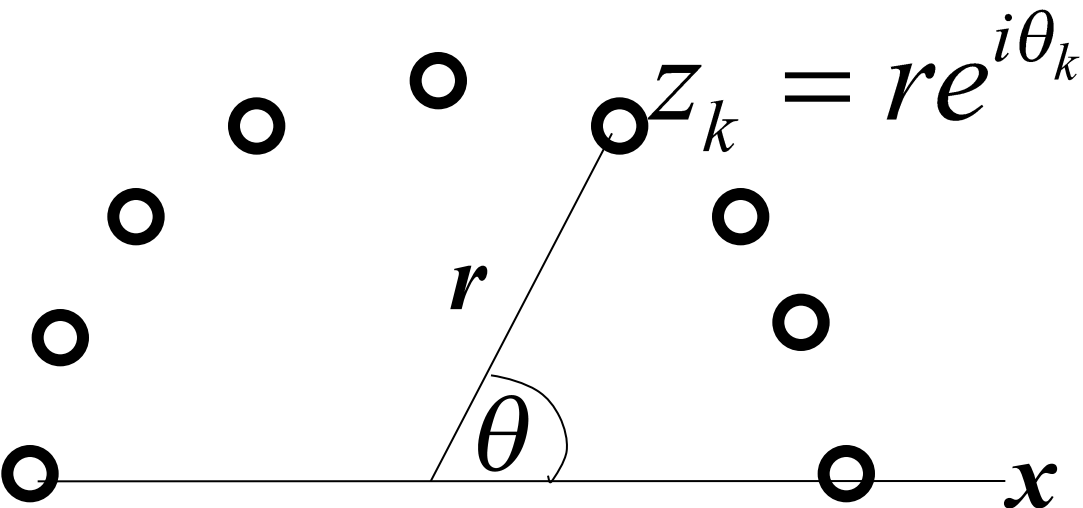
$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{u - u_1}{\varepsilon}$$

Внутри слоя  $\Omega = \text{const}$

Разрыв скорости может быть смоделирован  
цепочкой вихревых нитей



# Вихревой цилиндрический слой



○ Интенсивность вихрей  
на элементе дуги  $r d\theta$

$$\gamma r d\theta$$

Записать комплексный потенциал и комплексную скорость для точки  $z$

Комплексный потенциал цилиндрического  
слоя в точке  $z$

$$w = \frac{\gamma r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \ln(z - re^{i\theta}) d\theta$$

Комплексная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z - re^{i\theta}}$$

Делим подынтегральное выражение на  $z$ ,  
умножаем на  $z - re^{i\theta} + re^{i\theta}$



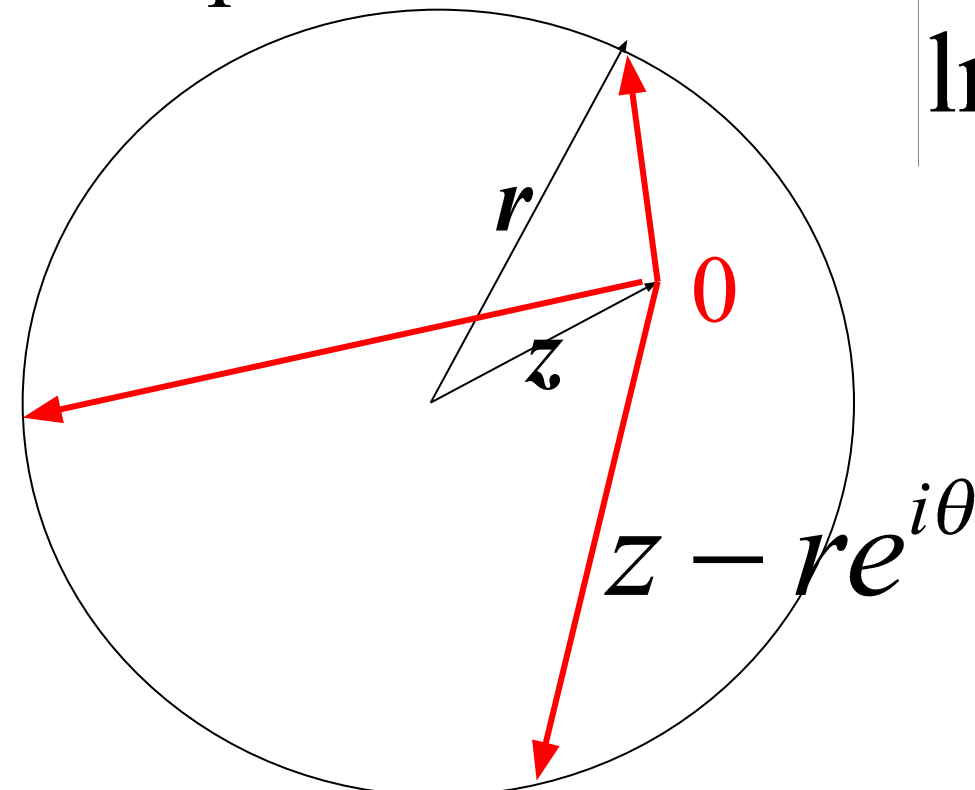
$z$  рассматривается как постоянная при  
интегрировании

$$u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi z i} \int_0^{2\pi} \frac{z - re^{i\theta} + re^{i\theta}}{z - re^{i\theta}} d\theta =$$
$$= \frac{\gamma r}{2\pi z i} \left\{ 2\pi - \frac{1}{i} \left| \ln(z - re^{i\theta}) \right|_0^{2\pi} \right\}$$

Если  $z$  внутри окружности, т.е.  $|z| < r$

При изменении  $\theta$  от  $0$  до  $2\pi$  аргумент  
разности  $z - re^{i\theta}$  меняется на  $2\pi$ ,  
так как вектор  $z - re^{i\theta}$  обходит начало  
координат. Тогда

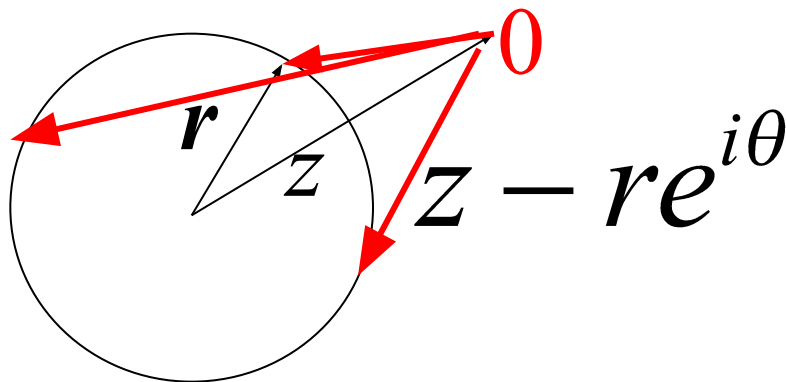
$$\left| \ln(z - re^{i\theta}) \right|_0^{2\pi} = 2\pi i$$



Если  $z$  вне окружности, т.е.  $|z| > r$

При изменении  $\theta$  от  $0$  до  $2\pi$  конец вектора  $z - re^{i\theta}$  обходит замкнутый путь не содержащий начала координат.

Тогда 
$$\left| \ln(z - re^{i\theta}) \right|_0^{2\pi} = 0$$



Записать комплексную скорость внутри и вне цилиндра

## Комплексная скорость

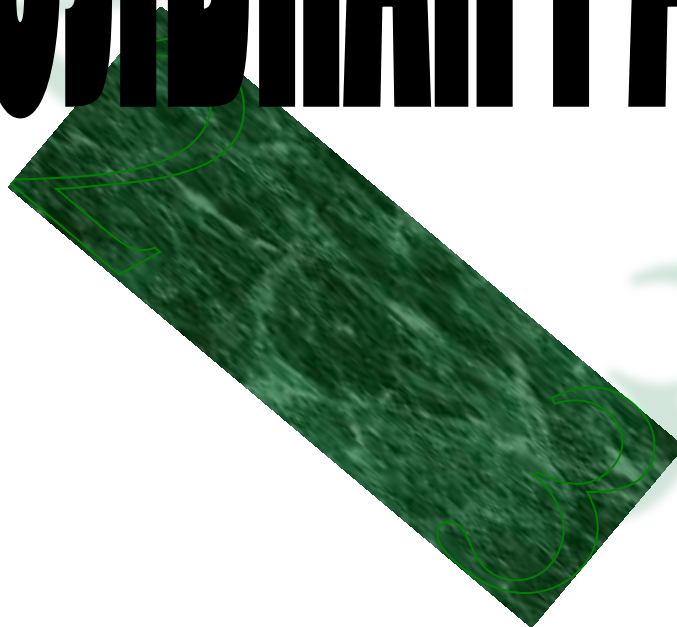
$$|z| < r \quad u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi z i} \left\{ 2\pi - \frac{1}{i} 2\pi i \right\} = 0$$

движения нет внутри цилиндра

$$|z| > r \quad u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{z i}$$

вне цилиндра движение описывается  
воздействием вихревой нити интенсивности  
 $2\pi\gamma$ , расположенной в начале координат

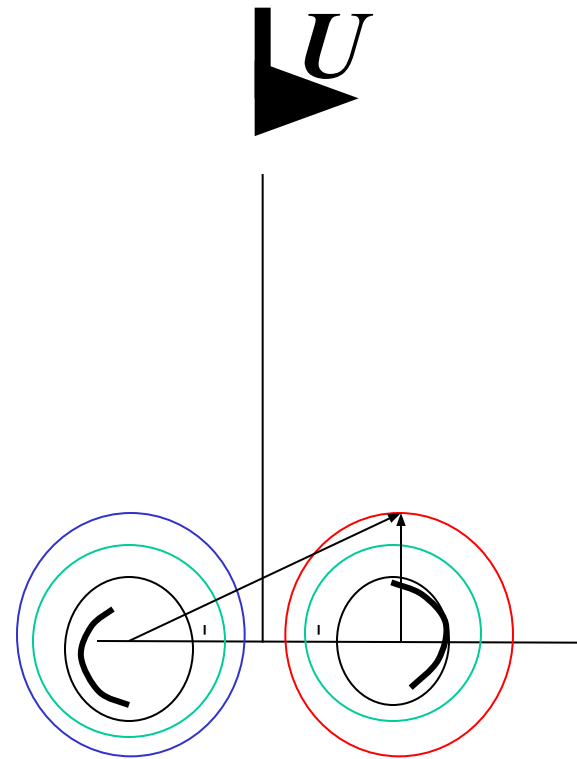
# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА



# №1

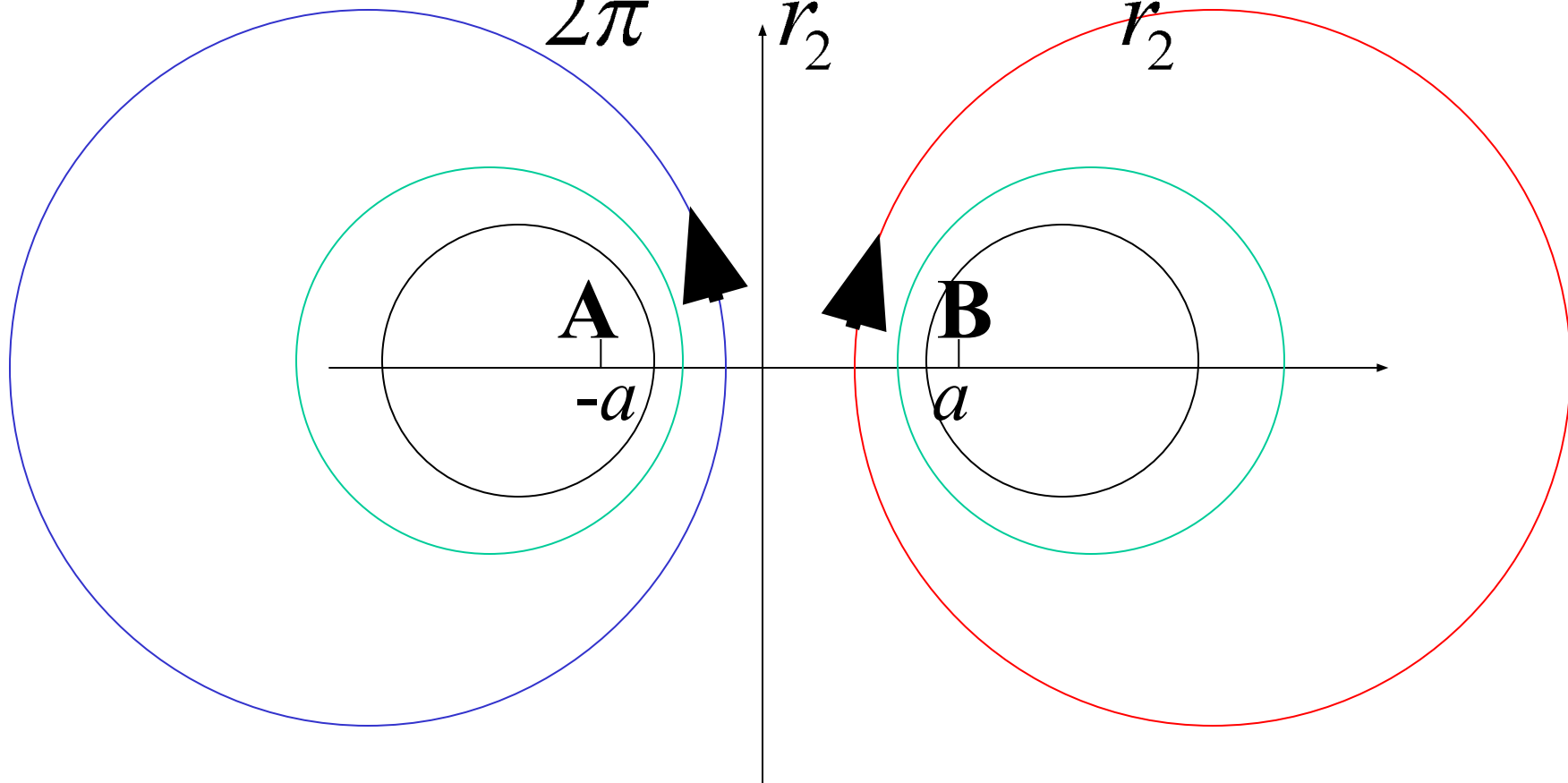
Записать функцию тока для вихревой пары в потоке жидкости, имеющего постоянную скоростью  $U$ .

**Скорость потока равна по модулю скорости пары, но противоположна по направлению.**



# Линии тока вихревой пары

$$\psi = \text{const} \quad \psi = \frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}, \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \text{const}$$



$$\gamma_1|_{[-a]} = 2\pi\mu,$$

$$\gamma_2|_{[+a]} = -2\pi\mu,$$

Функция тока для течения, имеющего постоянную скорость вдоль оси ординат

$$U = - \frac{\partial \Psi_{\text{потока}}}{\partial x}$$

$$\Psi_{\text{потока}} = - \int U dx = -Ux$$

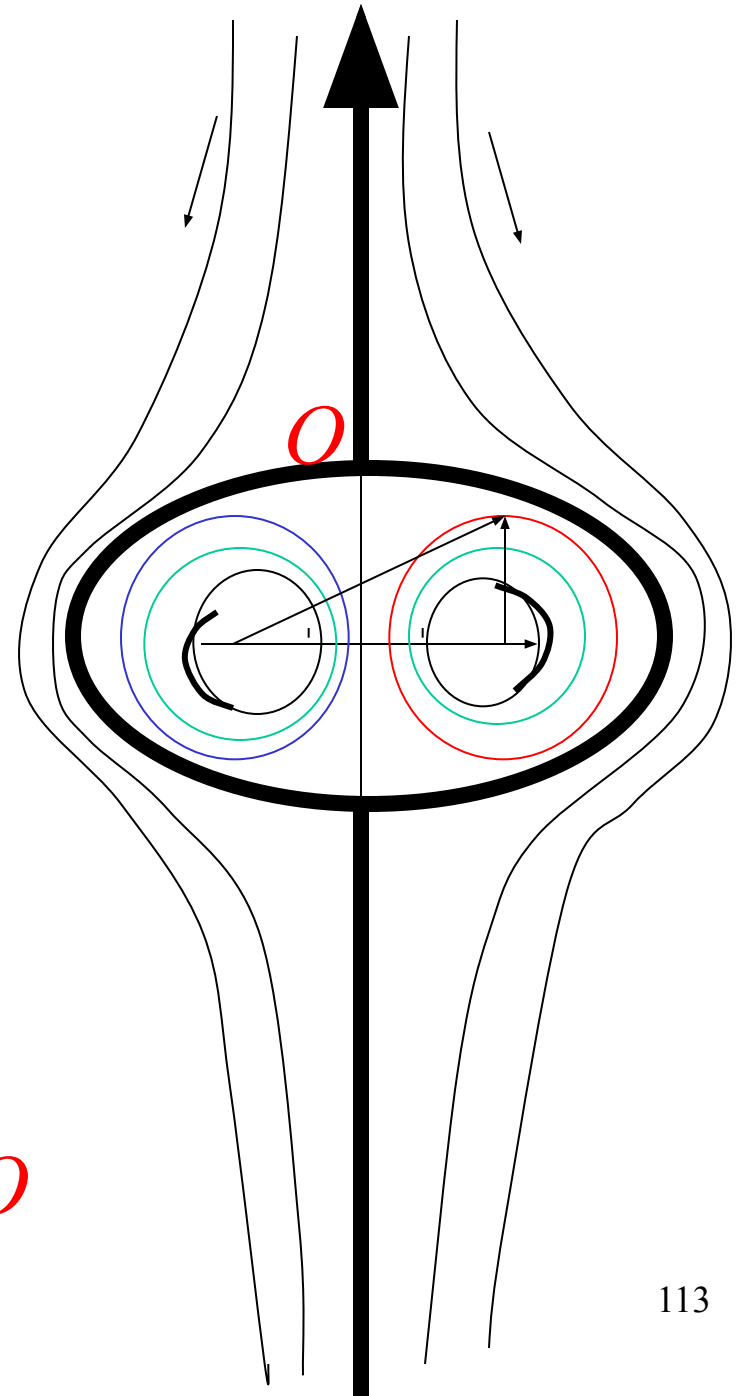
$$U = -V_{\text{пары}}$$

$$V_{\text{пары}} = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB} = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA} = \frac{|\gamma|}{4\pi a}$$

$$\Psi_{\text{потока}} = \frac{|\gamma| x}{4\pi a}$$



# Относительные линии тока вихревой пары



$$\psi = \frac{\gamma}{2\pi} \left( \frac{x}{2a} + \ln \frac{r_1}{r_2} \right)$$

$\psi = 0$  на оси  $y$  и на овале  $O$   
(жирная линия).

Жидкость внутри овала  $O$  движется вместе с вихрями.

Жидкость вне овала  $O$  обтекает этот овал как твердый цилиндр.

Полуоси овала  $O$  приблизительно имеют длину  $2.09a$  и  $1.73a$ .

# №2

**Найти в ортогональной системе координат уравнения линий тока для**

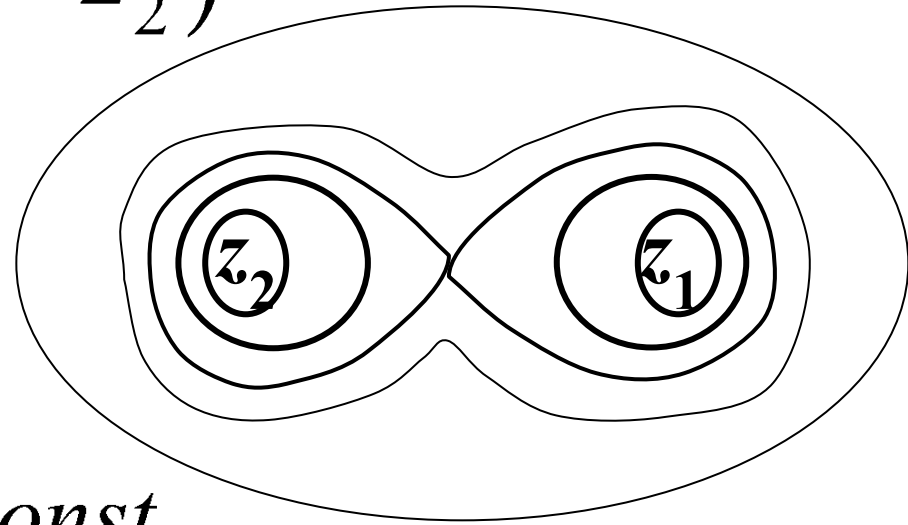
**1) случая двух вихрей одинаковой интенсивности**

**2) пары вихрей**

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_1) + \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_2)$$

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - z_1)(z - z_2)$$

$$\psi = -\frac{\gamma}{2\pi} \ln(r_1 r_2)$$



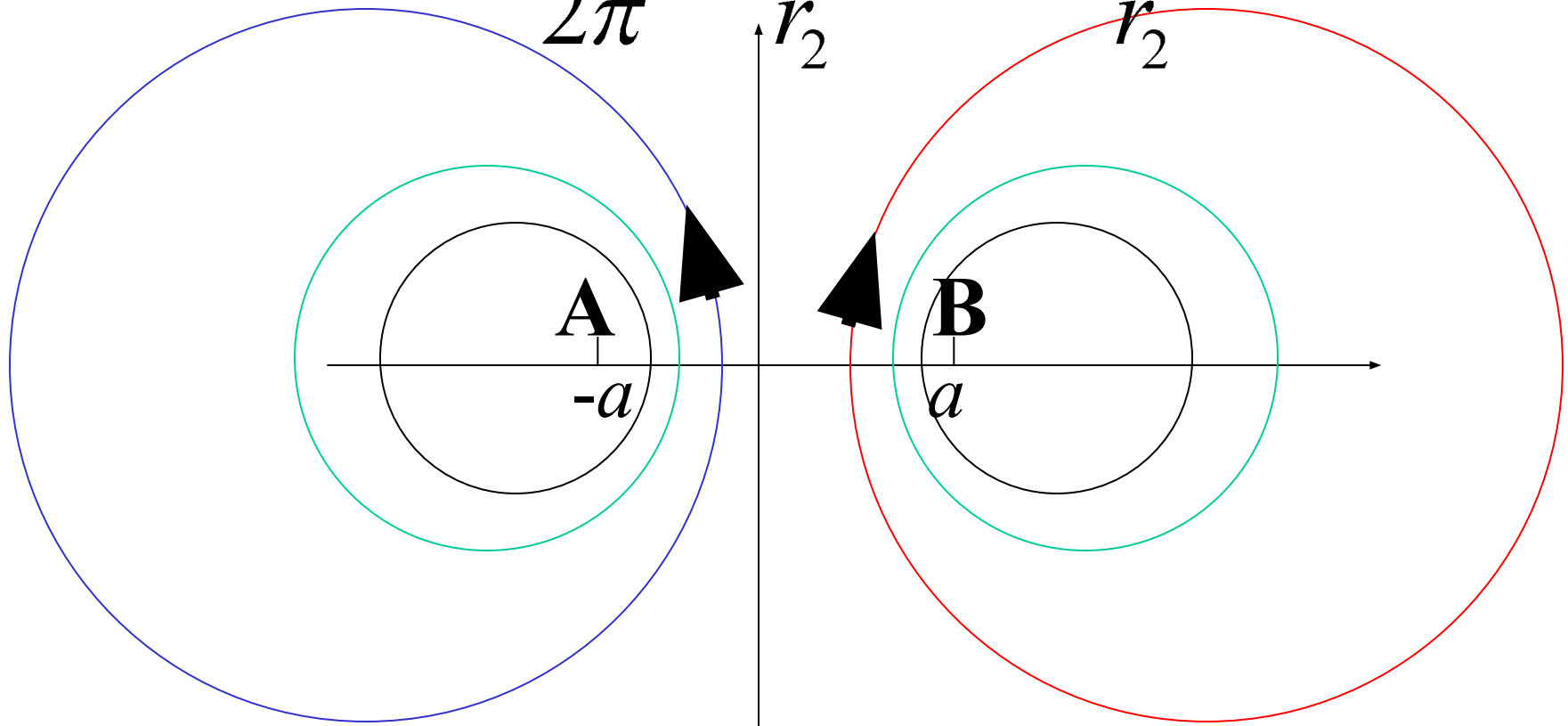
На линии тока  $\psi = const$

$$r_1 r_2 = const$$

$$\left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right] \left[ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \right] = const$$

# Линии тока вихревой пары

$\psi = \text{const}$       $\psi = \frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}, \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \text{const}$

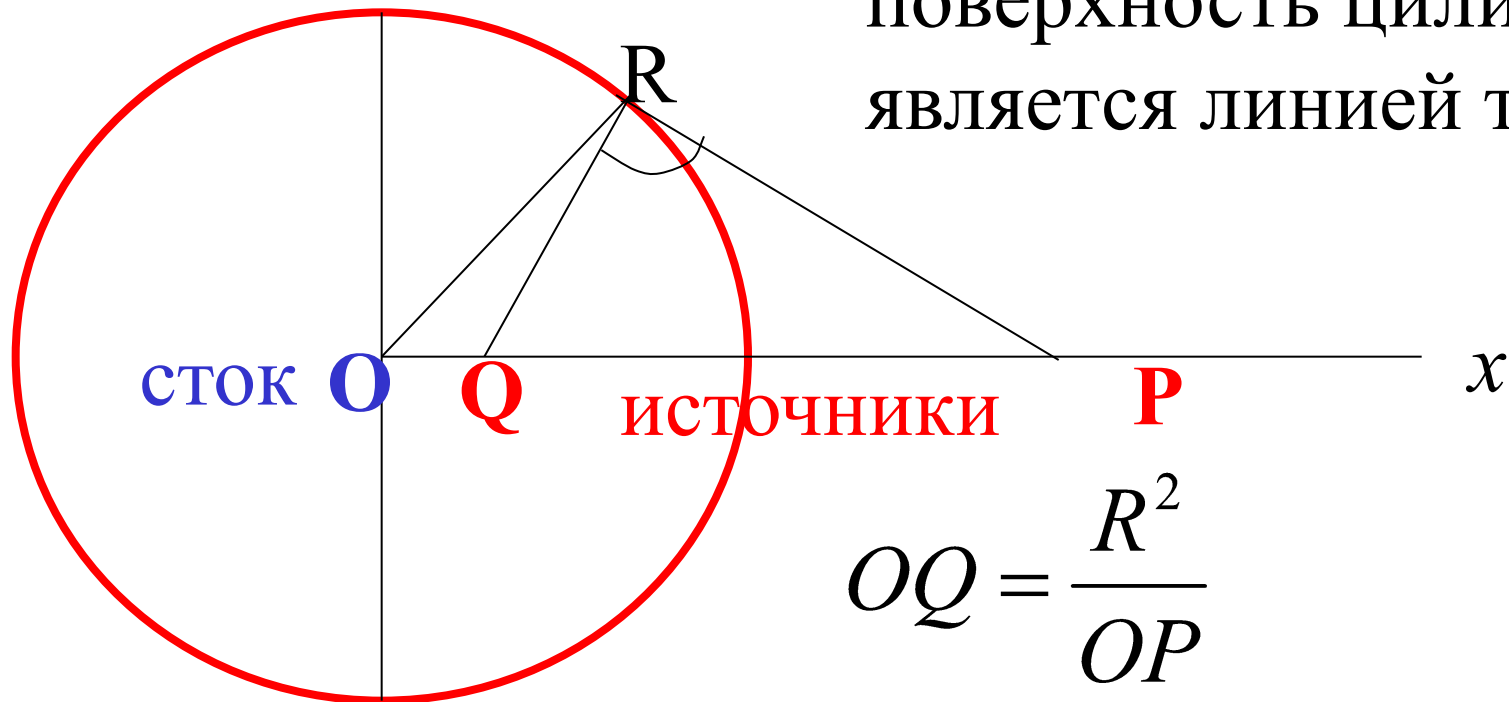


$$\left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right] = \text{const} \left[ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \right]$$

№3

При обтекании цилиндра жидкостью, его поверхность должна быть линией тока, а  $\psi = \text{const}$ . Пусть в центре цилиндра имеется сток, а на оси  $Ox$  лежат два источника: один внутри цилиндра, другой вне цилиндра,  $Q$  – инверсия точки  $R$ , мощность одинакова. Показать, что

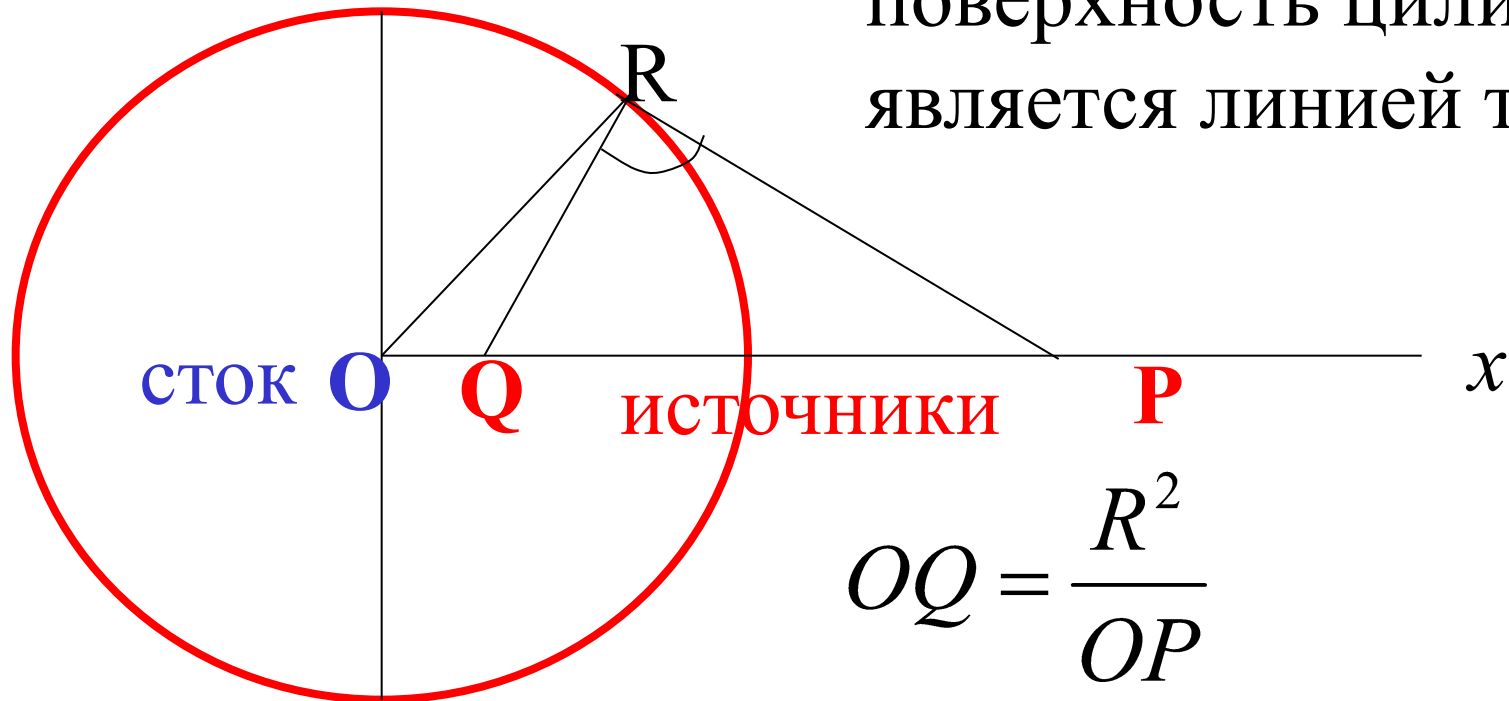
поверхность цилиндра является линией тока



$$OQ = \frac{R^2}{OR}$$

При обтекании цилиндра жидкостью, его поверхность должна быть линией тока, а  $\psi = \text{const}$ . Пусть в центре цилиндра имеется сток, а на оси  $Ox$  лежат два источника: один внутри цилиндра, другой вне цилиндра,  $Q$  – инверсия точки  $R$ , мощность одинакова. Показать, что

поверхность цилиндра является линией тока





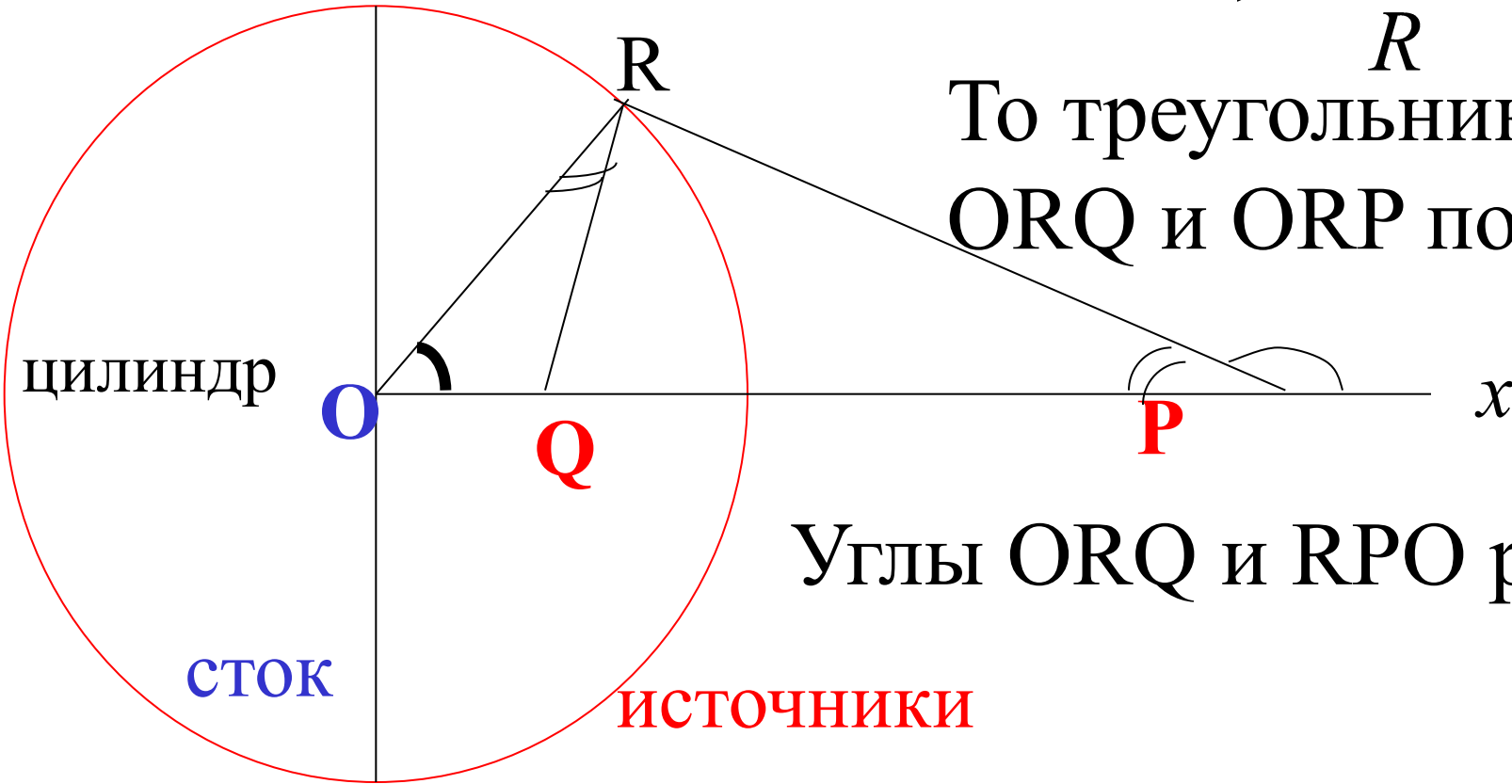
$$w = \varphi + i\psi \quad z = re^{i\theta}$$

$$\varphi + i\psi = \mu \ln(re^{i\theta}) = \mu \ln r + i\mu\theta,$$

$$\varphi = \mu \ln r, \quad \psi = \mu\theta$$

Так как,  $\frac{OQ}{R} = \frac{R}{OP}$

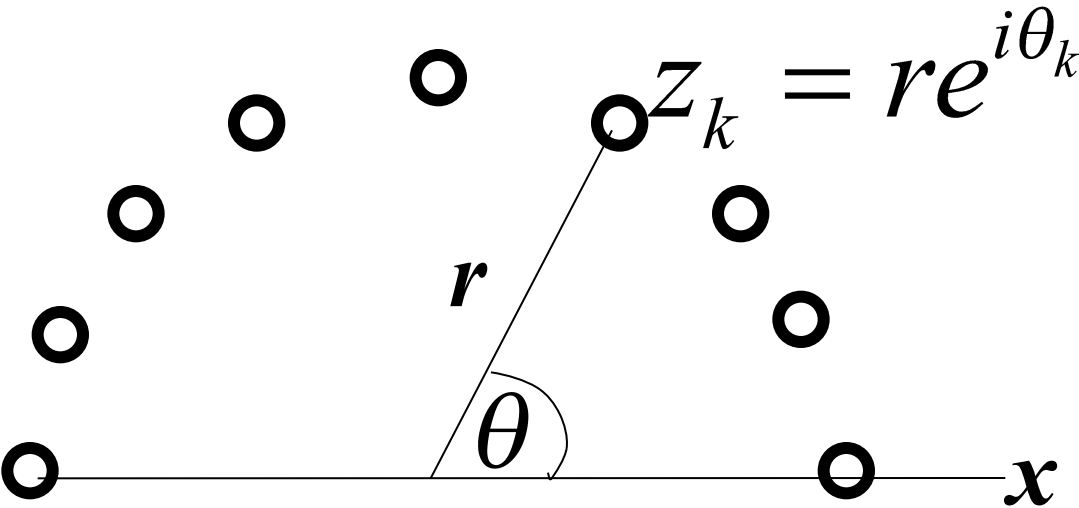
То треугольники  
ORQ и ORP подобны



Углы ORQ и RPO равны

$$\begin{aligned} \psi &= -\mu(\angle RP_x + \angle RQ_x - \angle RO_x) = \\ &= -\mu(\angle RP_x + \angle ORQ) = \\ &= -\mu(\angle RP_x + \angle RPQ) = -\pi\mu = \text{const} \end{aligned}$$

# Вихревой цилиндрический слой

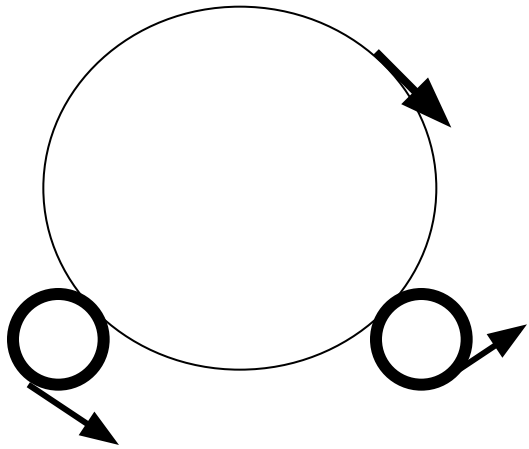


№4

○ Интенсивность вихрей  
на элементе дуги  $r d\theta$

$$\gamma r d\theta$$

Найти координаты центра системы



№5

Интенсивность твердотельно вращающихся вихрей такова, что тангенциальные составляющие скорости в точках соприкосновения равны

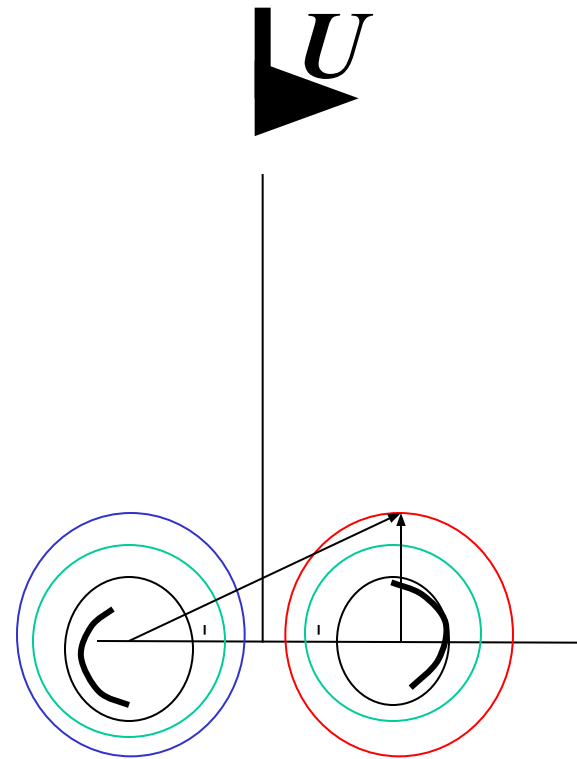
Найти координаты центра системы

**РЕШЕНИЯ**

# №1

Записать функцию тока для вихревой пары в потоке жидкости, имеющего постоянную скоростью  $U$ .

**Скорость потока равна по модулю скорости пары, но противоположна по направлению.**



# №2

**Найти в ортогональной системе координат уравнения линий тока для**

**1) случая двух вихрей одинаковой интенсивности**

**2) пары вихрей**

№3