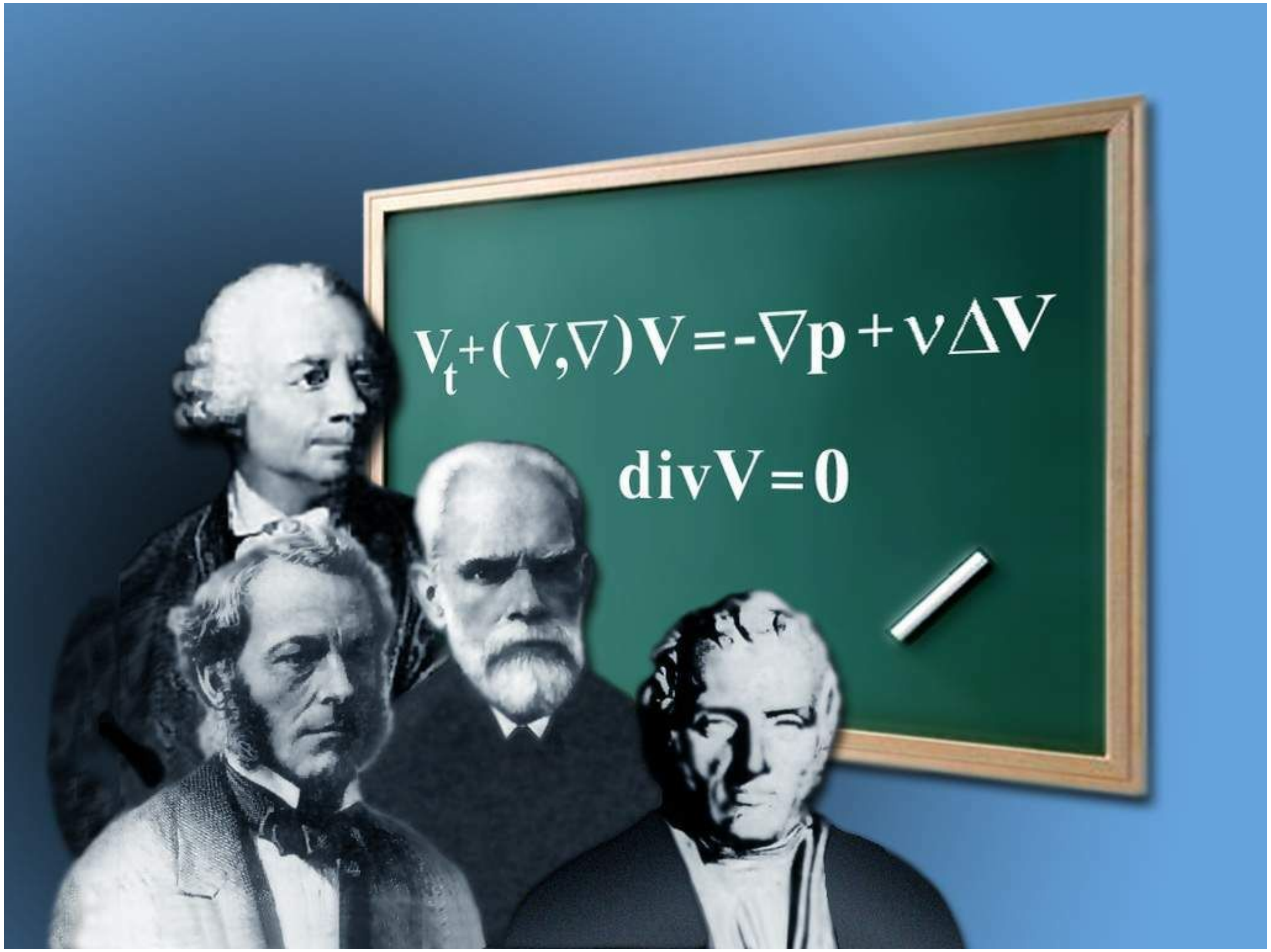



# Эйлер, Ляпунов, Навье и Стокс

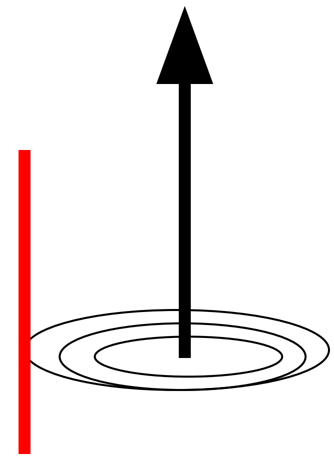
# Поле скорости по заданному полю вихрей и расхождения скорости

Компоненты ротора скорости: $\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$

$$\Omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

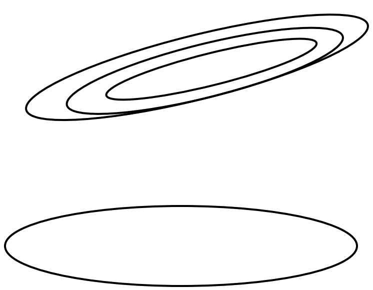


Вихревые линии - линии, направление которых совпадает всюду с мгновенной осью вращения жидкости.

Дифференциальное уравнение вихревых линий

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$

Если через каждую точку малой замкнутой кривой провести соответствующую вихревую линию, то получим трубку, которая называется вихревой трубкой. Жидкость внутри трубки образует вихревую нить или просто вихрь.



# Задача

**Заданы распределения вихря и дивергенции скорости в любой точке жидкости, нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей данный объем жидкости**

# Предположения

1. Жидкость заполняет все пространство,
2. находится в покое на бесконечности.
3. Заданы вихрь скорости $\mathbf{\Omega}$ расхождение (дивергенция) скорости $\Theta$, равные 0 вне объема $\tau$.
4. Область $\tau$ может быть разложена на конечное число частей, в которых $\Theta$ и $\mathbf{\Omega}$ равномерно непрерывны, так же как и их частные производные.

5. На поверхностях разрыва нормальная составляющая $\boldsymbol{\Omega}$ остается непрерывной

Искомую скорость *u* будем рассматривать как сумму двух слагаемых: одно определяется расхождением скорости, и ее вихрь равен нулю, а второе – ротором скорости, а ее дивергенция равна нулю.

Скорость задается уравнениями:

$$div u = \Theta \quad rot u = \Omega$$

$$u = u_1 + u_2$$

существует

$$div u_1 = \Theta \quad rot u_1 = 0 \quad u_1 = \nabla \varphi$$

$$rot u_2 = \Omega \quad div u_2 = 0$$

**Для определения $u_1$ получаем уравнение Пуассона**

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Theta$$

Предположим, что функция $\Theta$ равна 0 всюду, кроме очень малой окрестности $\tau_0$ начала координат, причем

$$\int_{\tau_0} \Theta \, d\tau = 1$$

## По теореме Гаусса

$$\int_{\tau_0} \overset{\triangle}{\nabla} u \, d\tau = \int_{s_0} u_n \, ds$$

Т.е. объемный интеграл от расхождения вектора скорости равен потоку вектора скорости через поверхность $S_0$, ограничивающую объем $\tau_0$. Поток должен равняться единице в силу предположения

$$\int_{\tau_0} \Theta \, d\tau = 1$$

Пусть τ→0. Получаем картину течения от точечного источника в начале координат интенсивности 1. В силу симметрии потенциал скорости φ – функция только $r$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\varphi$ всюду, кроме начала координат, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

φ – функция только *r, в* сферических координатах нет зависимости от широты и долготы.

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} = 0$$

Интегрируем:

$$r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} = Const$$

Произвольная постоянная определяется из условия, что поток скорости через произвольную сферу с центром в начале координат равен 1. На сфере нормальная составляющая скорости имеет постоянное значение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Const}{r^2}$$

а площадь поверхности сферы равна $4\pi r^2$

$$\Pi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} 4\pi r^2 = \frac{Const}{r^2} 4\pi r^2 = 1$$

Получаем: $$Const = \frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r}$$

Произвольная постоянная не влияет на величину скорости течения и может быть отброшена

Предположим, что интенсивность источника имеет значение $q$

$$\int_{\tau} \Theta d\tau = q$$

В этом случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad \varphi = -\frac{q}{4\pi r} \qquad u = \frac{q}{4\pi r^2}$$

**Если задано распределение источников $\Theta(\xi, \eta, \zeta)$**

$$\varphi(x, y, z) = -\int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r} d\tau$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Где $r$ расстояние от точки $N(x,y,z)$, где ищем поле скорости до точки $M(\xi,\eta,\zeta)$, где расположен источник. Интегрировать надо по $(\xi,\eta,\zeta)$.

# Решение системы

$$div u_1 = \Theta$$

$$rot u_1 = 0$$

$$u_1 = \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau$$

**Определим вектор $u_2$ для системы**

$$rot\,\vec{u}_2 = \vec{\Omega} \qquad div\,\vec{u}_2 = 0$$

**Удовлетворим второму уравнению, если положим**

$$\vec{u}_2 = rot\vec{A}$$

**где А – векторный потенциал. Тогда**

$$rot\; rot\vec{A} = \vec{\Omega}$$

Можно доказать тождество:

$$rot\; rot\vec{A} = grad\; div\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Получаем уравнение:

$$grad\ div\vec{A} - \Delta\vec{A} = \vec{\Omega}$$

$div\vec{A} = 0$ (Можно считать не нарушая общности)

$$\Delta\vec{A} = -\vec{\Omega}$$

$$\Delta A_x = -\Omega_x \quad \Delta A_y = -\Omega_y \quad \Delta A_z = -\Omega_z$$

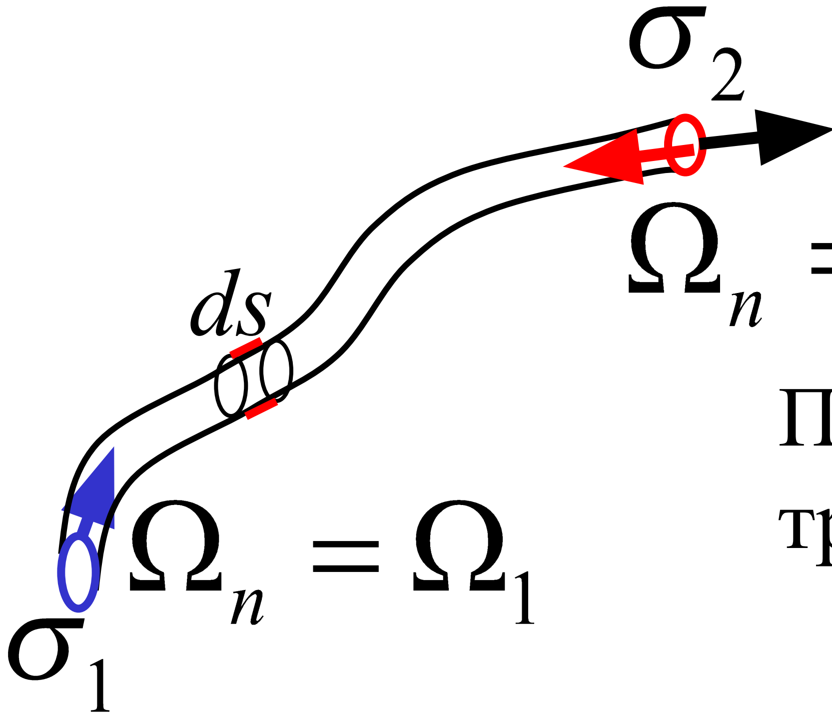
$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau$$

$$u_2 = \frac{1}{4\pi} rot \int \frac{\Omega}{r} d\tau$$

$$\vec{u} = grad\varphi + rot\vec{A}$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta}{r}d\tau \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\Omega}}{r}d\tau$$

Одна вихревая нить
Несжимаемая
жидкость, покоящаяся
на бесконечности




Применяя к вихревой трубке свойство

$$\int\limits_S \Omega_n ds = 0$$

учитывая, что боковые поверхности трубки – есть вихревые линии, т.е. параллельны ротору скорости, получаем для суммарного потока вихря:

$$\Omega_1\sigma_1 - \Omega_2\sigma_2 = 0$$

$$\Theta = 0 \qquad \Delta\varphi = 0$$

$$d\tau = \sigma ds$$

$$\Omega_x = \Omega\cos(\Omega, x) = \Omega\frac{d\xi}{ds}$$

$$\Omega_y = \Omega\frac{d\eta}{ds} \qquad \Omega_z = \Omega\frac{d\zeta}{ds}$$

$$\frac{\Omega_x d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma d\xi}{r}; \qquad \frac{\Omega_y d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma d\eta}{r};$$

$$\frac{\Omega_z d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma d\zeta}{r}$$

$$\vec{u} = rot\vec{A} \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_L \frac{\vec{\Omega}}{r}d\tau$$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\xi}{r}; A_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\eta}{r}; A_z = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\zeta}{r}$$

$$\gamma = \Omega\sigma$$

$$u_x = \left(rot\vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\right]$$

$$r = \sqrt{\left(x-\xi\right)^2 + \left(y-\eta\right)^2 + \left(z-\zeta\right)^2}$$

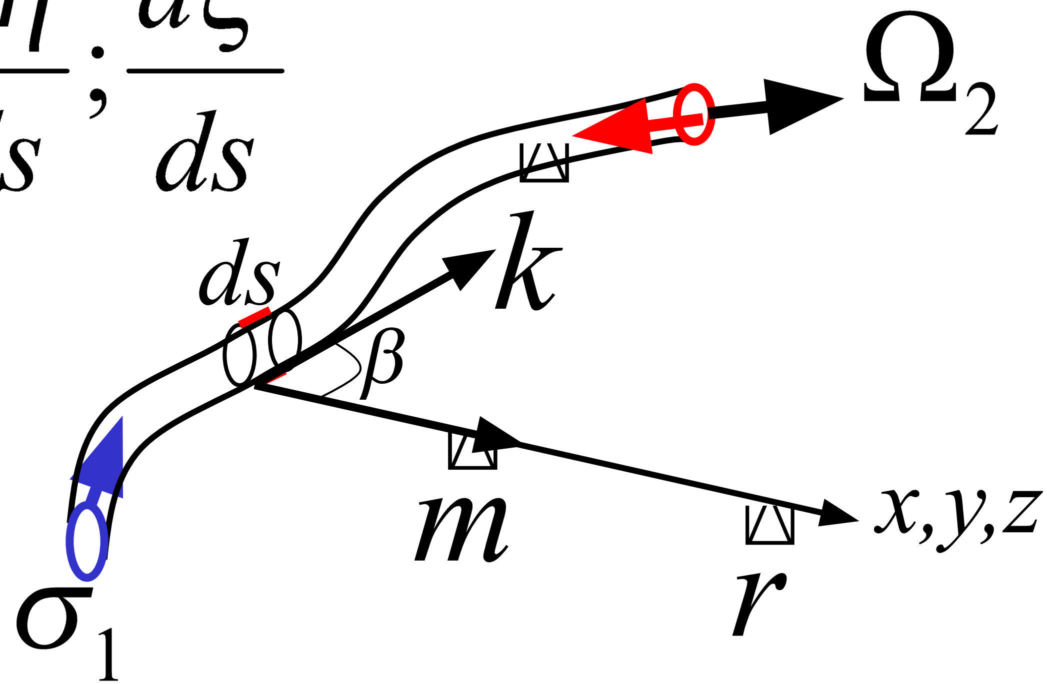
$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[ \left( \frac{\eta - y}{r} \right) \frac{d\zeta}{ds} - \left( \frac{\zeta - z}{r} \right) \frac{d\eta}{ds} \right] \frac{ds}{r^2}$$

$$u_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[ \left( \frac{\zeta - z}{r} \right) \frac{d\xi}{ds} - \left( \frac{\xi - x}{r} \right) \frac{d\zeta}{ds} \right] \frac{ds}{r^2}$$

$$u_z = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[ \left( \frac{\xi - x}{r} \right) \frac{d\eta}{ds} - \left( \frac{\eta - y}{r} \right) \frac{d\xi}{ds} \right] \frac{ds}{r^2}$$

Составляющие единичного вектора **k**

$$\frac{d\xi}{ds};\frac{d\eta}{ds};\frac{d\zeta}{ds}$$




Составляющие единичного вектора **m**

$$-\frac{\xi-x}{r};-\frac{\eta-y}{r};-\frac{\zeta-z}{r}$$

Вклад в величину скорости в точке *(x,y,z)* от элемента вихревой трубки *ds* определяется выражением:

$$\vec{u}_{ds} = \frac{\gamma}{4\pi}\left(\vec{k} \times \vec{m}\right)\frac{ds}{r^2}$$

$$\left|u_{ds}\right| = \frac{\gamma}{4\pi}\frac{\sin(\beta)ds}{r^2}$$

Электродинамика:

Сила, действующая на магнитный полюс в точке $(x,y,z)$ от элемента проводника $ds$, *по которому течет ток (Био и Савара)*

Прямолинейные

вихри

плоское движение

несжимаемая жидкость

Пусть движение происходит в плоскости *x*, *y*. Вихревые линии являются прямыми, параллельными оси *z*. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ – координаты точек вихревой трубки, *ds* – элемент дуги трубки

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}=0;\ \frac{\partial\eta}{\partial s}=0\qquad\frac{\partial\varsigma}{\partial s}=1$$

Скорость жидкости в точке (*x*, *y)* определяется:

$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta - y}{r^3}d\zeta$$

$$u_y = -\frac{\gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi - x}{r^3}d\zeta$$

$$u_z = 0$$

Считая ξ, η, (*x*, *y*, *z*) *постоянными*, интегрируем

Достаточно рассматривать движение на плоскости $0xy$, причем вместо вихревой нити точку пересечения ее с плоскостью $0xy$. Будем называть ее точечным вихрем. Под влиянием такого вихря частицы жидкости двигаются по окружностям, центром которых является вихрь. Положительным $\gamma$ соответствует движение против часовой стрелки.

**Вследствие симметрии движения центр вихря не будет смещаться**.

Найти комплексный потенциал для точечного вихря.

$$u_x = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{y-\eta}{r^2}; u_y = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{x-\xi}{r^2}$$

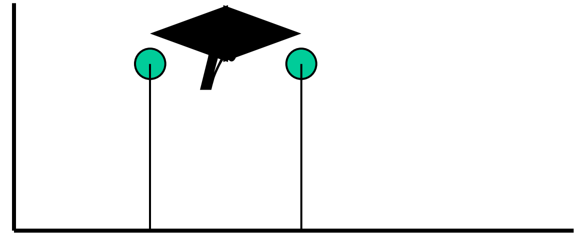
$$u_x - iu_y = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{y-\eta+i(x-\xi)}{r^2} =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi i}\frac{\left(z^* - z_0^*\right)}{\left(z-z_0\right)\left(z^*-z_0^*\right)} = \frac{\gamma}{2\pi i}\frac{1}{\left(z-z_0\right)}$$

$$z_0 = \xi + i\eta; \quad z^* = x - iy; \quad z_0^* = \xi - i\eta$$

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0); \quad \frac{dw}{dz} = u_x - iu_y$$

# 2 вихря



**Две параллельные прямые вихревые нити в точках $z_1$ и $z_2$. Показать, что нити всегда сохраняют одинаковое расстояние друг от друга и вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг общего центра $C$. Пусть циркуляция одной нити равна $\gamma_1$, а второй $\gamma_2$.**

Запишите комплексный потенциал для 2 нитей.

$$w = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\ln(z - z_1) + \frac{\gamma_2}{2\pi i}\ln(z - z_2)$$

Комплексная сопряженная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{dw}{dz} = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_1)} + \frac{\gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_2)}$$

$$u_x - iu_y = \frac{dz^*}{dt}$$

$$\frac{dz^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_1)} + \frac{\gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_2)}$$

Скорость первого вихря в точке $z_1$ (сам на себя не действует)

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}$$

Скорость второго вихря в точке $z_2$

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}$$

Отделяем мнимые и действительные части.

Обозначим расстояние между вихрями

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\times\gamma_1 \qquad + \qquad \times(\gamma_2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (1) \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (2) \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (4)$$

$$\gamma_1\frac{dx_1}{dt} + \gamma_2\frac{dx_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \mathrm{const}$$

$$\gamma_1\frac{dy_1}{dt} + \gamma_2\frac{dy_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 = \mathrm{const}$$

Получаем интеграл движения центра инерции системы двух вихрей

$$\frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \mathrm{const}$$

$$\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \mathrm{const}$$

**Точка *C* (центр инерции) с координатами**

$$x_c = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2}; \quad y_c = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

**Остается неподвижной во все время движения**

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (1) \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (2) \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (4)$$

**Вычитаем из первого третье уравнение, из второго – четвертое.**

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \qquad \times\left(x_1 - x_2\right)$$

$$+$$

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \qquad \times\left(y_1 - y_2\right)$$

$$(x_1 - x_2)\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2)\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0$$

Интегрируем и получаем:

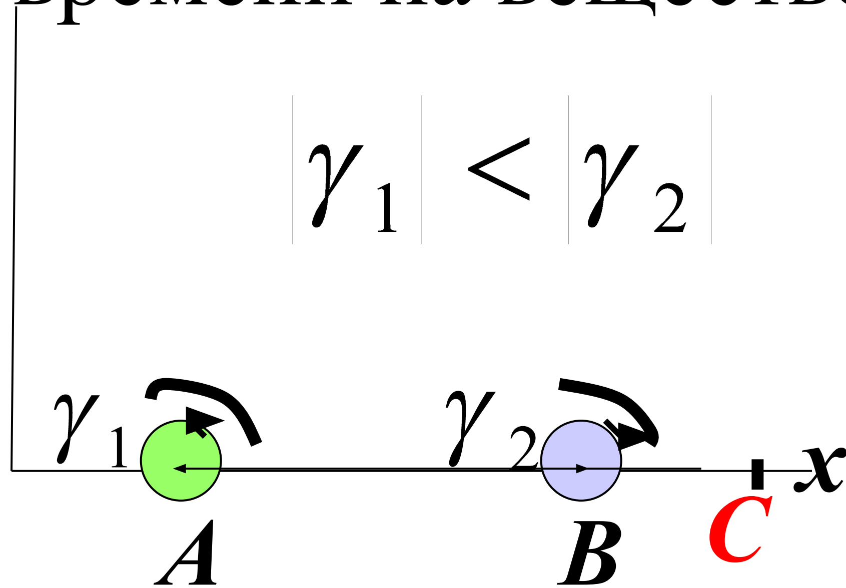
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \mathrm{const}$$

$$r = \mathrm{const}$$

Расстояние между вихрями не меняется в процессе перемещения

Два вихря, вращающиеся в разных направлениях, находятся в начальный момент времени на вещественной оси.

$$\gamma_1 < \gamma_2$$



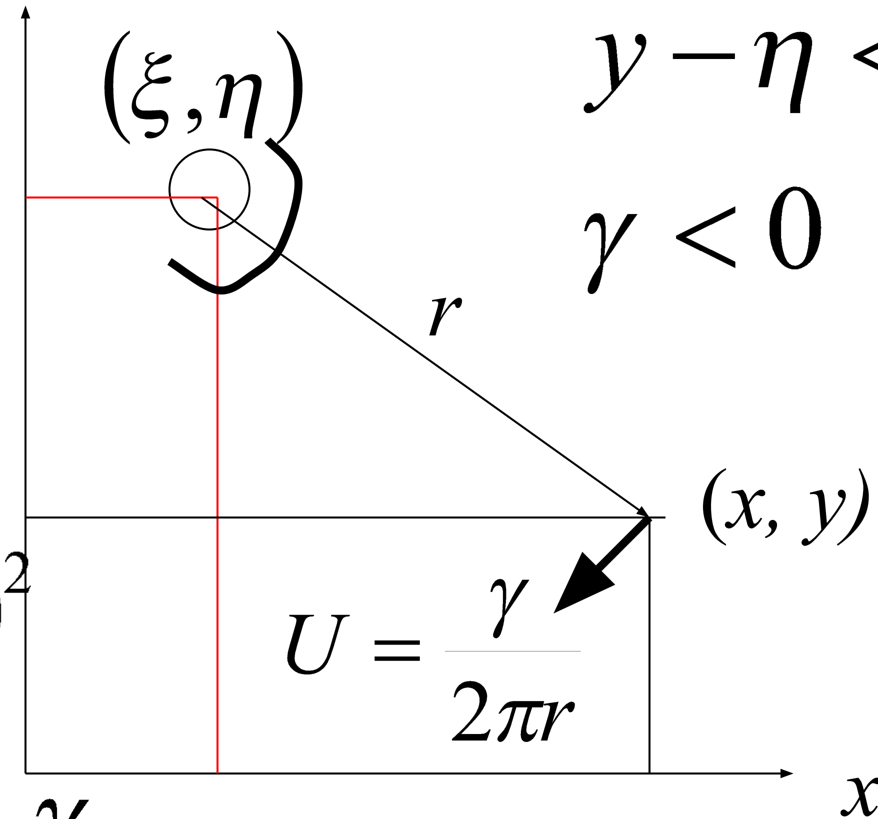

Найти скорости вихрей, расстояние до центра системы, угловую скорость вращения вихрей.

Вихревая нить с координатами $(\xi, \eta)$ и циркуляцией $\gamma$ сообщает жидкости в точке $(x, y)$ скорость, компоненты которой равны

$$u_x = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{y-\eta}{r^2}$$

$$u_y = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{x-\xi}{r^2}$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

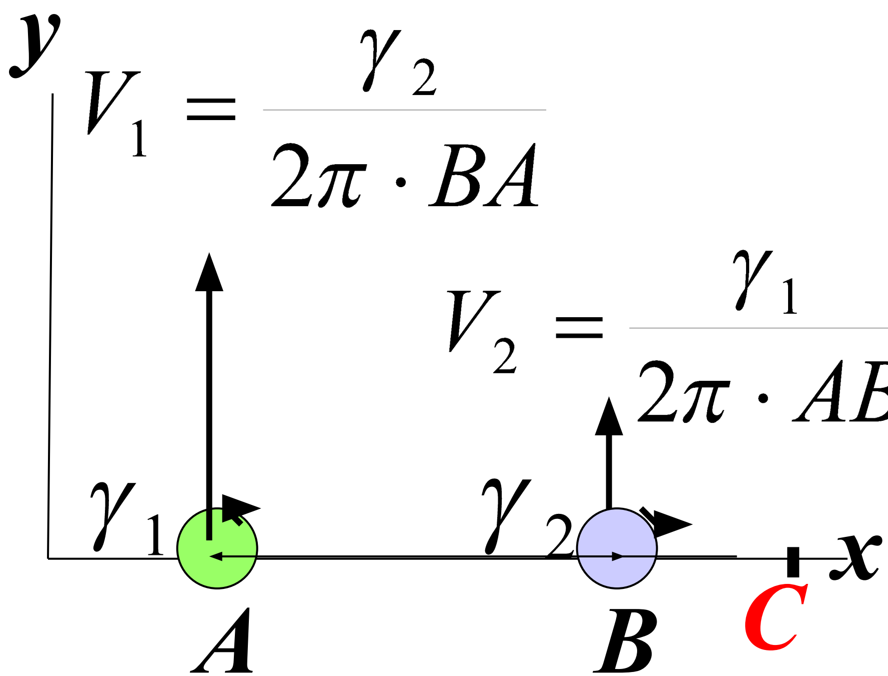



$$y - \eta < 0$$

$$\gamma < 0$$

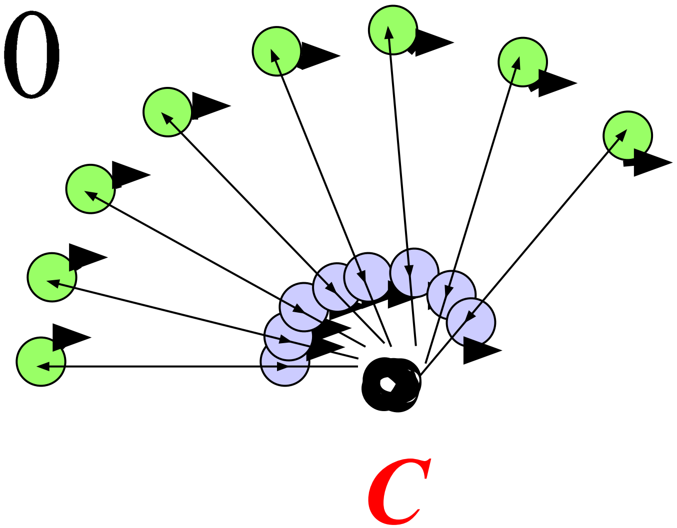
$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

$$|\gamma_1| < |\gamma_2| \qquad \gamma_1 > 0; \gamma_2 < 0$$




$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA}$$

$$V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB}$$




$$AC = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 \left(x_1 + AB\right)}{\gamma_1 + \gamma_2} - x_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} AB$$

# Угловая скорость вращения вихрей вокруг центра **C**

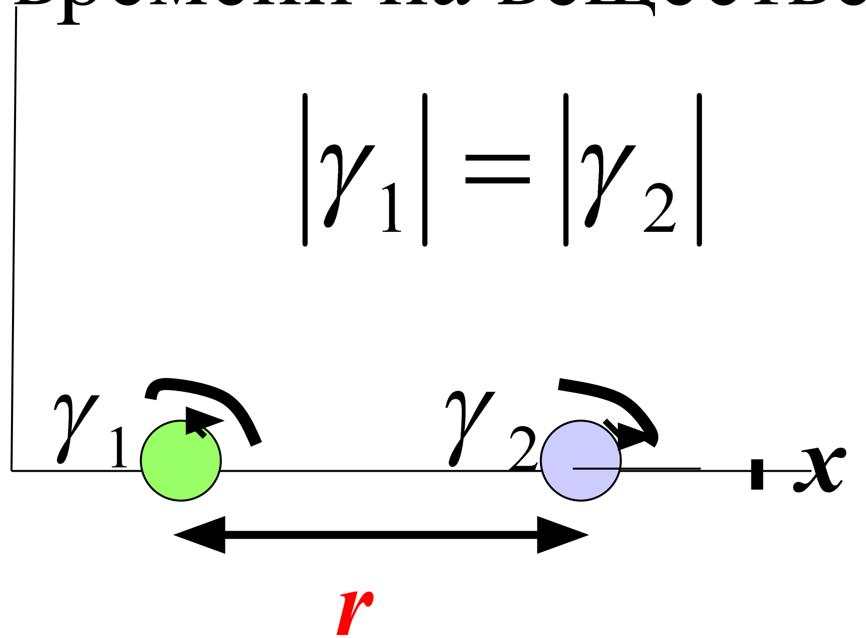
$$\left|\gamma_1\right| < \left|\gamma_2\right|$$

$$\omega_1 = \frac{V_1}{AC} = \omega_2 = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi \cdot AB^2}$$

Где будет точка С, если вихри вращаются в одном направлении?

Два вихря, вращающиеся в разных направлениях, находятся в начальный момент времени на вещественной оси.

$$|\gamma_1| = |\gamma_2|$$




Найти скорости вихрей, расстояние до центра системы.

Скорость первого вихря в точке $z_1$ (сам на себя не действует)

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z_1 - z_2}$$

Скорость второго вихря в точке $z_2$

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z_2 - z_1}$$

Отделяем мнимые и действительные части.

Обозначим расстояние между вихрями

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\frac{d\overset{*}{z_1}}{dt} = \frac{d\overset{*}{z_2}}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{(z_1 - z_2)}$$

$$\frac{d\overset{*}{z_1}}{dt} = \frac{d\overset{*}{z_2}}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i r} = -\frac{\gamma_1 i}{2\pi r}$$

Отделяем вещественную часть от мнимой :

$$u_{x1} = u_{x2} = 0 \qquad u_{y1} = u_{y2} = \frac{\gamma_1}{2\pi L}$$

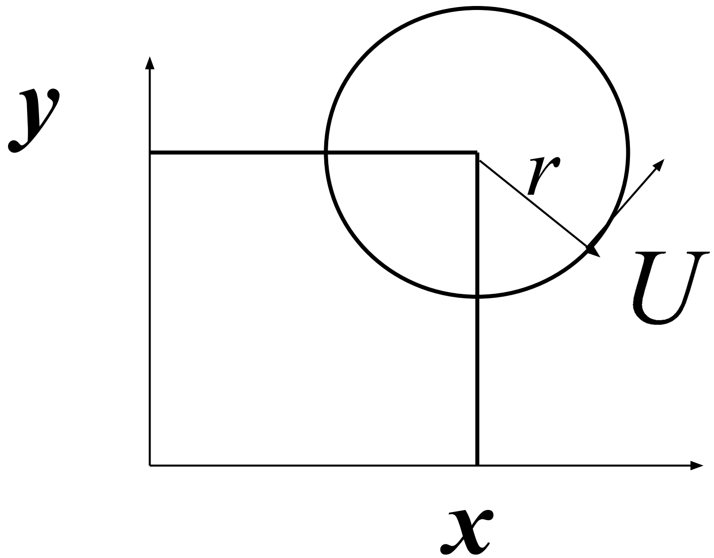
Вихри перемещаются с постоянной скоростью, перпендикулярно прямой, соединяющей вихри в положительном направлении оси $y$

# Пример 1

Одна вихревая нить в точке ($x,y$), циркуляция скорости внутри бесконечно малого сечения имеет постоянное значение.

Найти центр системы

$$\overline{x}_c = \frac{\gamma x}{\gamma} = x \qquad \overline{y}_c = \frac{\gamma y}{\gamma} = y$$




$$U = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

**Центр одиночного вихря не смещается во времени.**

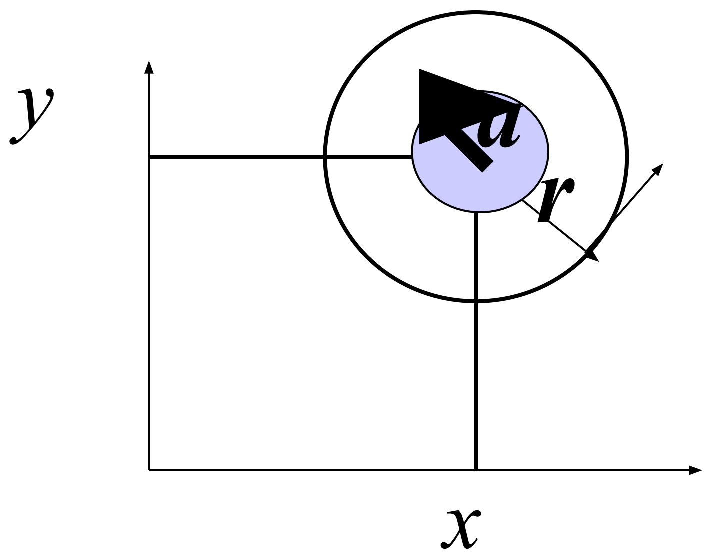
# Пример 2

Внутри круга радиуса $a$ жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью $\omega$. Определить скорость вне круга.

$$U = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

$$\gamma = \varsigma\sigma = \pm 2\omega\pi a^2$$

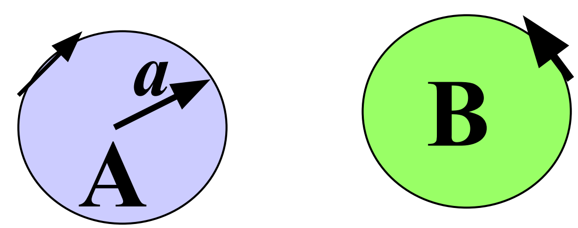
$$U = \frac{\omega a^2}{r}$$

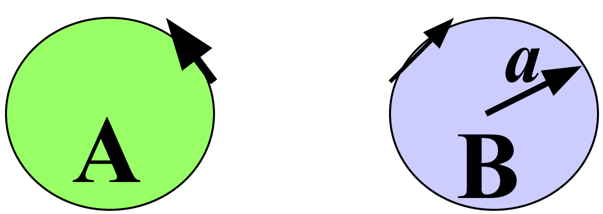



На границе вихря скорость равна **ω a**

# Пример 3

Как будут двигаться 2 вихря радиуса $a$, если они имеют циркуляцию разного знака, но одинаковую по модулю? Вихри вращаются как твердое тело.

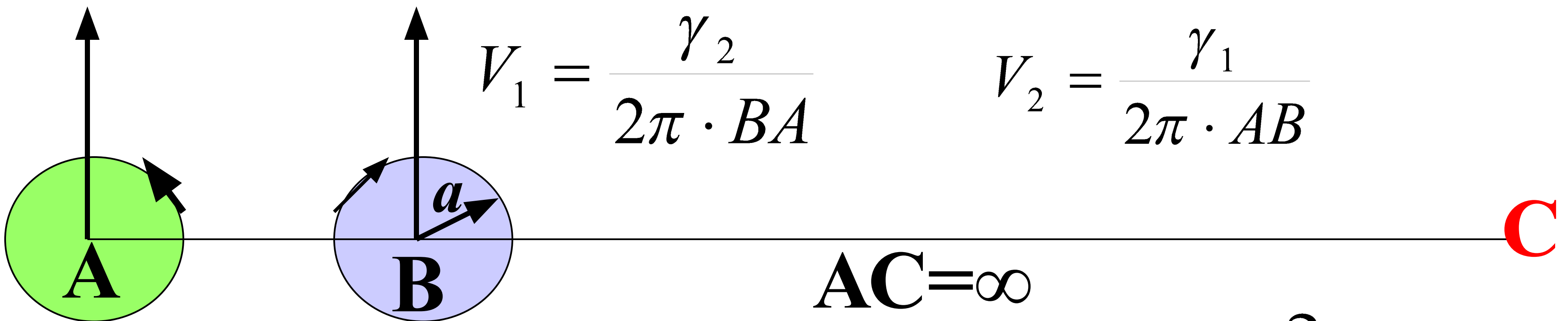


# Движение двух вихрей с противоположным направлением вращения и $\gamma_1 = -\gamma_2$

$$AC = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} AB = \infty$$

$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA} \qquad V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB}$$



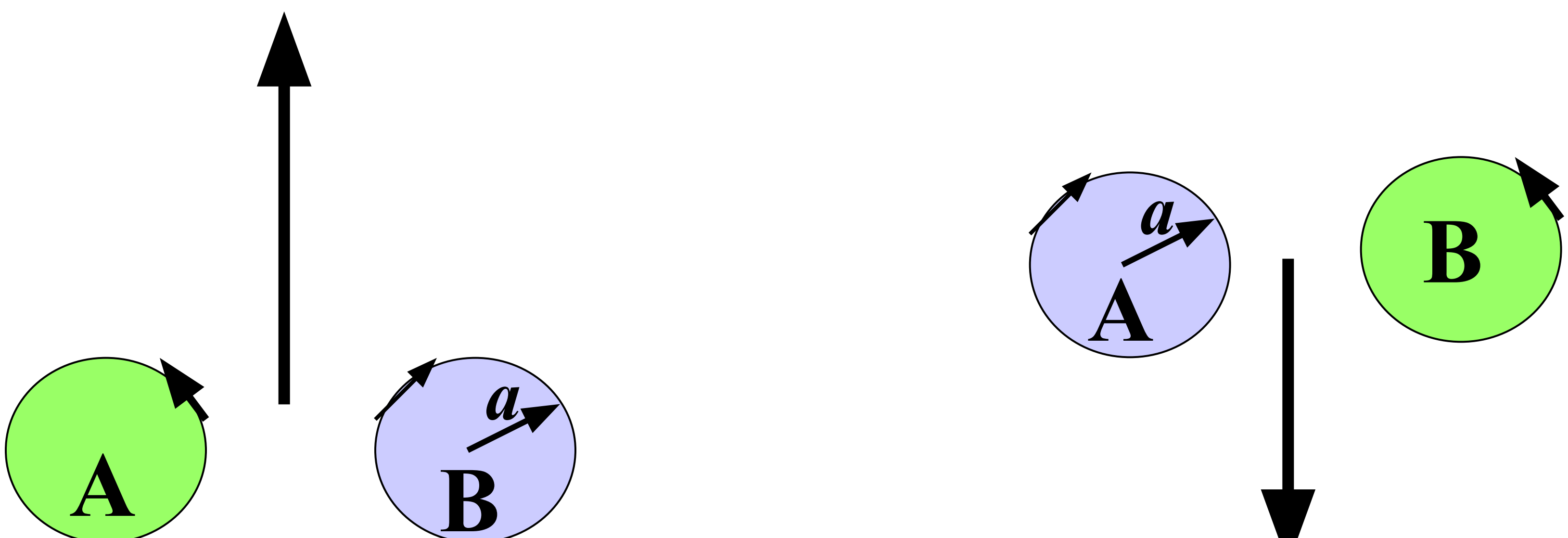

**AC=∞**

$$\gamma = \varsigma\sigma = \pm 2\omega\pi a^2$$

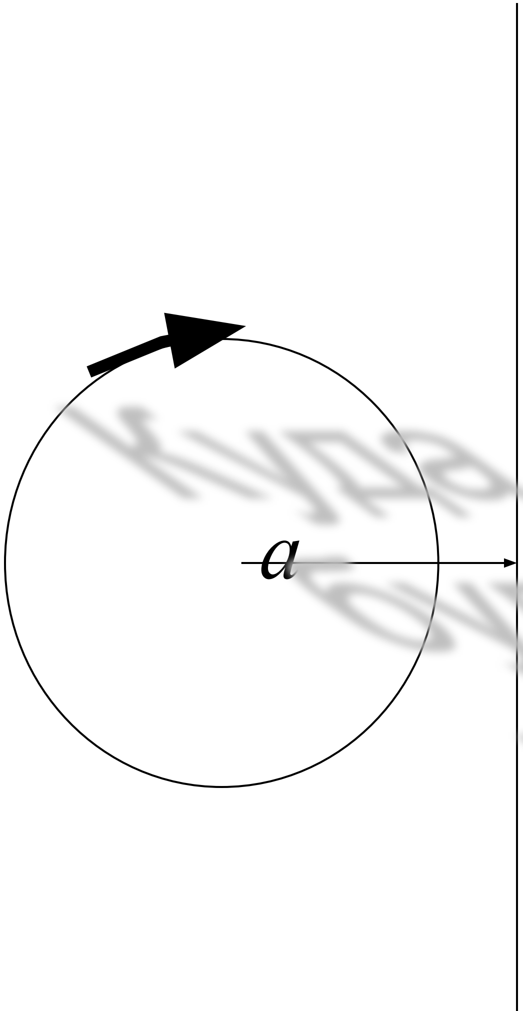
$$\mathbf{V_1 = V_2 =} \frac{\omega a^2}{AB}$$

**Вихри двигаются по прямой с одинаковой скоростью**

# Пример 3



# Пример 4

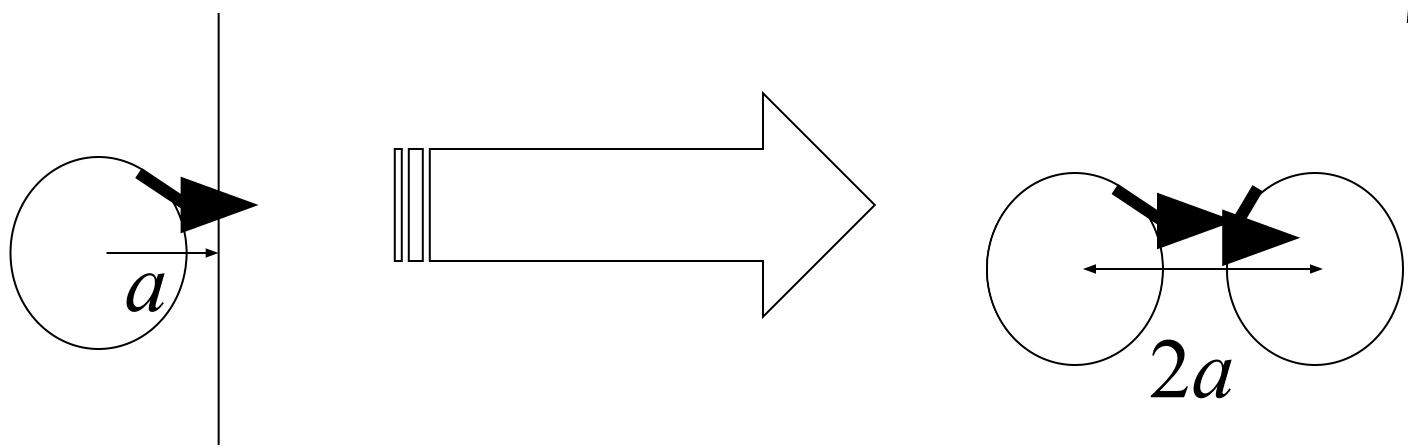



Куда
будет двигаться
вихрь?

Найти скорость перемещения вихря у твердой стенки

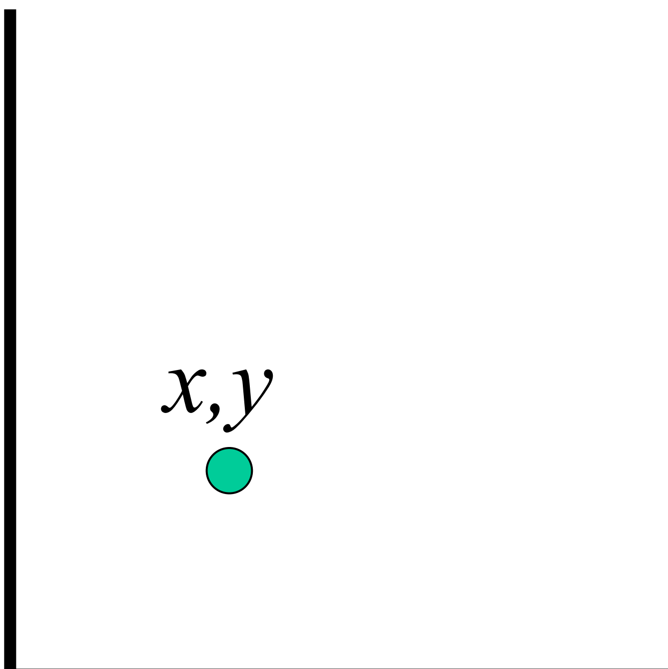
Так как скорость жидкости во всех точках плоскости симметрии направлена по касательной, то можно предположить, что эта плоскость образует твердую границу для жидкости. Таким образом систему «вихрь у твердой границы» можно смоделировать системой, представляющей собой пару вихрей. Вихрь у твердой границы будет перемещаться с постоянной скоростью

$$V = \frac{\gamma}{4\pi \cdot a}$$



# Пример 5

В точке с координатами *x,y* находится прямая вихревая нить. Жидкость ограничена твердыми стенками, образующими прямой угол  вдоль осей координат. Найти траекторию вихря.

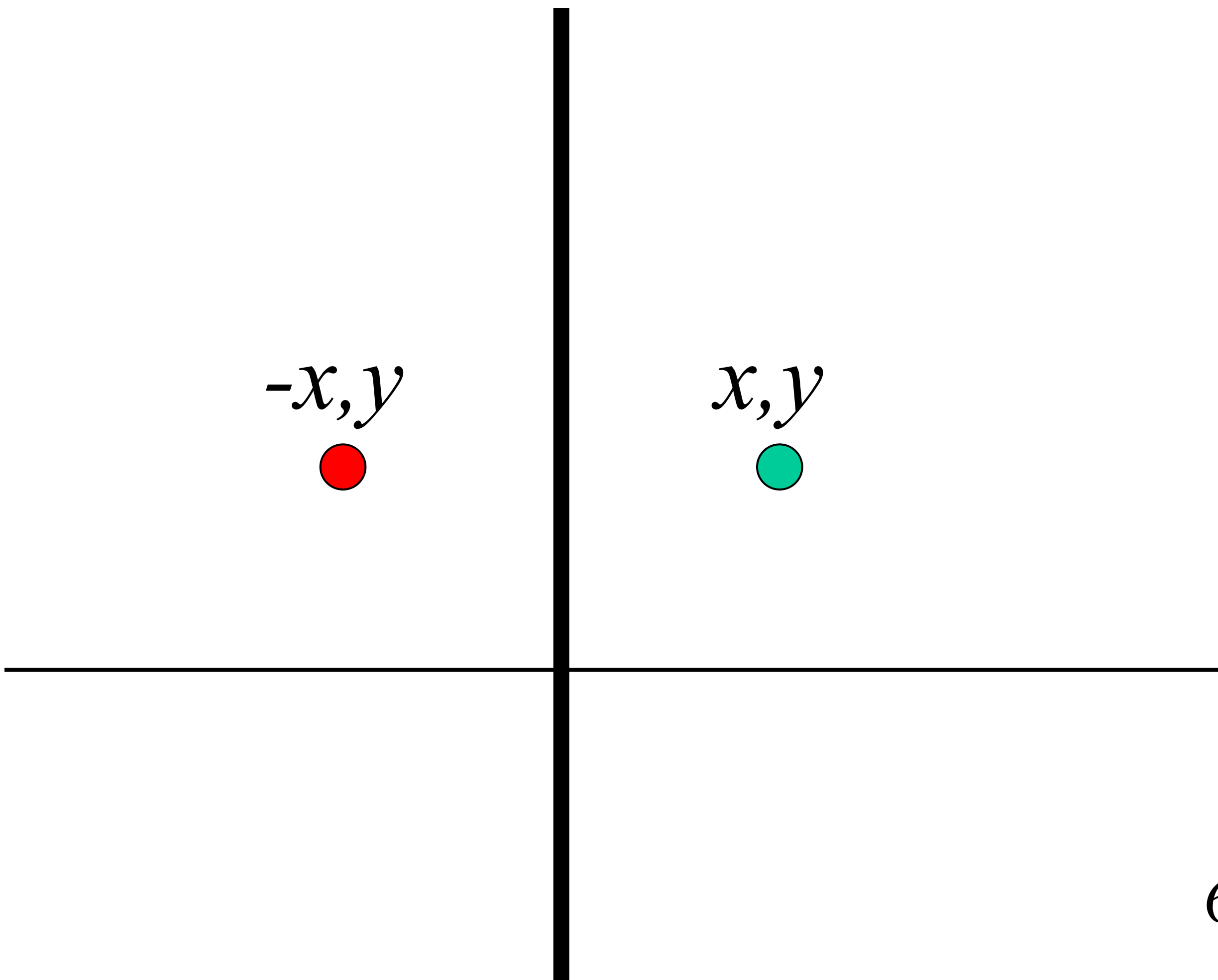


$x,y$

Так как циркуляция скорости вихря постоянна, то течение стационарно. В этом случае траектория вихря совпадает с линией тока, проходящей через точку (***$x,y$***)

Для того, чтобы описать влияние стенки, расположенной вдоль мнимой оси, поместим вихрь той же интенсивности, но с противоположным знаком циркуляции в точку (***$-x,y$***) ***(отразим вихрь)***

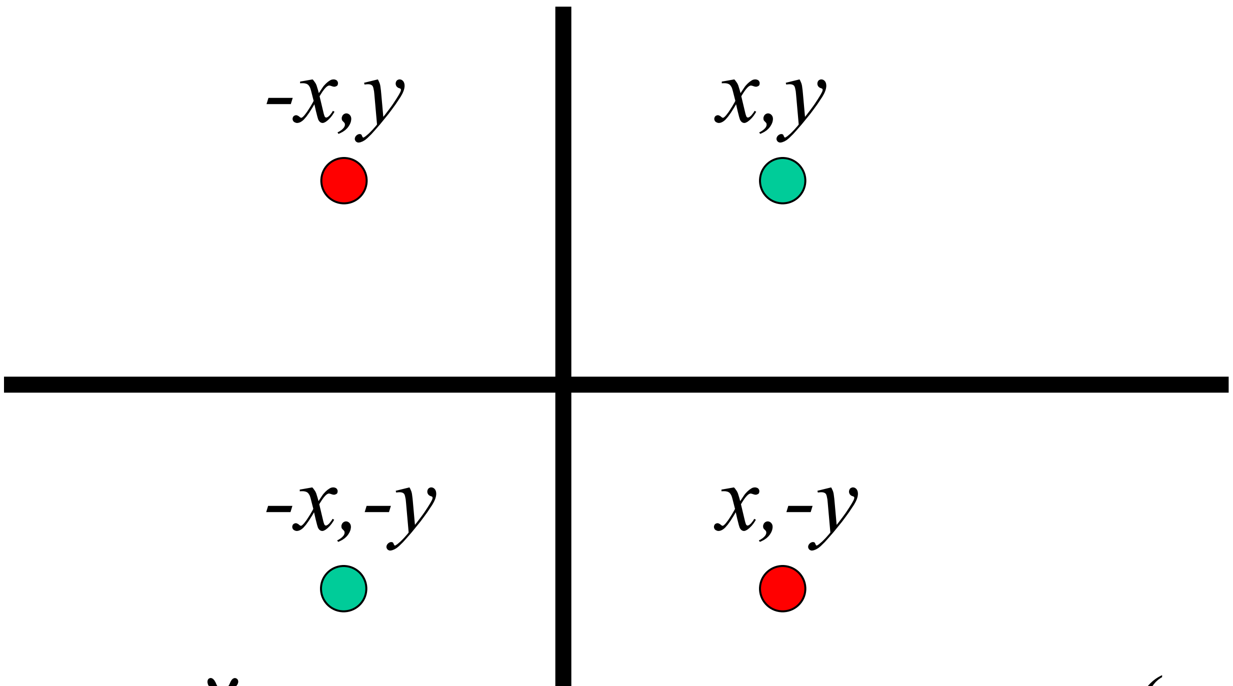
$$w=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left(z-z_1\right)-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left(z-z_2\right)$$



Для того, чтобы описать влияние стенки, расположенной вдоль действительной оси, поместим вихри той же интенсивности, но с противоположными знаками циркуляции в точки ($-x,-y$) *и* ($x,-y$)

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_1) - \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_2) +$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_3) - \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_4)$$




Надо найти потенциал в точке (***x,y***)

$$w=-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left[(x+iy)-(-x+iy)\right]+$$

$$+\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left[(x+iy)-(-x-iy)\right]-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left[(x+iy)-(x-iy)\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln 2x+\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(2x+2yi)-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln 2yi=$$

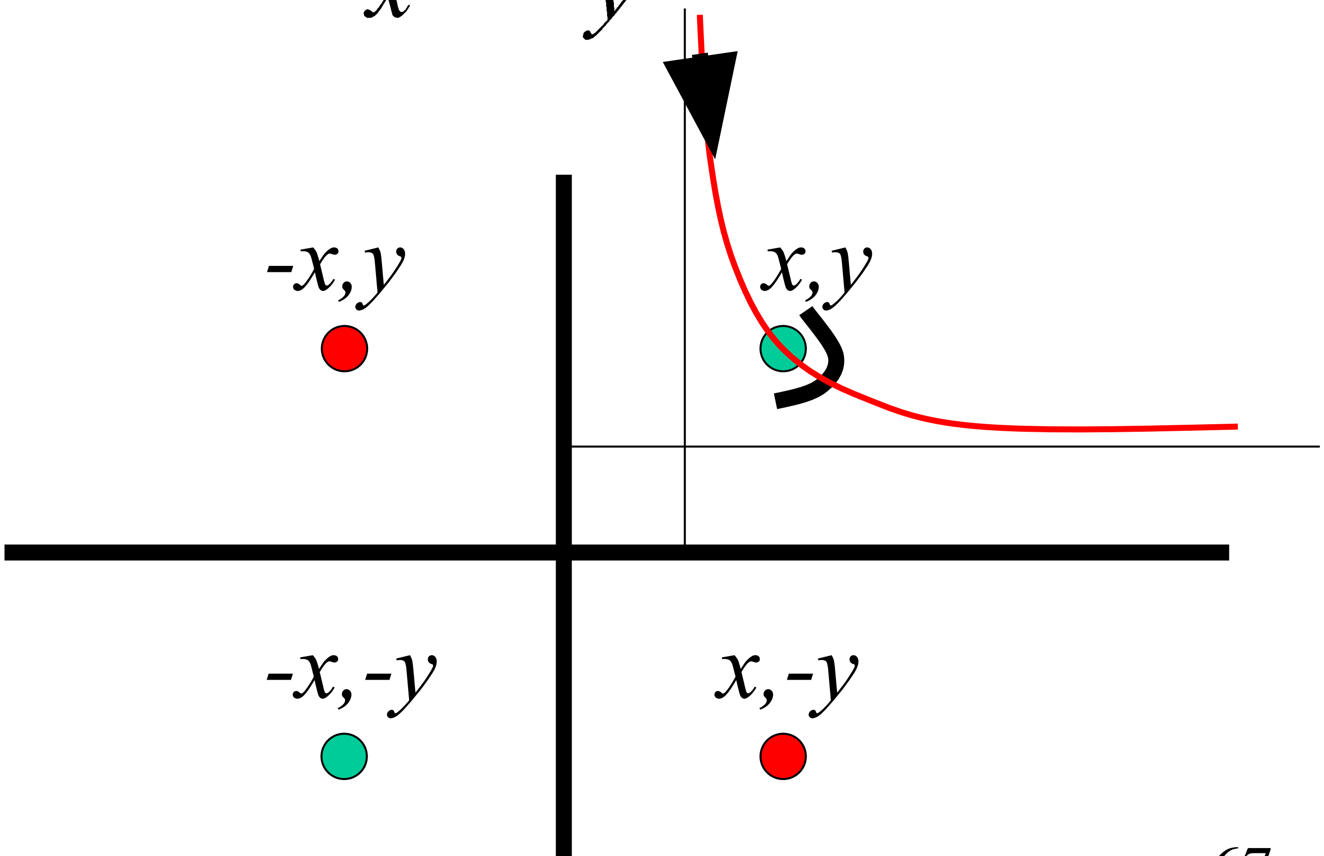
$$=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\frac{(x+yi)}{xy}$$

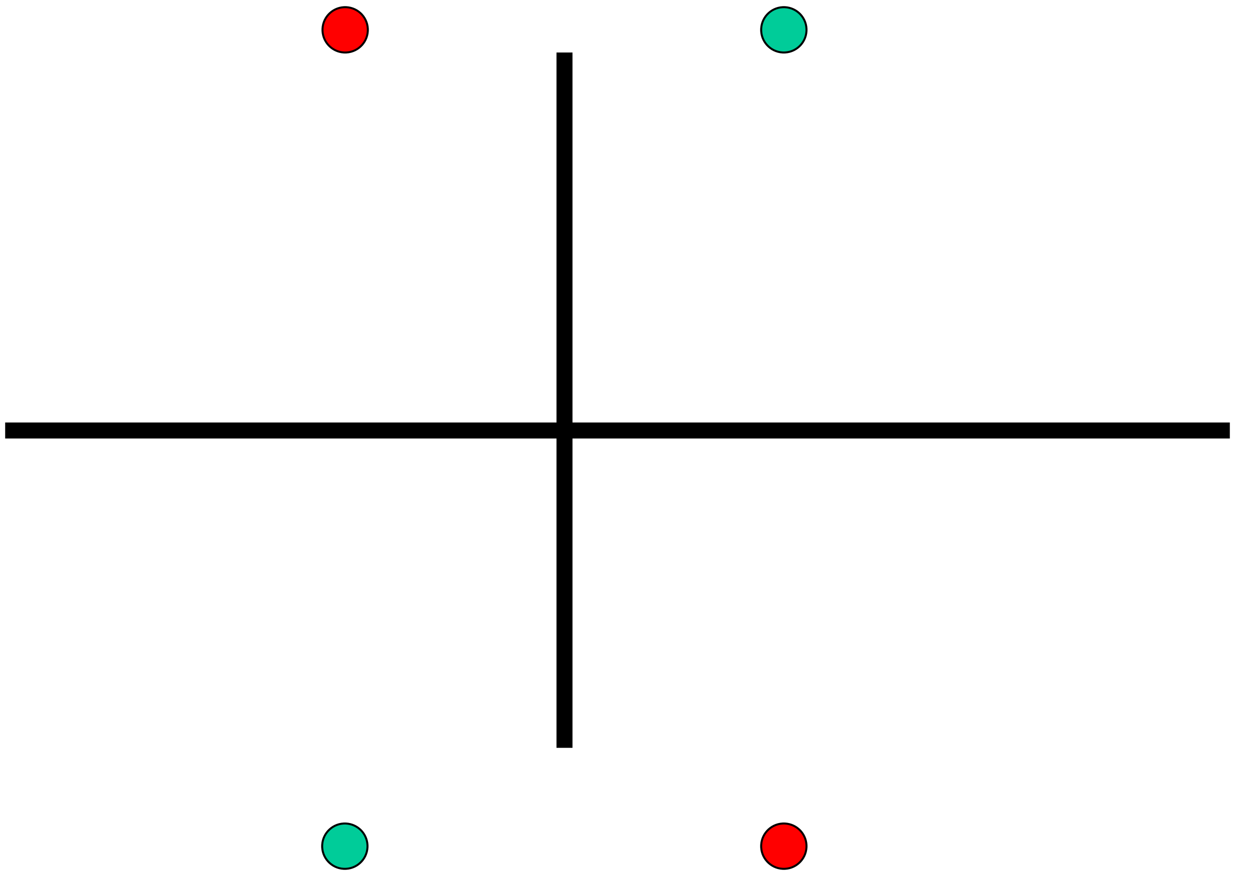
$$w=\varphi+i\psi;\quad \psi=-\frac{\gamma}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{(x+yi)}{xy}\right]=-\frac{\gamma}{2\pi}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$

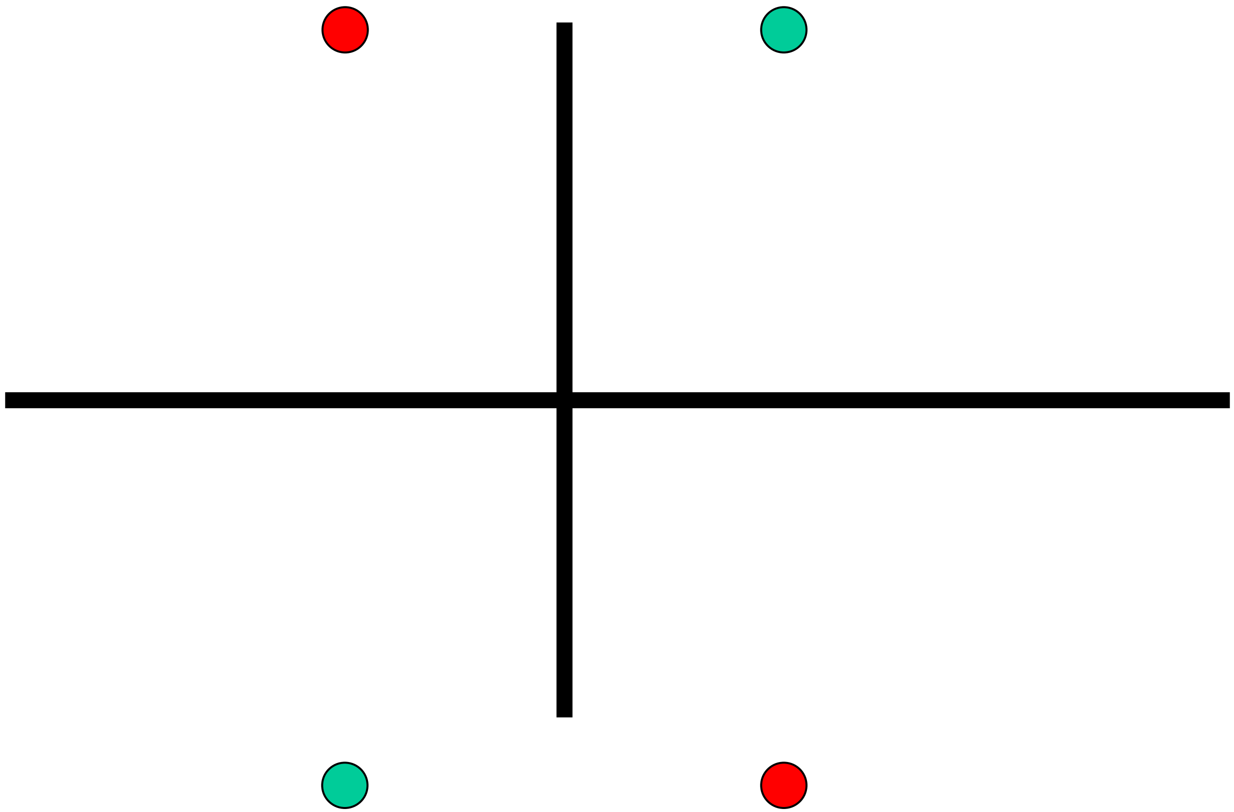
На линии тока ψ=const, т.е. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\text{const}$

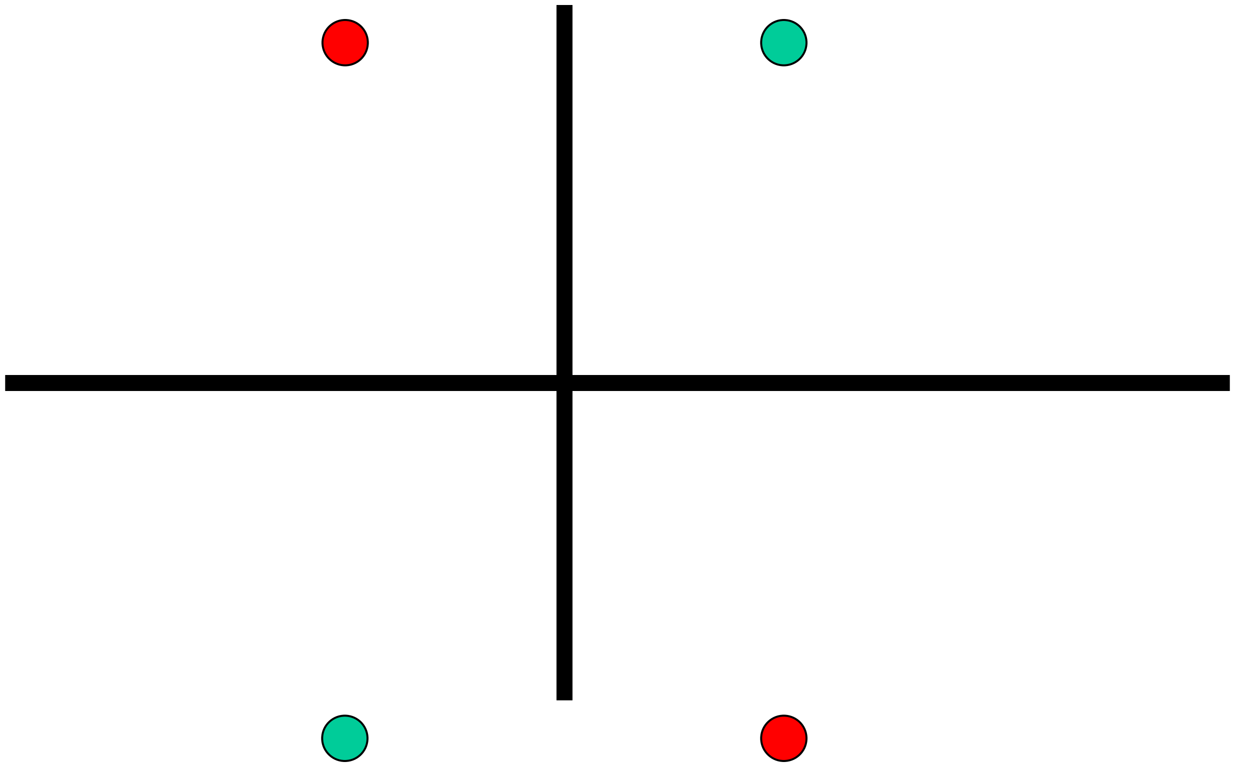
# Траектория вихря в углу, образованном твердыми стенками

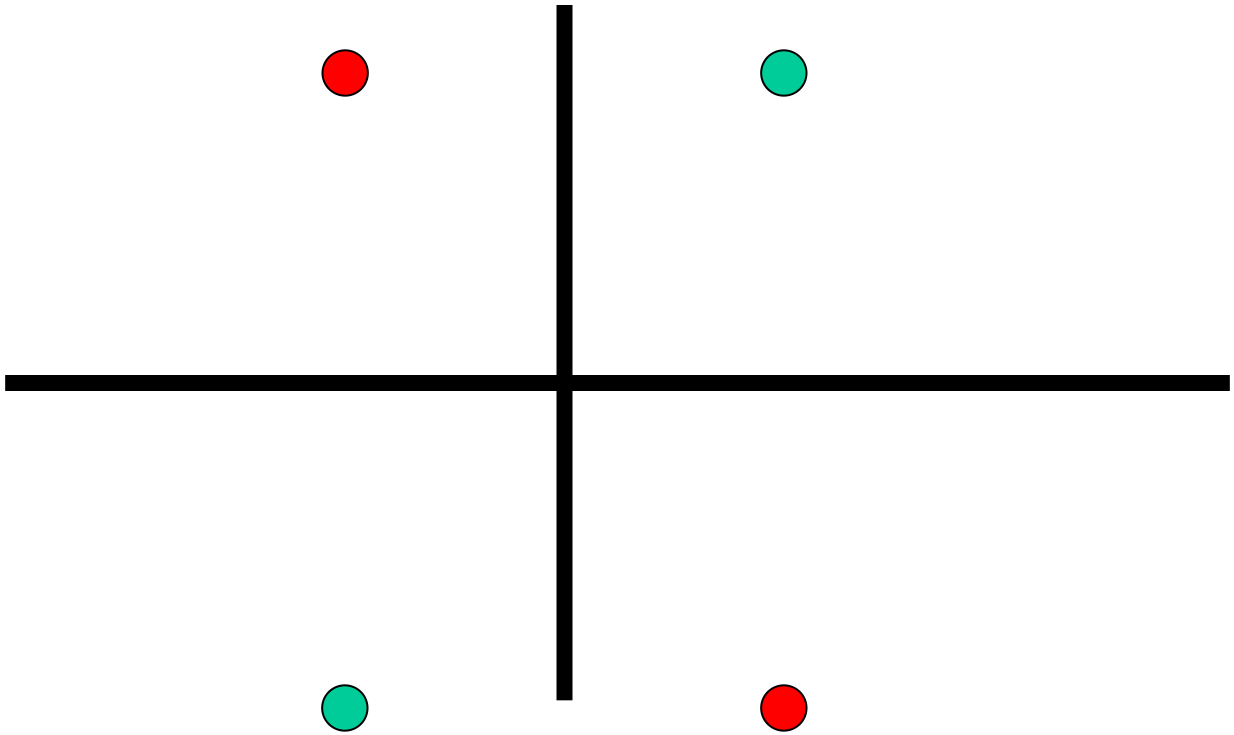
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \mathrm{const}$$

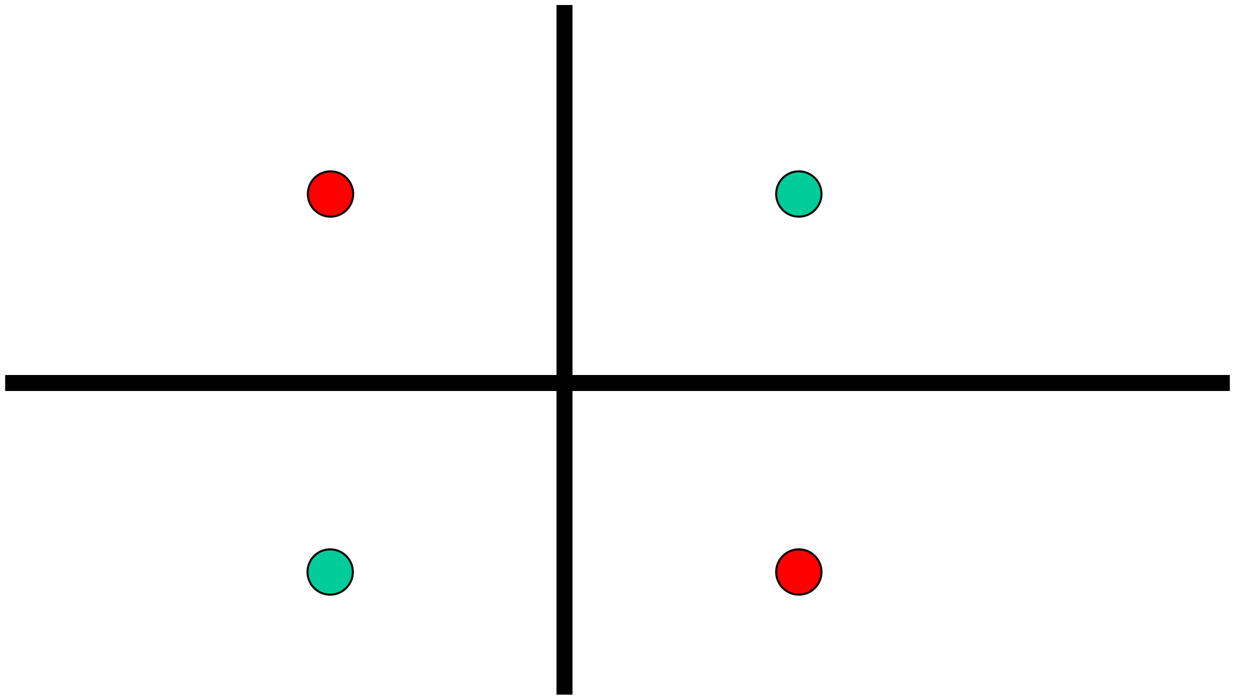


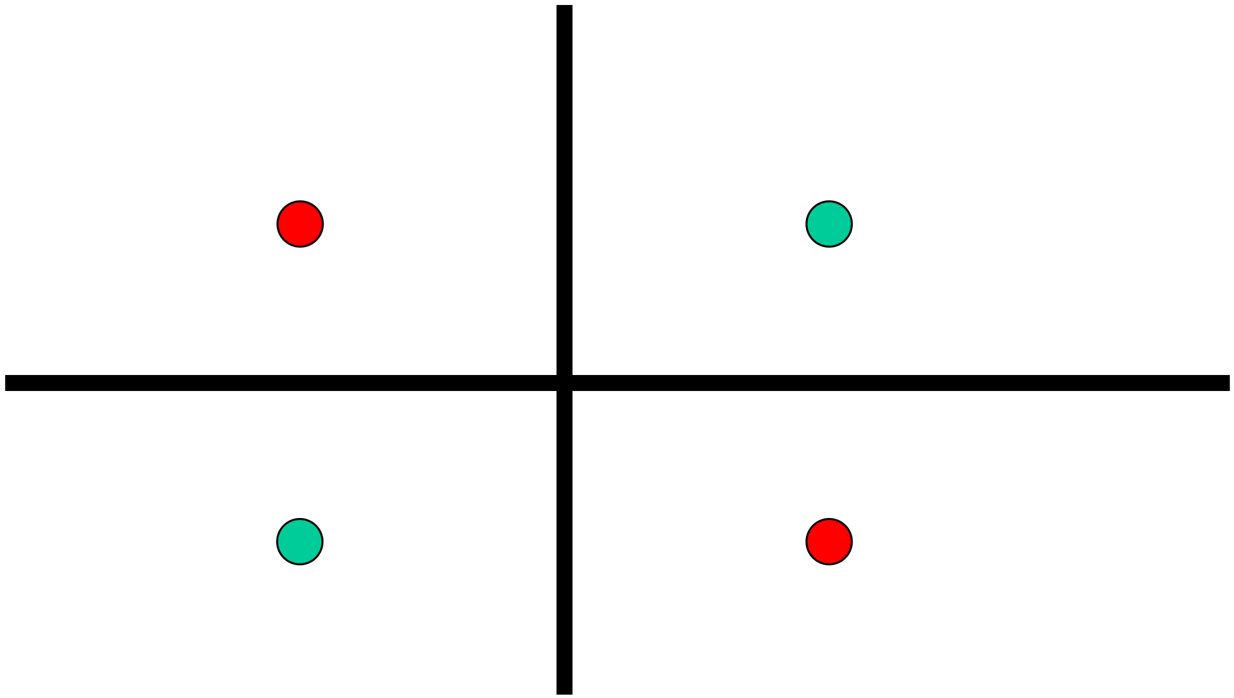


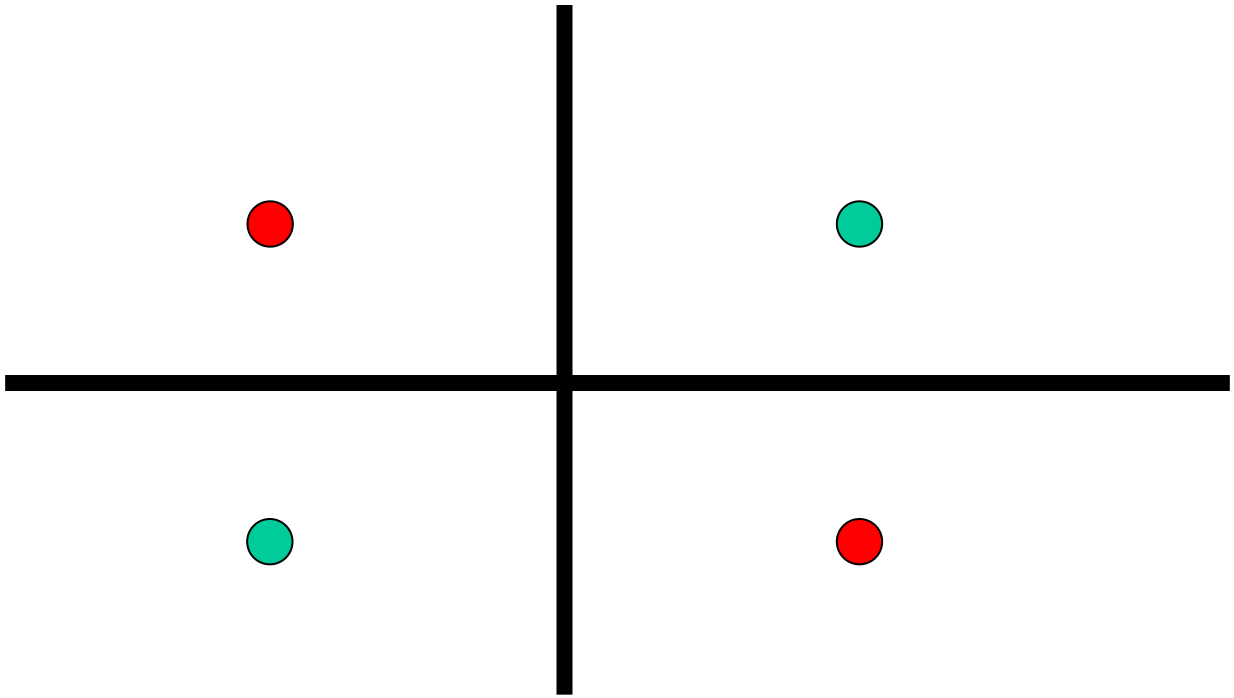


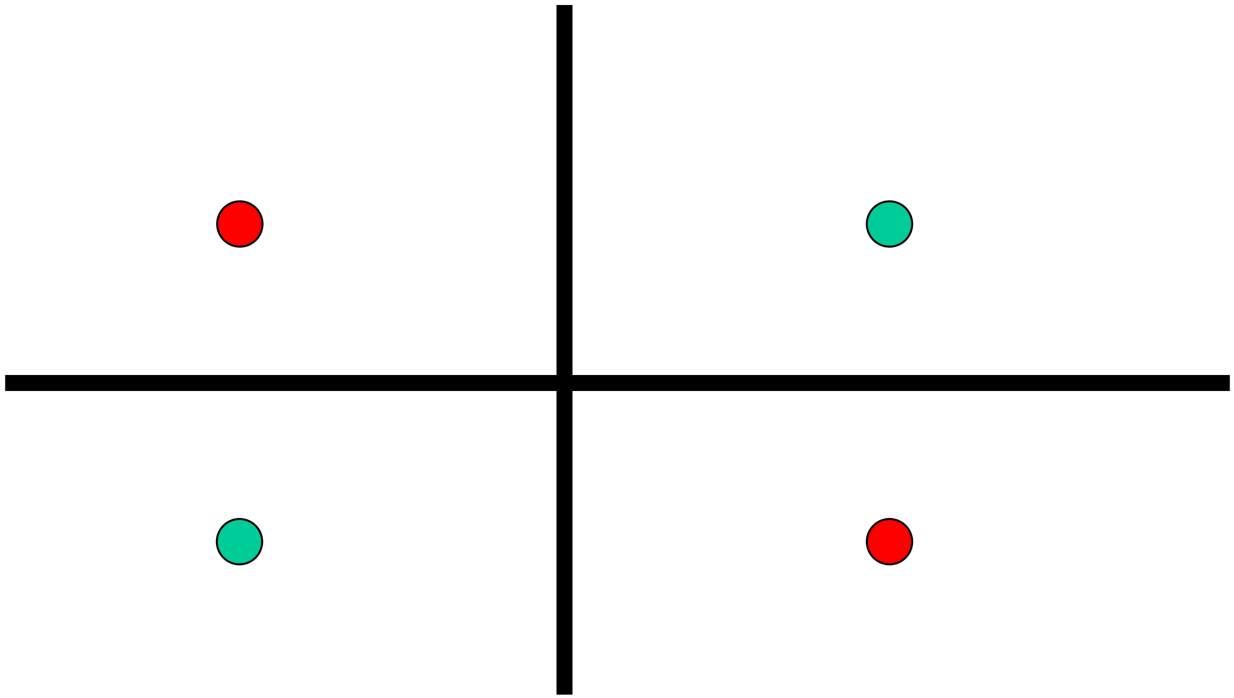


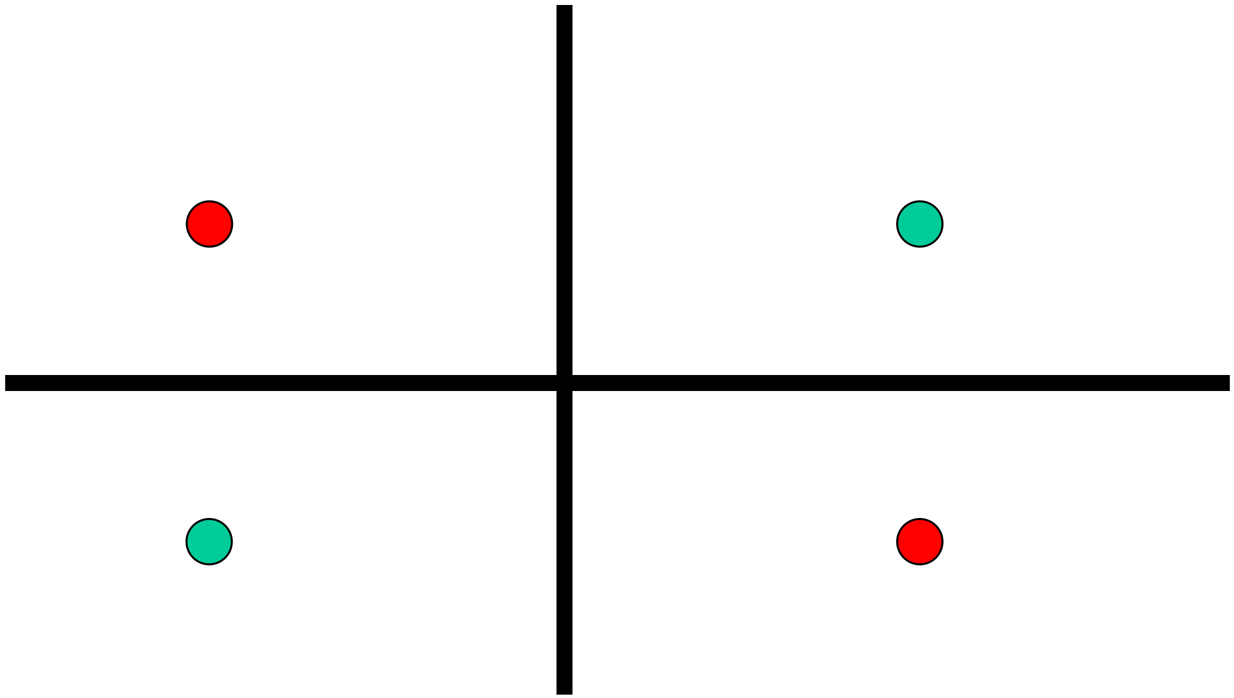


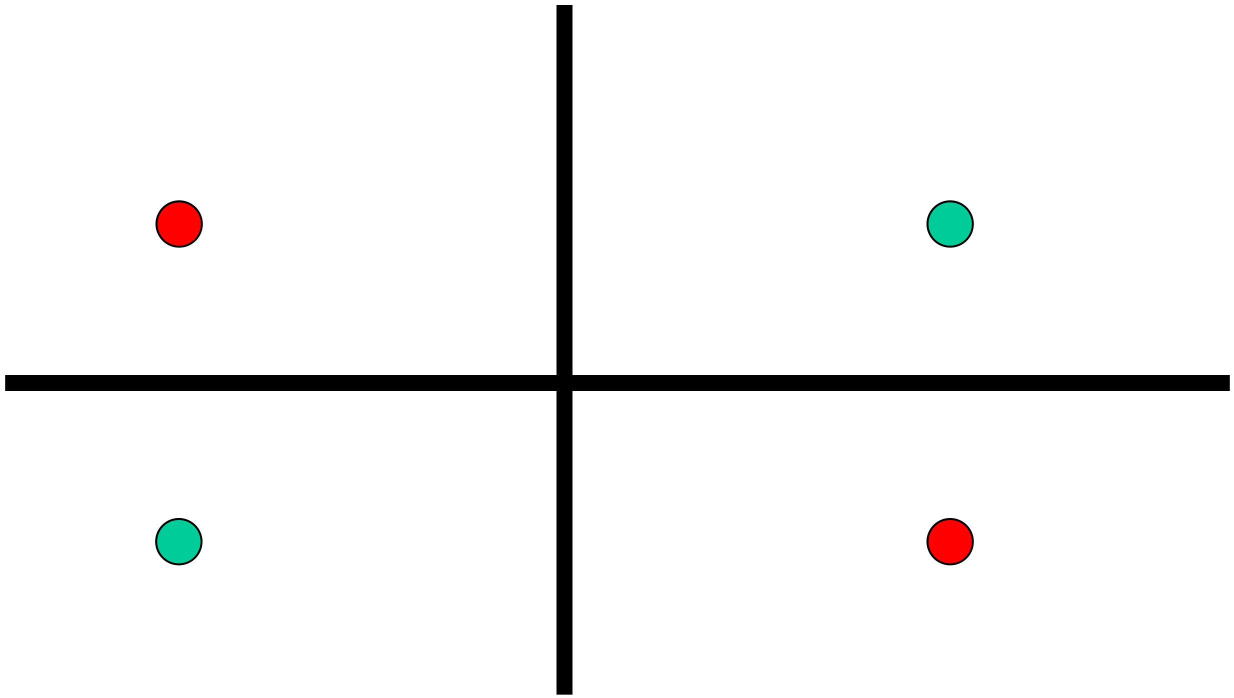












# n вихрей

**расположенных в точках $z_1,\ldots, z_n$ и имеющих интенсивности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$**

Комплексный потенциал
$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k)$$

Комплексная скорость
$$u_x - i u_y = \frac{dw}{dz} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_k}$$

Записать скорость вихря в точке $z_{\mathbf{p}}$ **(k=p)**

Уравнение движения вихря в точке $z_p$ **(k=p)**

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая на $\gamma_p$ и суммируя по переменной ***p*** от 1 до *n*, получаем в правой части

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k \gamma_p}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k} = 0$$

Так как слагаемому с $(z_p - z_k)$ соответствует слагаемое с $(z_k - z_p)$

Получаем

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \frac{dz_p^*}{dt} = 0$$

Следовательно

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p z_p^* = const$$

Отделяем мнимую и действительную части

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p x_p = const; \qquad \sum_{p=1}^{n} \gamma_p y_p = const$$

Если $\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \neq 0$, то получаем интегралы движения центров инерции (**следствие 1)**

$$\frac{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p x_p}{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p} = const; \qquad \frac{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p y_p}{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p} = const$$

## Следствие 2

Уравнение движения вихря в точке $z_p$ **(k=p)**

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая на $\gamma_p$ $z_p$ и суммируя по переменной $p$ от 1 до $n$, получаем

$$\frac{z_p}{z_p - z_k} + \frac{z_k}{z_k - z_p} = 1$$

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p z_p \frac{dz_p^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq p} \gamma_k \gamma_p$$

Отделить мнимую и действительную части

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \left( x_p \frac{dx_p}{dt} + y_p \frac{dy_p}{dt} \right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \left( x_p \frac{dy_p}{dt} - y_p \frac{dx_p}{dt} \right) = \sum_{k \neq p} \gamma_k \gamma_p \qquad \textbf{(2)}$$

**(2)** Сумма моментов количеств движения масс $\gamma_p$ относительно начала координат не меняется со временем

**(1)**

$$\frac{d}{dt}\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\left(x_p{}^2 + y_p{}^2\right) = 0$$

$$\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\left(x_p{}^2 + y_p{}^2\right) = \text{const}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \left( r_p^{\ 2} \right) = \text{const}$$

Сумма моментов инерции масс $\gamma_p$ относительно начала координат не меняется со временем

**Следствие 3**

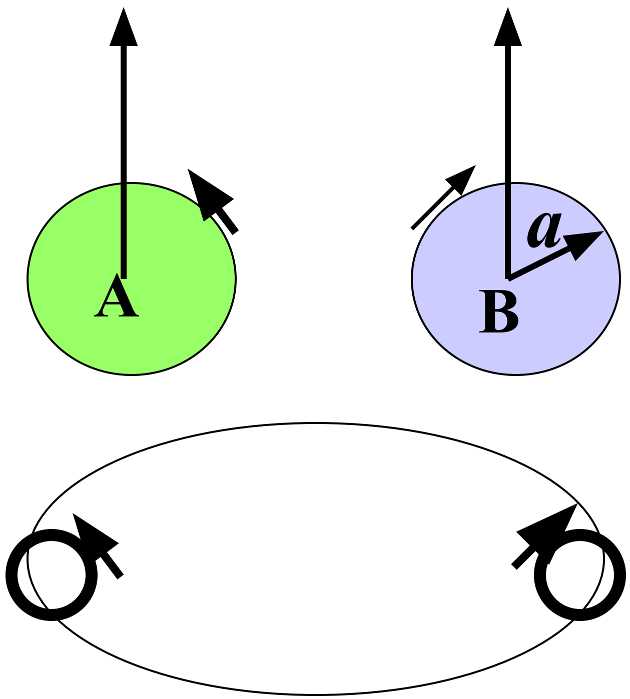
$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq p}}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая выражения скорости на $\gamma_p \dfrac{dz_p}{dt}$

и суммируя по переменной $\boldsymbol{p}$ от 1 до $n$, получаем еще один интеграл

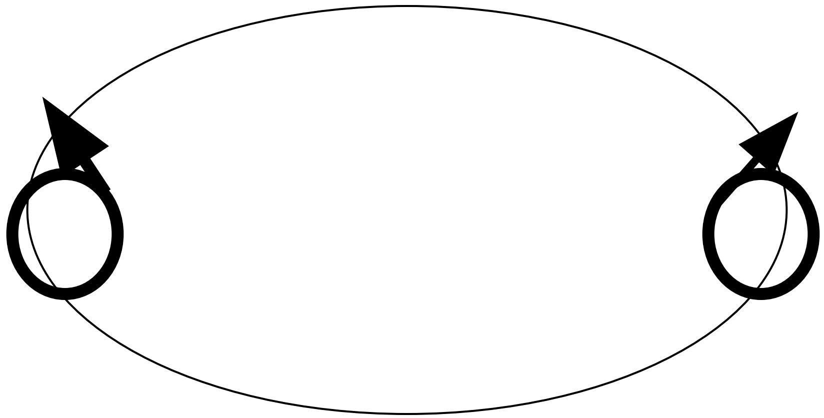
$$\sum_{k\neq p}^{n} \gamma_k \gamma_p \ln\left(r_{kp}\right) = \mathrm{const}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2$$



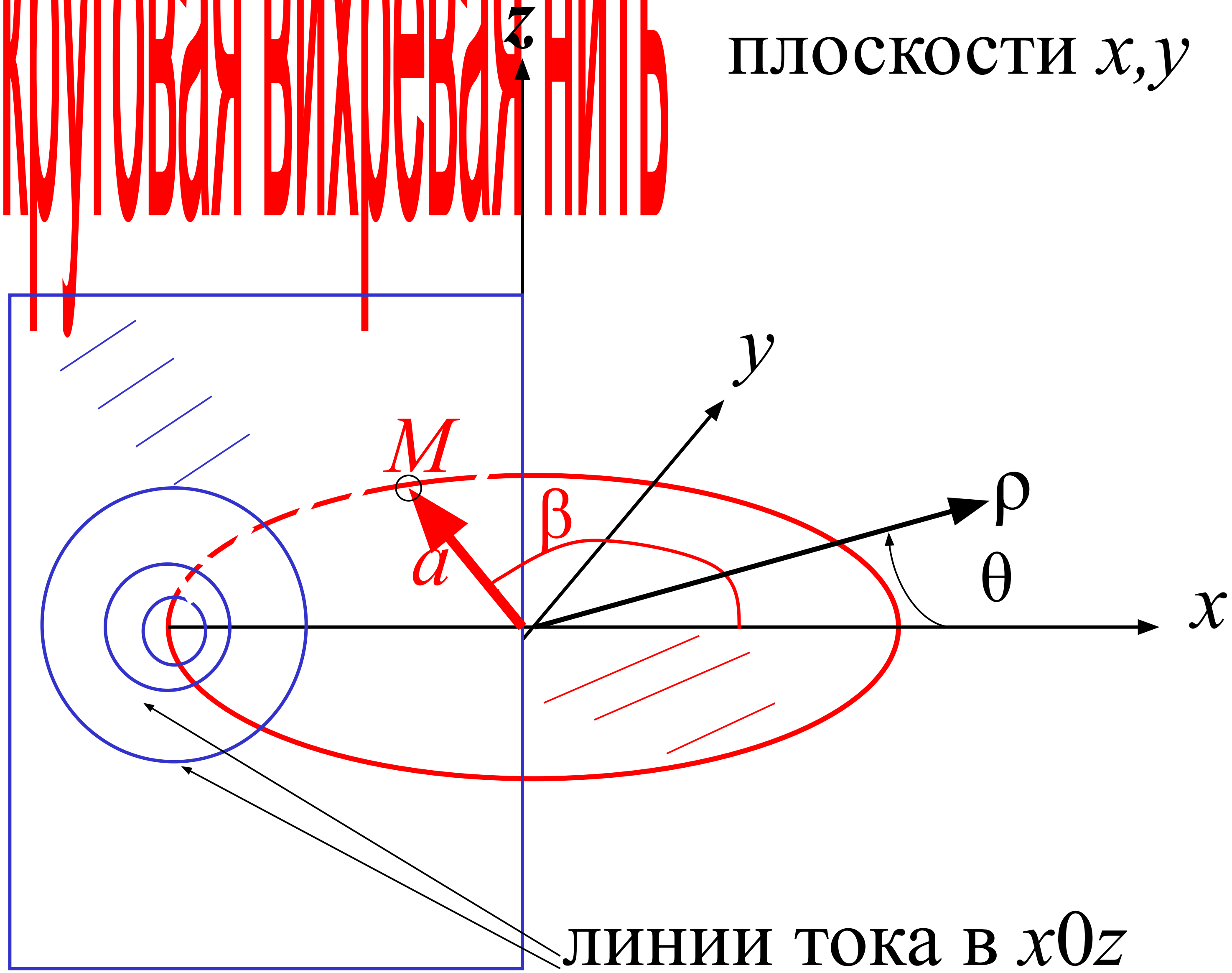

Такие вихри называются «парой вихрей». Они являются плоской аналогией вихревому кольцу и обладает многими свойствами последнего.

# Куда двигается кольцевой вихрь?



# Круговая вихревая нить

радиуса $a$ лежит в плоскости $x,y$




линии тока в $x0z$

Координаты точки $M$ на вихревой нити

$$\xi = a\cos\beta; \quad \eta = a\sin\beta; \quad \zeta = 0$$

Расстояние от точки $M$ на вихревой нити до точки $N(x,y,z)$

$$r = \sqrt{(\rho\cos\theta - a\cos\beta)^2 + (\rho\sin\theta - a\sin\beta)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos(\theta - \beta) + a^2 + z^2}$$

Запишем компоненты скорости через векторный потенциал

$$\left(rotA\right)_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}$$

$$\left(rotA\right)_\theta = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \qquad (1)$$

$$\left(rotA\right)_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\theta\right)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}$$

$$\vec{u} = rot\vec{A} \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_L \frac{\vec{\Omega}}{r} d\tau$$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\xi}{r}; A_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\eta}{r}; A_z = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\zeta}{r}$$

$$\gamma = const$$

Для векторного потенциала в точке *x,y,z*

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\beta d\beta}{r}$$

$$A_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\beta d\beta}{r}$$

$$A_z = 0$$

Для плоскости *x,y при θ=0* $A_x = A_\rho ; A_y = A_\theta$
Вследствие симметрии задачи это справедливо для всех углов $\theta$

$$A_\rho = -\frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\beta d\beta}{r} = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d(\cos\beta)}{\sqrt{\rho^2+z^2+a^2-2a\rho\cos\beta}} = 0$$

$$\int\frac{d(x)}{\sqrt{b+cx}} = \frac{2\sqrt{b+cx}}{b}$$

$$A_\rho = -\frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\beta d\beta}{r} = 0$$

$$A_\theta = \frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\beta d\beta}{r} = \mathrm{A}$$

$$A_z = 0$$

Подставляем выражения векторного потенциала в (1) и находим компоненты скорости $u = rotA$

$$u_{\rho} = -\frac{\partial A}{\partial z}; \qquad u_{\theta} = 0; \quad u_{z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho}$$

ОПРЕДЕЛИТЬ

объем жидкости, протекающей через круг радиусом ρ, лежащим в плоскости перпендикулярной оси *z* с центром на оси *z*, *через переменную A*

Объем жидкости, протекающей через круг радиусом ρ, лежащим в плоскости перпендикулярной оси *z* с центром на оси *z*

$$\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} u_z \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\rho} u_z \rho d\rho = 2\pi\rho A$$

ОПРЕДЕЛИТЬ

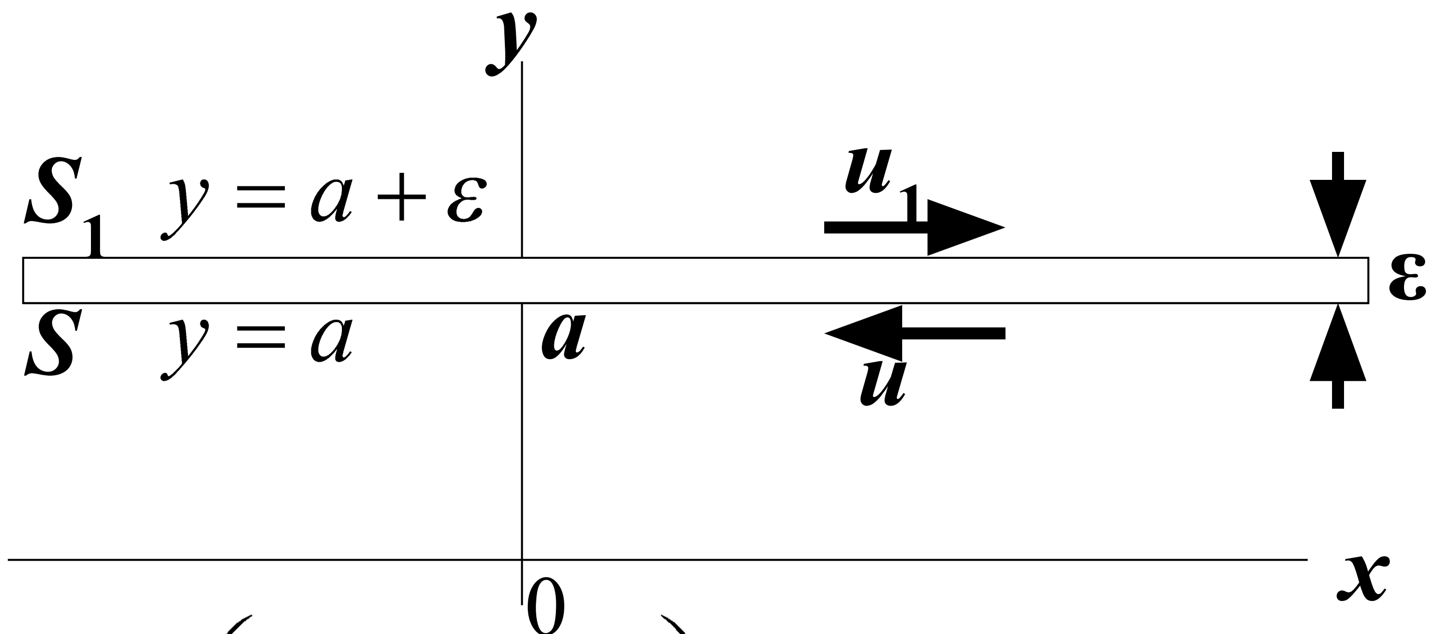
скорость перемещения круговой вихревой нити

$$\rho = a; \quad z = 0; \quad r = 0$$

$$u_\rho = -\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$u_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\gamma a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\beta d\beta}{r}\right) = \infty$$

# Вихревой слой




$$u_x = (u - u_1)\left(1 - \frac{y-a}{\varepsilon}\right)$$

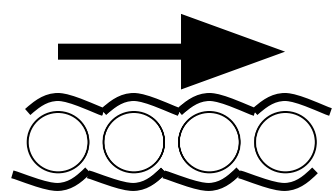
Найти ротор скорости

$$u_y = 0$$

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{u - u_1}{\varepsilon}$$

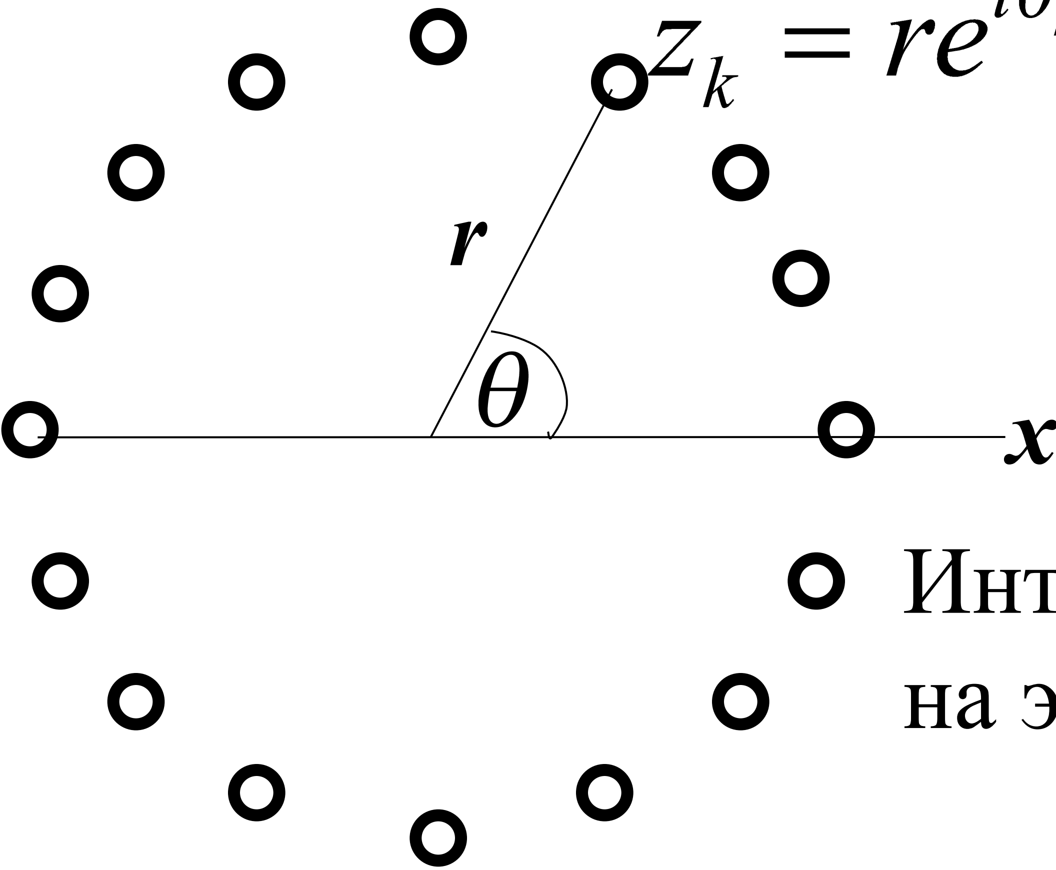
Внутри слоя $\Omega = \text{const}$

Разрыв скорости может быть смоделирован цепочкой вихревых нитей



# Вихревой цилиндрический слой

$$z_k = re^{i\theta_k}$$




Интенсивность вихрей на элементе дуги $r$dθ

$$\gamma r \mathrm{d}\theta$$

Записать комплексный потенциал и комплексную скорость для точки $z$

Комплексный потенциал цилиндрического слоя в точке $z$

$$w = \frac{\gamma r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \ln\left(z - re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

Комплексная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{z - re^{i\theta}}$$

Делим подинтегральное выражение на $z$, умножаем на

$$z - re^{i\theta} + re^{i\theta}$$

***z*** рассматривается как постоянная при интегрировании

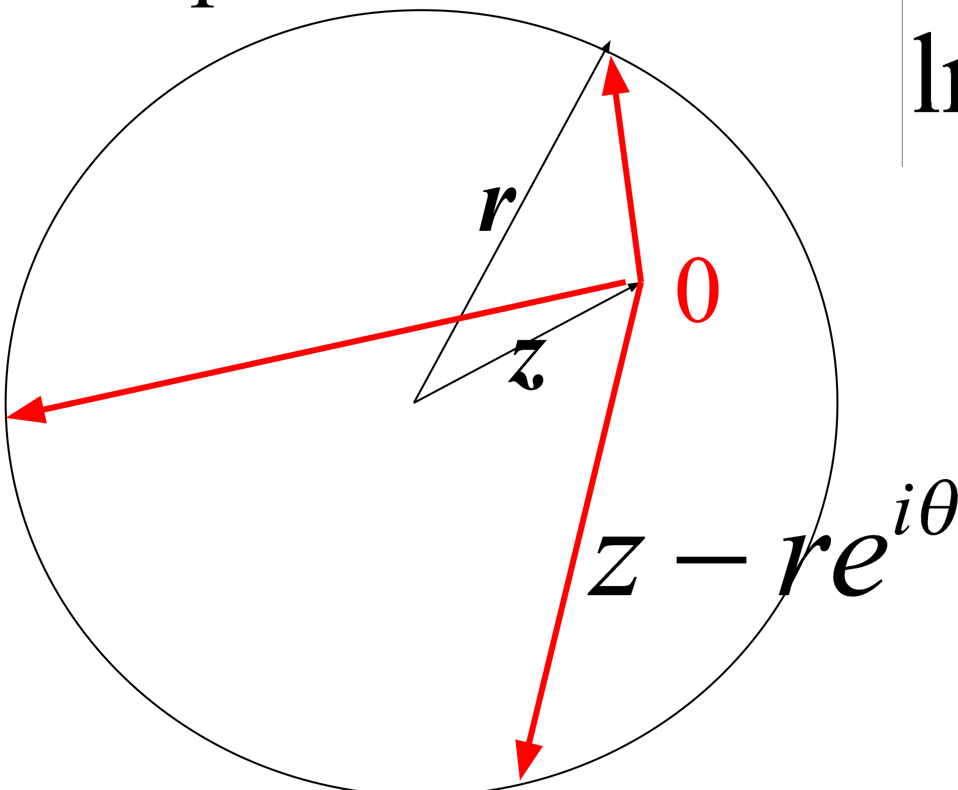
$$u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi z i}\int_0^{2\pi}\frac{z-re^{i\theta}+re^{i\theta}}{z\text{-}re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{\gamma r}{2\pi z i}\left\{2\pi - \frac{1}{i}\left|\ln\left(z-re^{i\theta}\right)\right|_0^{2\pi}\right\}$$

Если $z$ внутри окружности, т.е. $|z| < r$

При изменении θ от 0 до 2π аргумент разности $z - re^{i\theta}$ меняется на 2π, так как вектор $z - re^{i\theta}$ обходит начало координат. Тогда

$$\left. \ln\left(z - re^{i\theta}\right) \right|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

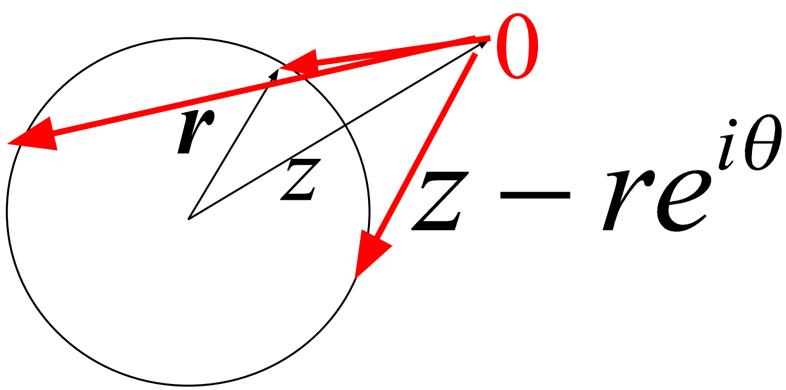


Если $z$ вне окружности, т.е. $|z| > r$

При изменении θ от 0 до 2π конец вектора $z - re^{i\theta}$ обходит замкнутый путь не содержащий начала координат.

Тогда

$$\left|\ln\left(z - re^{i\theta}\right)\right|_0^{2\pi} = 0$$




Записать комплексную скорость внутри и вне цилиндра

Комплексная скорость

$$|z| < r \qquad u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi z i}\left\{2\pi - \frac{1}{i}2\pi i\right\} = 0$$

движения нет внутри цилиндра

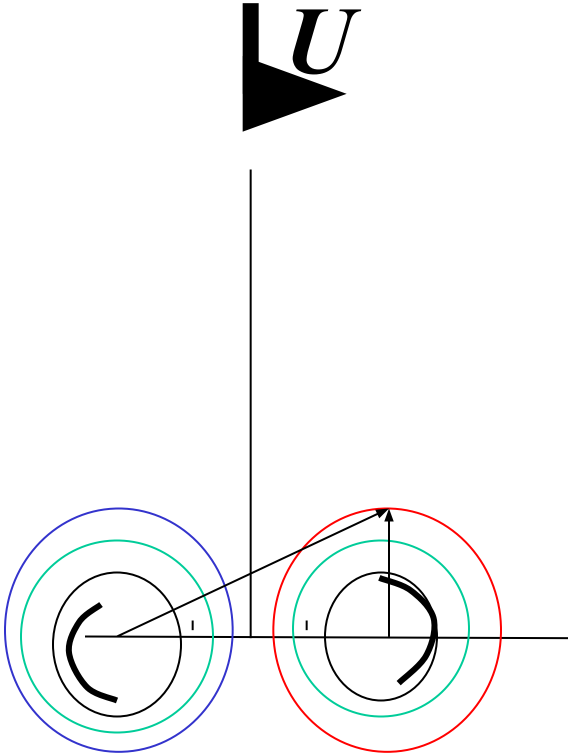
$$|z| > r \quad u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{zi}$$

вне цилиндра движение описывается воздействием вихревой нити интенсивности $2\pi r\gamma$, расположенной в начале координат

# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

# №1

Записать функцию тока для вихревой пары в потоке жидкости, имеющего постоянную скоростью ***U*****.**
**Скорость потока равна по модулю скорости пары, но противоположна по направлению.**



# №2

**Найти в ортогональной системе координат уравнения линий тока для**

**1) случая двух вихрей одинаковой интенсивности**

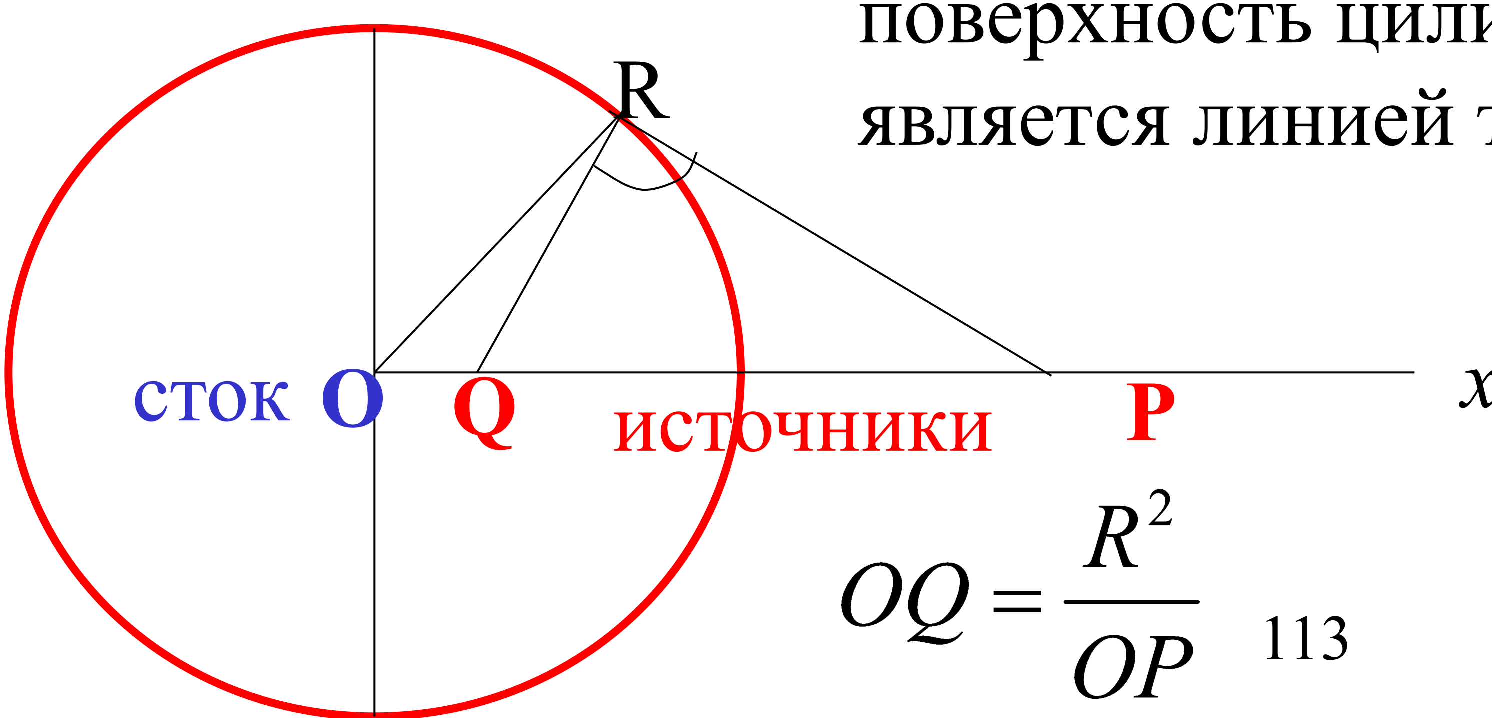
**2) пары вихрей**

# №3

При обтекании цилиндра жидкостью, его поверхность должна быть линией тока, а $\psi$=const.

Пусть в центре цилиндра имеется сток, а на оси $0x$ лежат два источника: один внутри цилиндра, другой вне цилиндра, $Q$ – инверсия точки $P$, *мощность* одинакова. Показать, что

поверхность цилиндра является линией тока

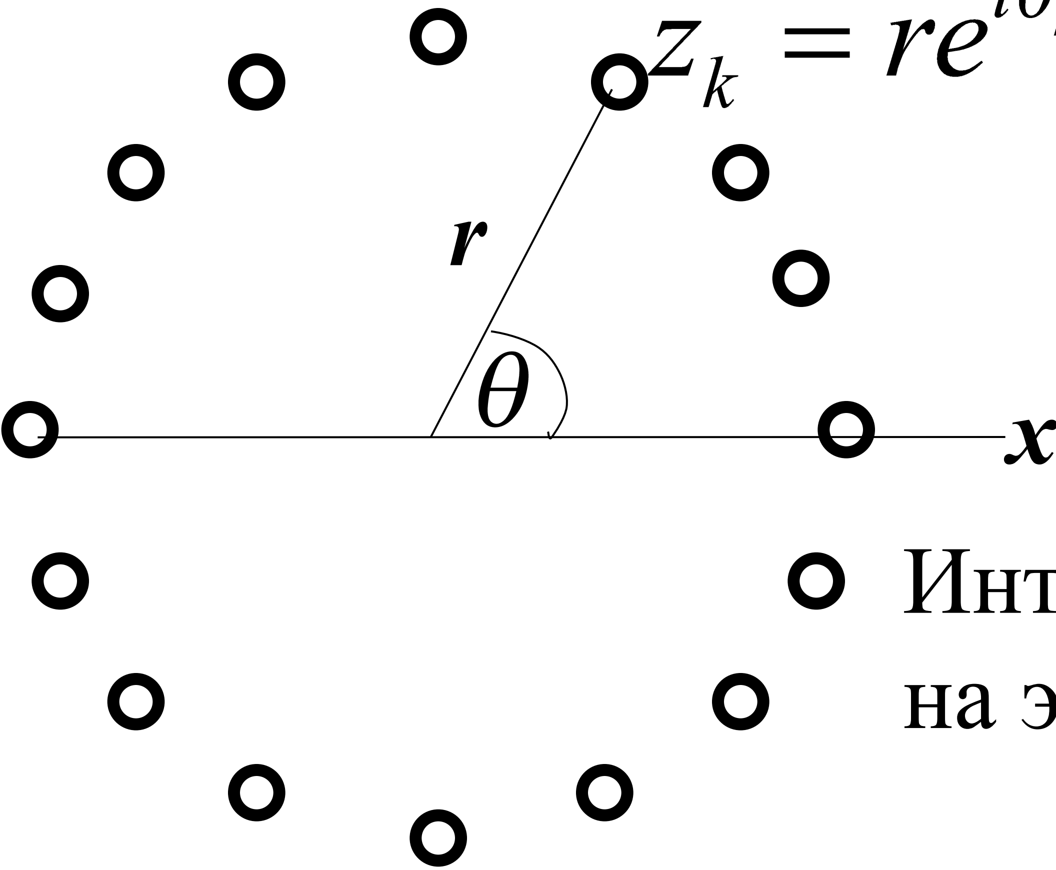



$$OQ = \frac{R^2}{OP}$$

# Вихревой цилиндрический слой

$$z_k = re^{i\theta_k}$$

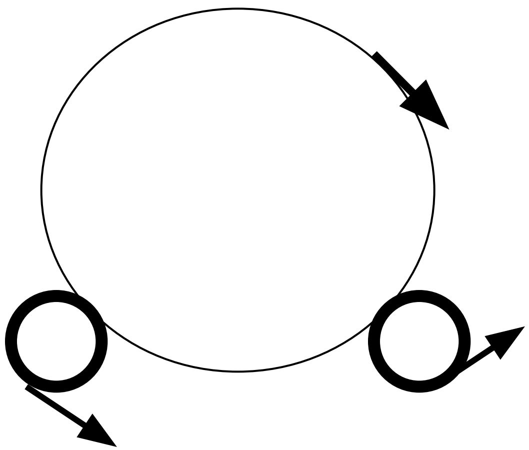
№4




Интенсивность вихрей на элементе дуги $r$dθ

$$\gamma r \mathrm{d}\theta$$

Найти координаты центра системы



# №5

Интенсивность твердотельно вращающихся вихрей такова, что тангенциальные составляющие скорости в точках соприкосновения равны

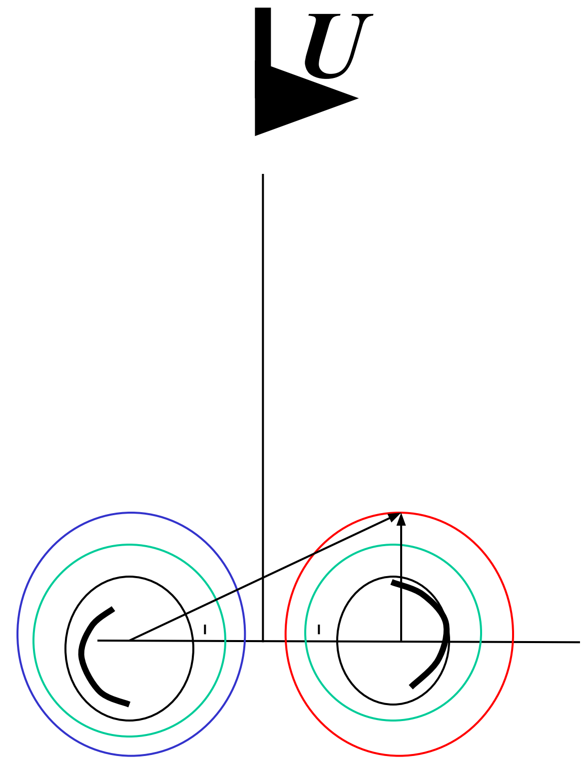
Найти координаты центра системы

# РЕШЕНИЯ

# №1

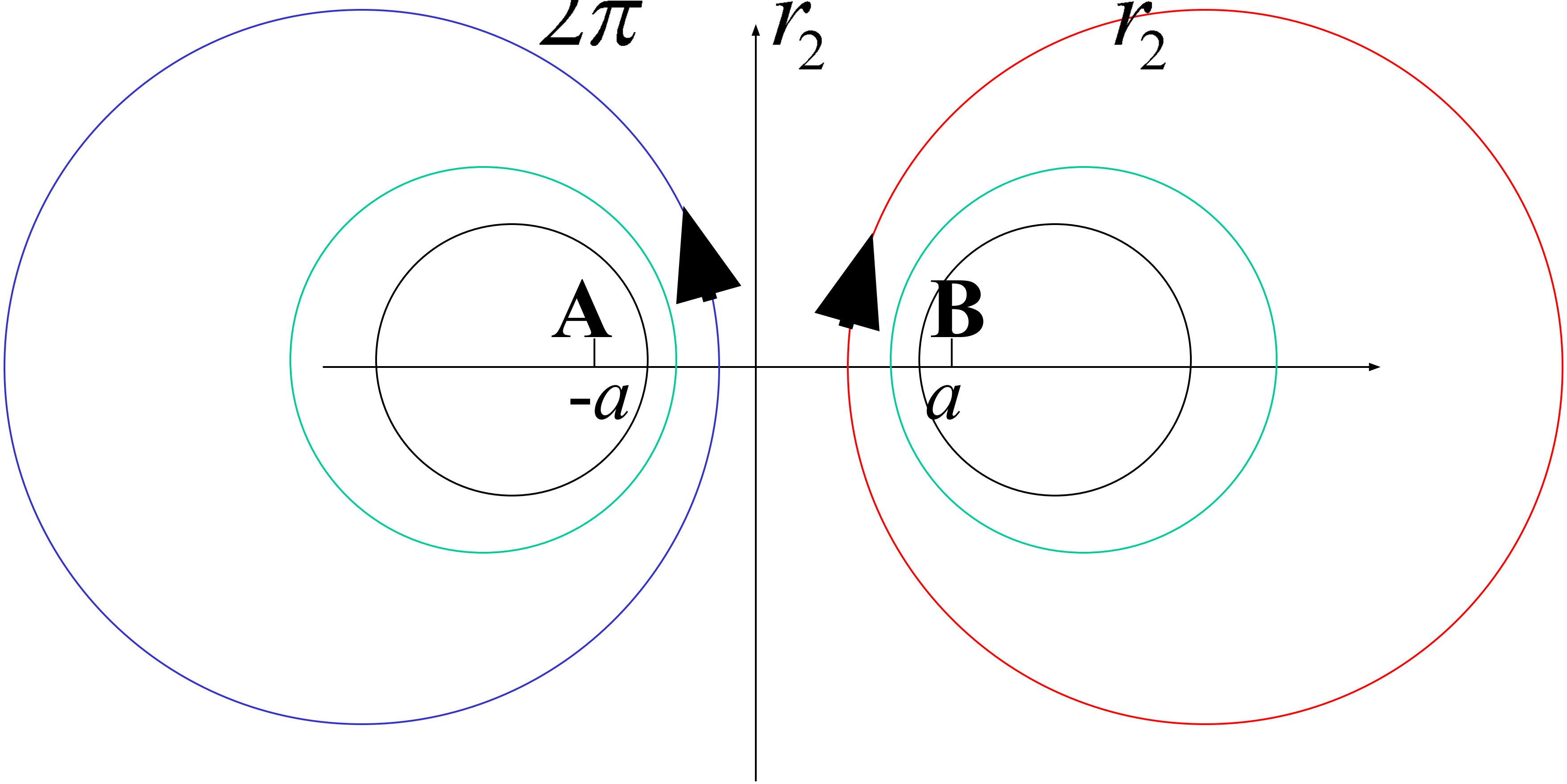
Записать функцию тока для вихревой пары в потоке жидкости, имеющего постоянную скоростью ***U*.**

**Скорость потока равна по модулю скорости пары, но противоположна по направлению.**



# Линии тока вихревой пары

$\psi$=const $\quad \psi = \dfrac{\gamma}{2\pi} \ln \dfrac{r_1}{r_2}, \Rightarrow \quad \dfrac{r_1}{r_2} = const$




$$\gamma_1\big|_{[-a]} = 2\pi\mu, \qquad \gamma_2\big|_{[+a]} = -2\pi\mu,$$

Функция тока для течения, имеющего постоянную скорость вдоль оси ординат

$$U = -\frac{\partial \psi_{потока}}{\partial x}$$

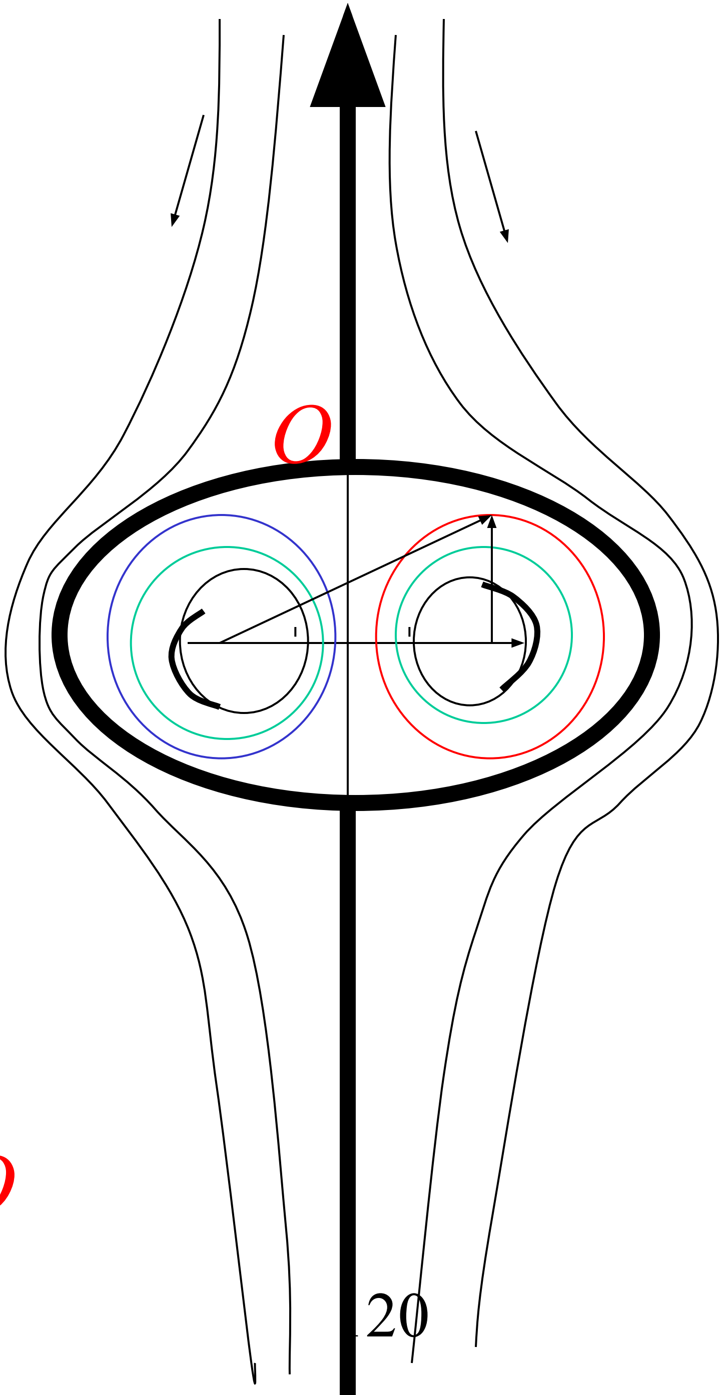
$$\psi_{потока} = -\int U dx = -Ux$$

$$U = -V_{пары}$$

$$V_{пары} = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB} = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA} = \frac{|\gamma|}{4\pi a}$$

$$\psi_{потока} = \frac{|\gamma| x}{4\pi a}$$

# Относительные линии тока вихревой пары




$$\psi = \frac{\gamma}{2\pi}\left(\frac{x}{2a} + \ln\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$\psi = 0$ на оси $y$ и на овале $O$ (***жирная линия***).

Жидкость внутри овала $O$ движется вместе с вихрями.

Жидкость вне овала $O$ обтекает этот овал как твердый цилиндр.

Полуоси овала $O$ приблизительно имеют длину $2.09a$ и $1.73a$.

# №2

**Найти в ортогональной системе координат уравнения линий тока для**

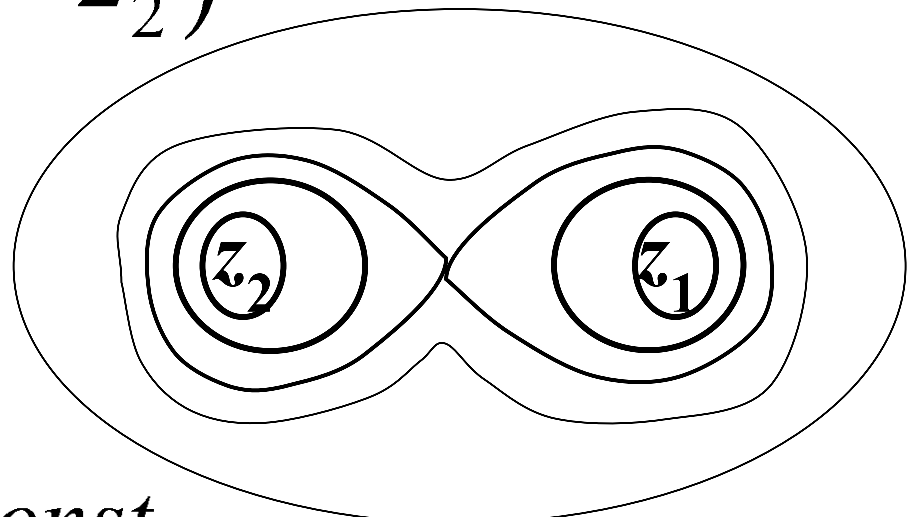
**1) случая двух вихрей одинаковой интенсивности**

**2) пары вихрей**

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left(z - z_1\right) + \frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left(z - z_2\right)$$

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)$$

$$\psi = -\frac{\gamma}{2\pi}\ln\left(r_1 r_2\right)$$



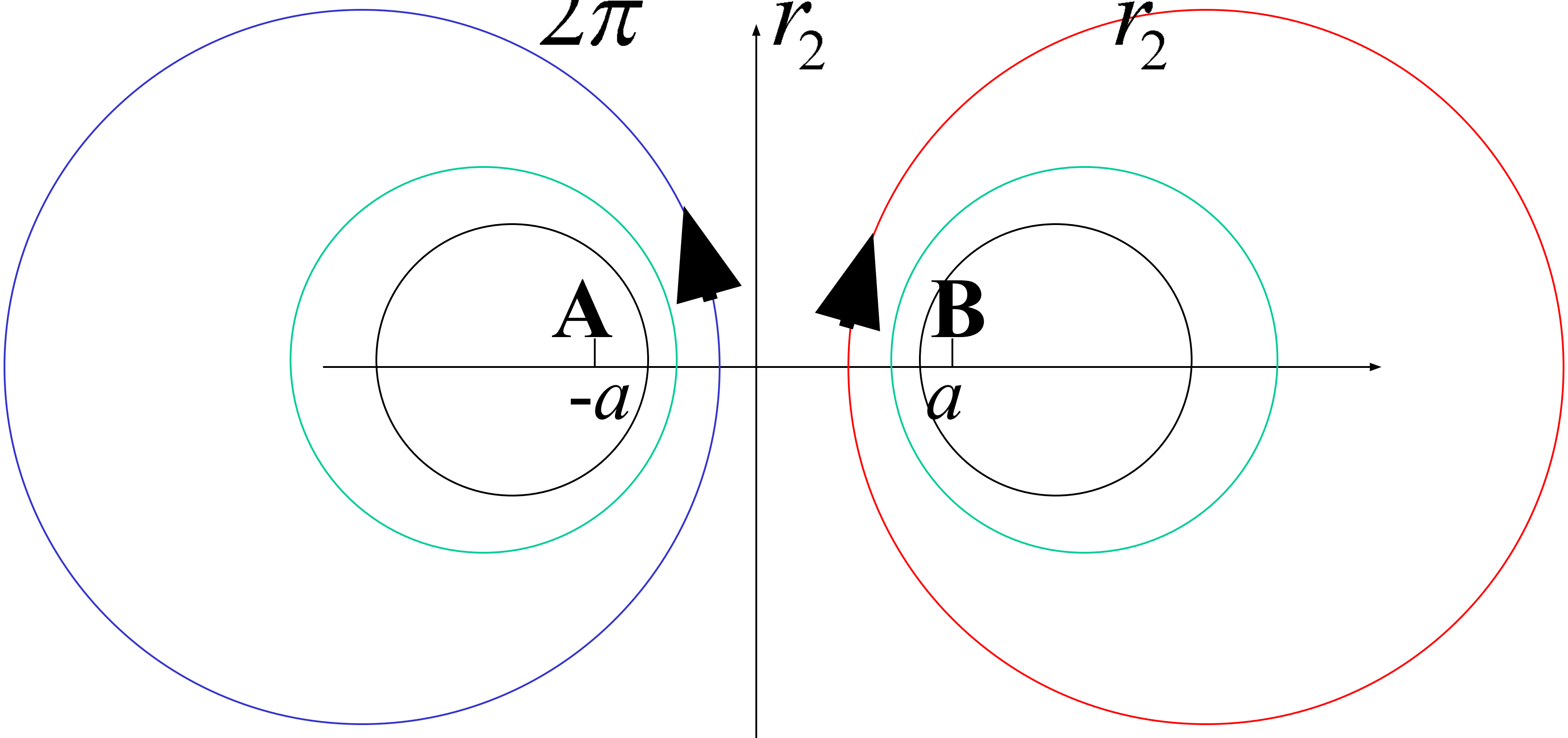

На линии тока $\psi = const$

$$r_1 r_2 = const$$

$$\left[\left(x - x_1\right)^2 + \left(y - y_1\right)^2\right]\left[\left(x - x_2\right)^2 + \left(y - y_2\right)^2\right] = const$$

# Линии тока вихревой пары

$\psi$=const $$\psi = \frac{\gamma}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}, \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = const$$

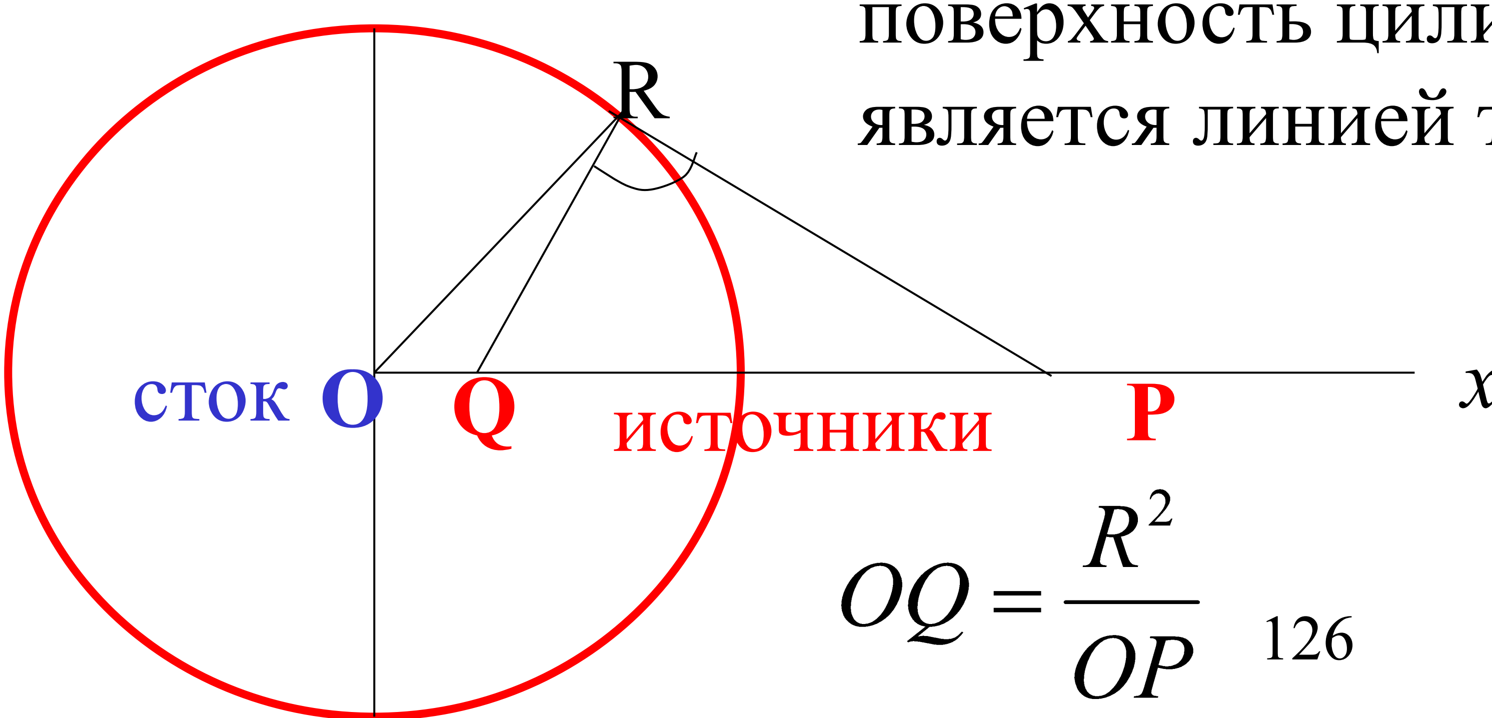



$$\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right] = const\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\right]$$

№3

При обтекании цилиндра жидкостью, его поверхность должна быть линией тока, а $\psi$=const.

Пусть в центре цилиндра имеется сток, а на оси $0x$ лежат два источника: один внутри цилиндра, другой вне цилиндра, $Q$ – инверсия точки $P$, *мощность* одинакова. Показать, что поверхность цилиндра является линией тока




$$OQ = \frac{R^2}{OP}$$

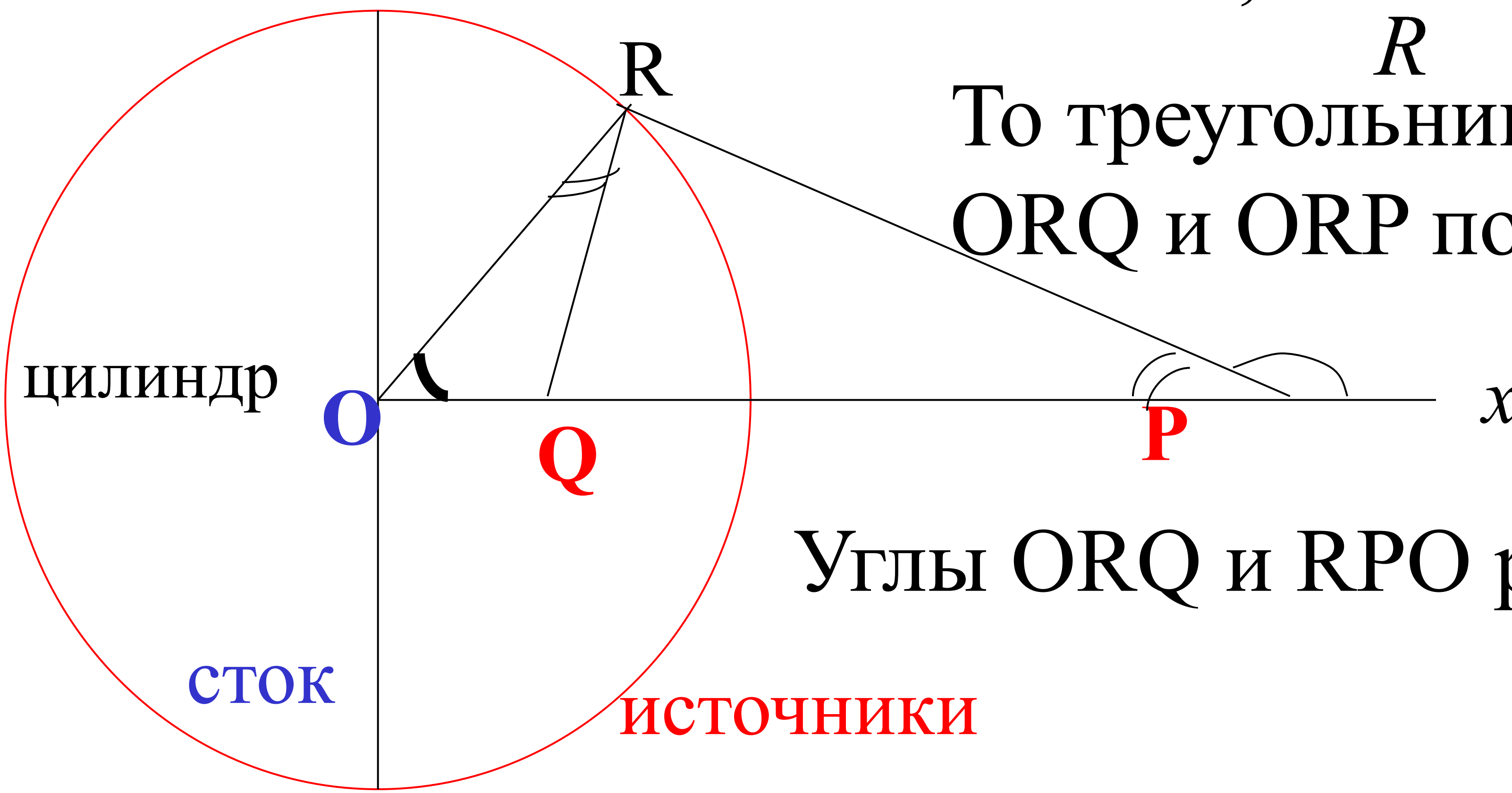
$$w = \varphi + i\psi \qquad z = re^{i\theta}$$

$$\varphi + i\psi = \mu \ln(re^{i\theta}) = \mu \ln r + i\mu\theta,$$

$$\varphi = \mu \ln r, \qquad \psi = \mu\theta$$

Так как, $\dfrac{OQ}{R} = \dfrac{R}{OP}$

То треугольники ORQ и ORP подобны




Углы ORQ и RPO равны

$$\psi = -\mu\left(\angle RPx + \angle RQx - \angle ROx\right) =$$

$$= -\mu\left(\angle RPx + \angle ORQ\right) =$$

$$= -\mu\left(\angle RPx + \angle RPQ\right) = -\pi\mu = \text{const}$$