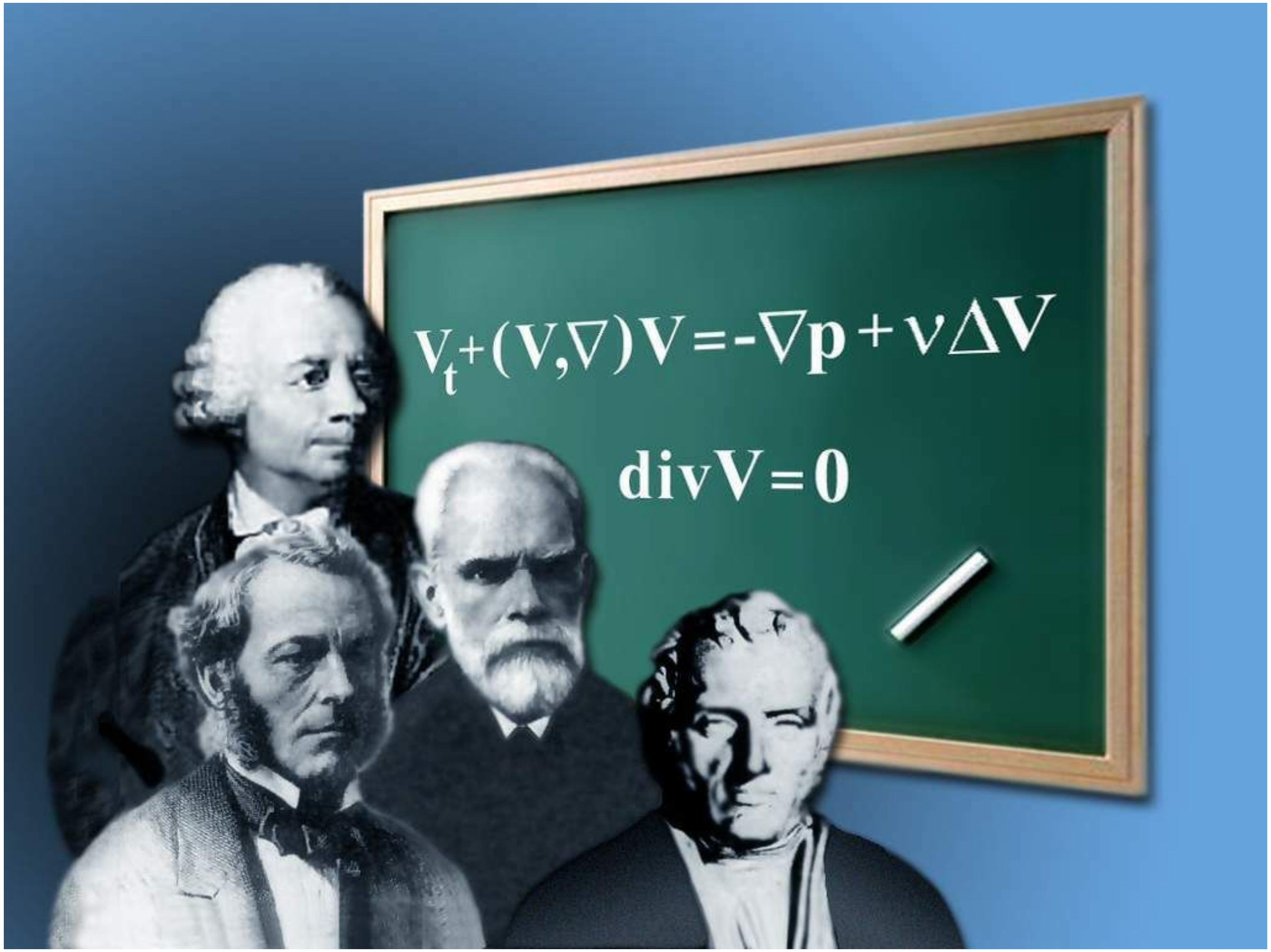


Эйлер, Ляпунов, Навье и Стокс

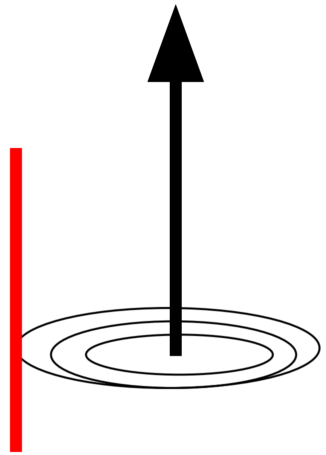
Поле скорости по заданному полю вихрей и расхождения скорости

Компоненты ротора скорости: $\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$

$$\Omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

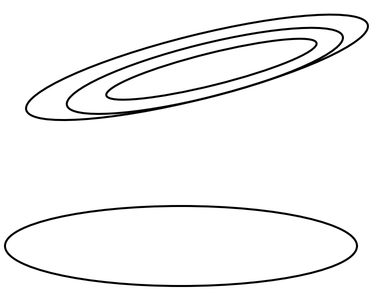


Вихревые линии - линии, направление которых совпадает всюду с мгновенной осью вращения жидкости.

Дифференциальное уравнение вихревых линий

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$

Если через каждую точку малой замкнутой кривой провести соответствующую вихревую линию, то получим трубку, которая называется вихревой трубкой. Жидкость внутри трубки образует вихревую нить или просто вихрь.



Задача

Заданы распределения вихря и дивергенции скорости в любой точке жидкости, нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей данный объем жидкости

Предположения

1. Жидкость заполняет все пространство,
2. находится в покое на бесконечности.
3. Заданы вихрь скорости $\mathbf{\Omega}$ расхождение (дивергенция) скорости Θ, равные 0 вне объема τ.
4. Область τ может быть разложена на конечное число частей, в которых Θ и $\mathbf{\Omega}$ равномерно непрерывны, так же как и их частные производные.

5. На поверхностях разрыва нормальная составляющая $\boldsymbol{\Omega}$ остается непрерывной

Искомую скорость u будем рассматривать как сумму двух слагаемых: одно определяется расхождением скорости, и ее вихрь равен нулю, а второе – ротором скорости, а ее дивергенция равна нулю.

Скорость задается уравнениями:

$$div u = \Theta \quad rot u = \Omega$$

$$u = u_1 + u_2$$

существует

$$div u_1 = \Theta \quad rot u_1 = 0 \quad u_1 = \nabla \varphi$$

$$rot u_2 = \Omega \quad div u_2 = 0$$

Для определения u_1 получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Theta$$

Предположим, что функция Θ равна 0 всюду, кроме очень малой окрестности τ_0 начала координат, причем

$$\int_{\tau_0}\Theta d\tau=1$$

По теореме Гаусса

$$\int\limits_{\tau_0} \overset{\boxtimes}{\nabla} u \, d\tau = \int\limits_{s_0} u_n \, ds$$

Т.е. объемный интеграл от расхождения вектора скорости равен потоку вектора скорости через поверхность S_0, ограничивающую объем τ_0. Поток должен равняться единице в силу предположения

$$\int\limits_{\tau_0} \Theta \, d\tau = 1$$

Пусть $\tau \to 0$. Получаем картину течения от точечного источника в начале координат интенсивности 1. В силу симметрии потенциал скорости φ – функция только r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

φ всюду, кроме начала координат, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

φ – функция только *r, в* сферических координатах нет зависимости от широты и долготы.

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial\left(r^2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} = 0$$

Интегрируем:

$$r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} = Const$$

Произвольная постоянная определяется из условия, что поток скорости через произвольную сферу с центром в начале координат равен 1. На сфере нормальная составляющая скорости имеет постоянное значение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Const}{r^2}$$

а площадь поверхности сферы равна $4\pi r^2$

$$\Pi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} 4\pi r^2 = \frac{Const}{r^2} 4\pi r^2 = 1$$

Получаем: $$Const = \frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r}$$

Произвольная постоянная не влияет на величину скорости течения и может быть отброшена

Предположим, что интенсивность источника имеет значение q

$$\int_{\tau} \Theta d\tau = q$$

В этом случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad \varphi = -\frac{q}{4\pi r} \qquad u = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Если задано распределение источников $\Theta(\xi, \eta, \zeta)$

$$\varphi(x, y, z) = -\int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r} d\tau$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Где r расстояние от точки $N(x,y,z)$, где ищем поле скорости до точки $M(\xi,\eta,\zeta)$, где расположен источник. Интегрировать надо по (ξ,η,ζ).

Решение системы

$$div u_1 = \Theta$$

$$rot u_1 = 0$$

$$u_1 = \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau$$

Определим вектор u_2 для системы

$$rot\,\vec{u}_2 = \vec{\Omega} \qquad div\,\vec{u}_2 = 0$$

Удовлетворим второму уравнению, если положим

$$\vec{u}_2 = rot\,\vec{A}$$

где A – векторный потенциал. Тогда

$$rot\; rot\,\vec{A} = \vec{\Omega}$$

Можно доказать тождество:

$$rot\; rot\,\vec{A} = grad\; div\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Получаем уравнение:

$$grad\ div\vec{A} - \Delta\vec{A} = \vec{\Omega}$$

$div\vec{A} = 0$ (Можно считать не нарушая общности)

$$\Delta\vec{A} = -\vec{\Omega}$$

$$\Delta A_x = -\Omega_x \quad \Delta A_y = -\Omega_y \quad \Delta A_z = -\Omega_z$$

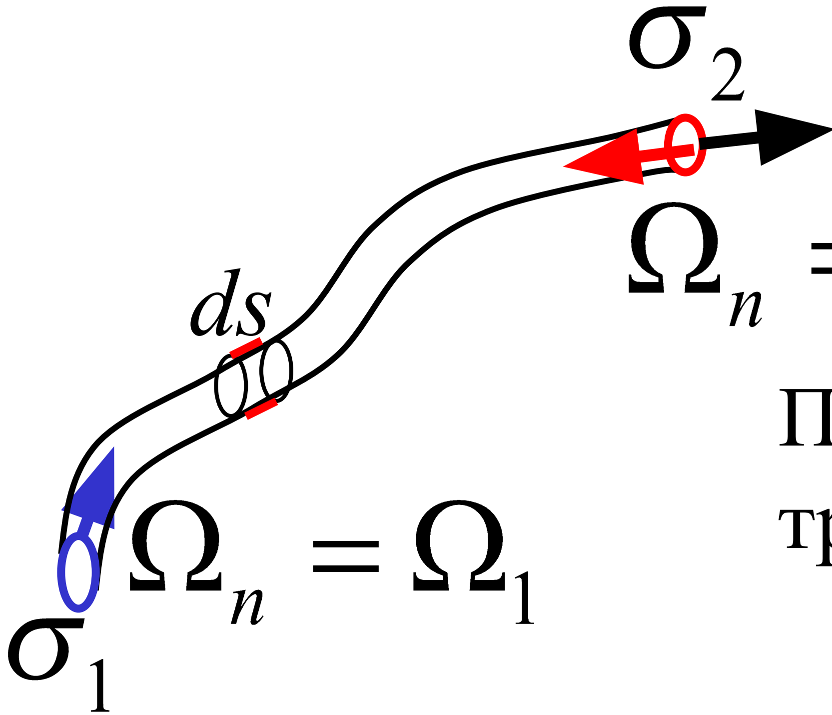
$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\tau$$

$$u_2 = \frac{1}{4\pi} rot \int \frac{\Omega}{r} d\tau$$

$$\vec{u} = grad\varphi + rot\vec{A}$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta}{r}d\tau \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\Omega}}{r}d\tau$$

Одна вихревая нить
Несжимаемая
жидкость, покоящаяся
на бесконечности



Применяя к вихревой трубке свойство

$$\int_S \Omega_n ds = 0$$

учитывая, что боковые поверхности трубки – есть вихревые линии, т.е. параллельны ротору скорости, получаем для суммарного потока вихря:

$$\Omega_1 \sigma_1 - \Omega_2 \sigma_2 = 0$$

$$\Theta = 0 \qquad \Delta\varphi = 0$$

$$d\tau = \sigma ds$$

$$\Omega_x = \Omega\cos(\Omega, x) = \Omega\frac{d\xi}{ds}$$

$$\Omega_y = \Omega\frac{d\eta}{ds} \qquad \Omega_z = \Omega\frac{d\zeta}{ds}$$

$$\frac{\Omega_x d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma d\xi}{r}; \qquad \frac{\Omega_y d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma d\eta}{r};$$

$$\frac{\Omega_z d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma d\zeta}{r}$$

$$\vec{u} = rot\vec{A} \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_L \frac{\vec{\Omega}}{r} d\tau$$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\xi}{r}; A_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\eta}{r}; A_z = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\zeta}{r}$$

$$\gamma = \Omega\sigma$$

$$u_x = \left(rot\vec{A} \right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_L \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\eta \right]$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

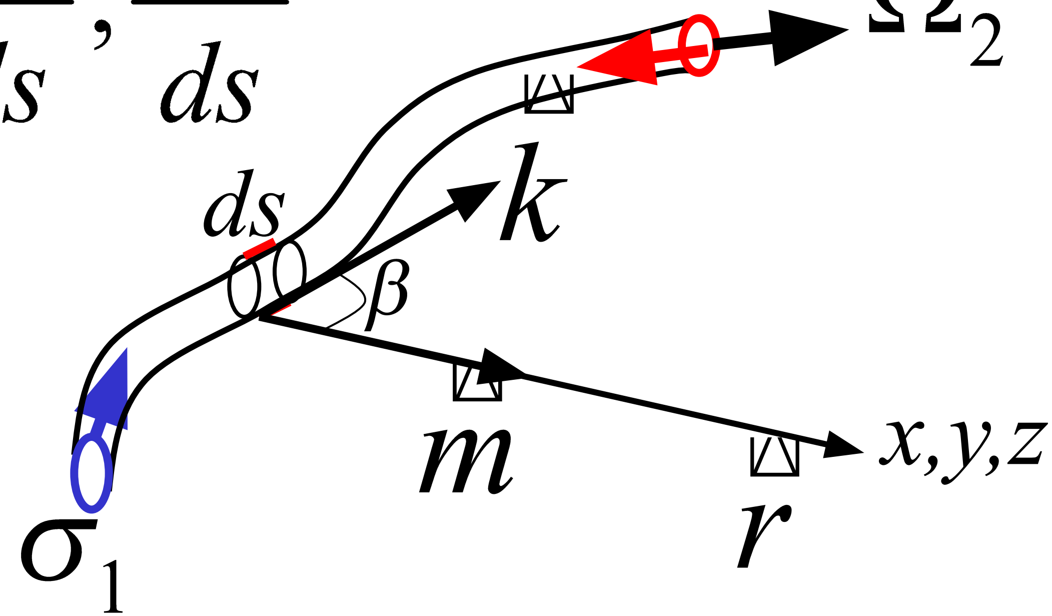
$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[\left(\frac{\eta - y}{r}\right)\frac{d\zeta}{ds} - \left(\frac{\zeta - z}{r}\right)\frac{d\eta}{ds}\right]\frac{ds}{r^2}$$

$$u_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)\frac{d\xi}{ds} - \left(\frac{\xi - x}{r}\right)\frac{d\zeta}{ds}\right]\frac{ds}{r^2}$$

$$u_z = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \left[\left(\frac{\xi - x}{r}\right)\frac{d\eta}{ds} - \left(\frac{\eta - y}{r}\right)\frac{d\xi}{ds}\right]\frac{ds}{r^2}$$

Составляющие единичного вектора **k**

$$\frac{d\xi}{ds};\frac{d\eta}{ds};\frac{d\zeta}{ds}$$



Составляющие единичного вектора **m**

$$-\frac{\xi - x}{r};-\frac{\eta - y}{r};-\frac{\zeta - z}{r}$$

Вклад в величину скорости в точке (x,y,z) от элемента вихревой трубки ds определяется выражением:

$$\vec{u}_{ds} = \frac{\gamma}{4\pi}\left(\vec{k} \times \vec{m}\right)\frac{ds}{r^2}$$

$$\left|u_{ds}\right| = \frac{\gamma}{4\pi}\frac{\sin(\beta)ds}{r^2}$$

Электродинамика:

Сила, действующая на магнитный полюс в точке (*x,y,z)* от элемента проводника *ds*, *по которому течет ток (Био и Савара)*

Прямолинейные

вихри

плоское движение

несжимаемая жидкость

Пусть движение происходит в плоскости x, y. Вихревые линии являются прямыми, параллельными оси z. ξ, η, ζ – координаты точек вихревой трубки, ds – элемент дуги трубки

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 \qquad \frac{\partial \varsigma}{\partial s} = 1$$

Скорость жидкости в точке (*x*, *y*) определяется:

$$u_x = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta$$

$$u_y = -\frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi - x}{r^3} d\zeta$$

$$u_z = 0$$

Считая ξ, η, (*x*, *y*, *z*) *постоянными*, интегрируем

Достаточно рассматривать движение на плоскости $0xy$, причем вместо вихревой нити точку пересечения ее с плоскостью $0xy$. Будем называть ее точечным вихрем. Под влиянием такого вихря частицы жидкости двигаются по окружностям, центром которых является вихрь. Положительным γ соответствует движение против часовой стрелки.

Вследствие симметрии движения центр вихря не будет смещаться.

Найти комплексный потенциал для точечного вихря.

$$u_x = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{y-\eta}{r^2}; u_y = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{x-\xi}{r^2}$$

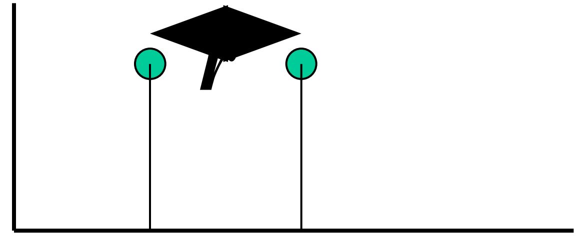
$$u_x - iu_y = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{y-\eta+i(x-\xi)}{r^2} =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi i}\frac{(z^* - z_0^*)}{(z-z_0)(z^*-z_0^*)} = \frac{\gamma}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)}$$

$$z_0 = \xi + i\eta; \quad z^* = x - iy; \quad z_0^* = \xi - i\eta$$

$$w = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0); \qquad \frac{dw}{dz} = u_x - iu_y$$

2 вихря



Две параллельные прямые вихревые нити в точках z_1 и z_2. Показать, что нити всегда сохраняют одинаковое расстояние друг от друга и вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг общего центра *C*. Пусть циркуляция одной нити равна γ_1 , а второй γ_2 .

Запишите комплексный потенциал для 2 нитей.

$$w = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\ln(z - z_1) + \frac{\gamma_2}{2\pi i}\ln(z - z_2)$$

Комплексная сопряженная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{dw}{dz} = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_1)} + \frac{\gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_2)}$$

$$u_x - iu_y = \frac{dz^*}{dt}$$

$$\frac{dz^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_1)} + \frac{\gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_2)}$$

Скорость первого вихря в точке z_1 (сам на себя не действует)

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}$$

Скорость второго вихря в точке z_2

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}$$

Отделяем мнимые и действительные части.

Обозначим расстояние между вихрями

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\times\gamma_1 \qquad + \qquad \times(\gamma_2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (1) \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (2) \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (4)$$

$$\gamma_1\frac{dx_1}{dt} + \gamma_2\frac{dx_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \mathrm{const}$$

$$\gamma_1\frac{dy_1}{dt} + \gamma_2\frac{dy_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 = \mathrm{const}$$

Получаем интеграл движения центра инерции системы двух вихрей

$$\frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \text{const}$$

$$\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \text{const}$$

Точка *C* (центр инерции) с координатами

$$x_c = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2}; \quad y_c = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Остается неподвижной во все время движения

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (1) \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (2) \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (4)$$

Вычитаем из первого третье уравнение, из второго – четвертое.

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2} \qquad \times\left(x_1 - x_2\right)$$

$$+$$

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2} \qquad \times\left(y_1 - y_2\right)$$

$$(x_1 - x_2)\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2)\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0$$

Интегрируем и получаем:

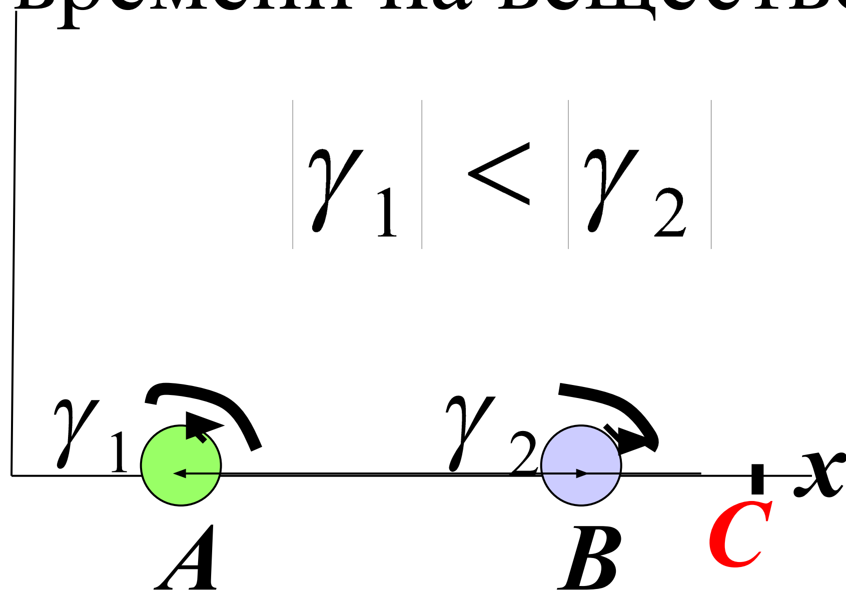
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \text{const}$$

$$r = \text{const}$$

Расстояние между вихрями не меняется в процессе перемещения

Два вихря, вращающиеся в разных направлениях, находятся в начальный момент времени на вещественной оси.

$$\gamma_1 < \gamma_2$$



Найти скорости вихрей, расстояние до центра системы, угловую скорость вращения вихрей.

Вихревая нить с координатами (ξ, η) и циркуляцией γ сообщает жидкости в точке (x, y) скорость, компоненты которой равны

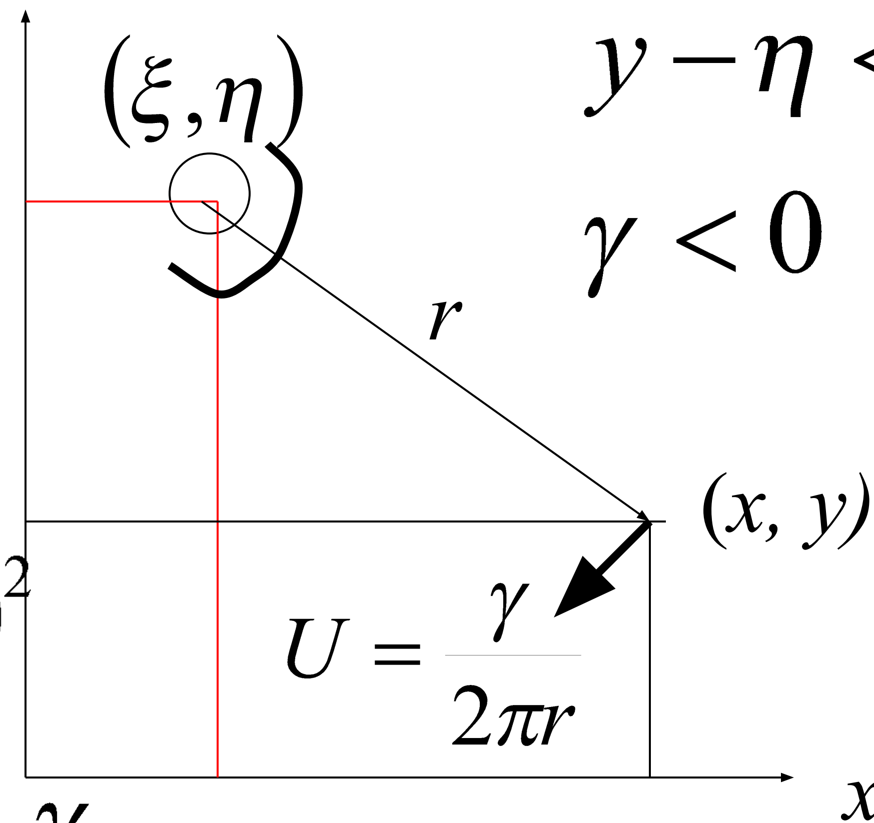
$$u_x = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{y-\eta}{r^2}$$

$$u_y = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{x-\xi}{r^2}$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

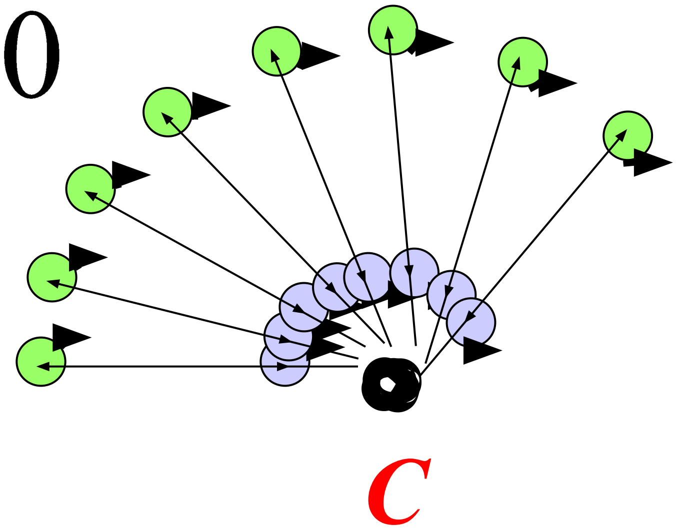
$$y - \eta < 0$$

$$\gamma < 0$$



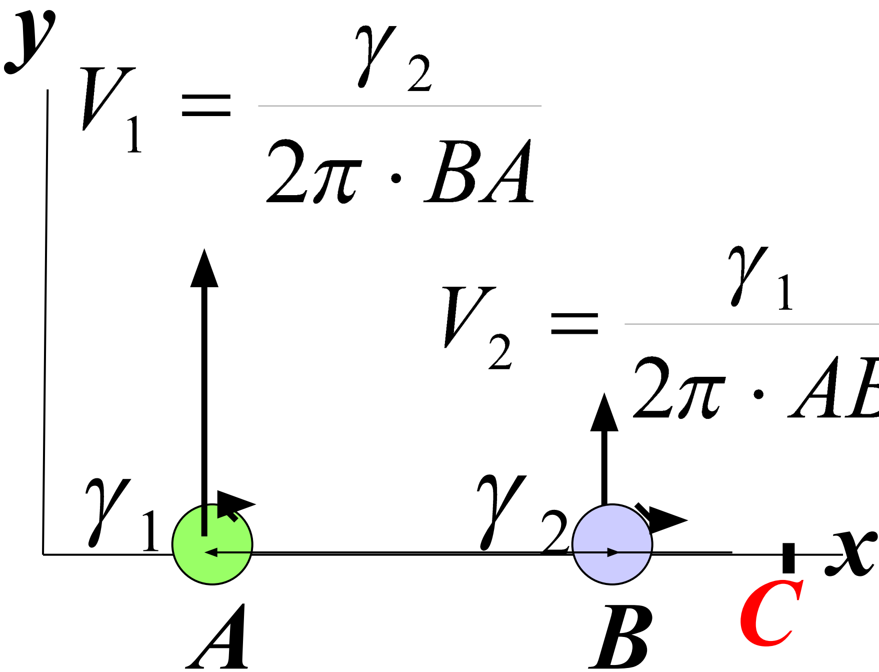
$$U = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2}} = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

$$|\gamma_1| < |\gamma_2| \qquad \gamma_1 > 0; \gamma_2 < 0$$



$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA}$$

$$V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB}$$



$$AC = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 (x_1 + AB)}{\gamma_1 + \gamma_2} - x_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} AB$$

Угловая скорость вращения вихрей вокруг центра **C**

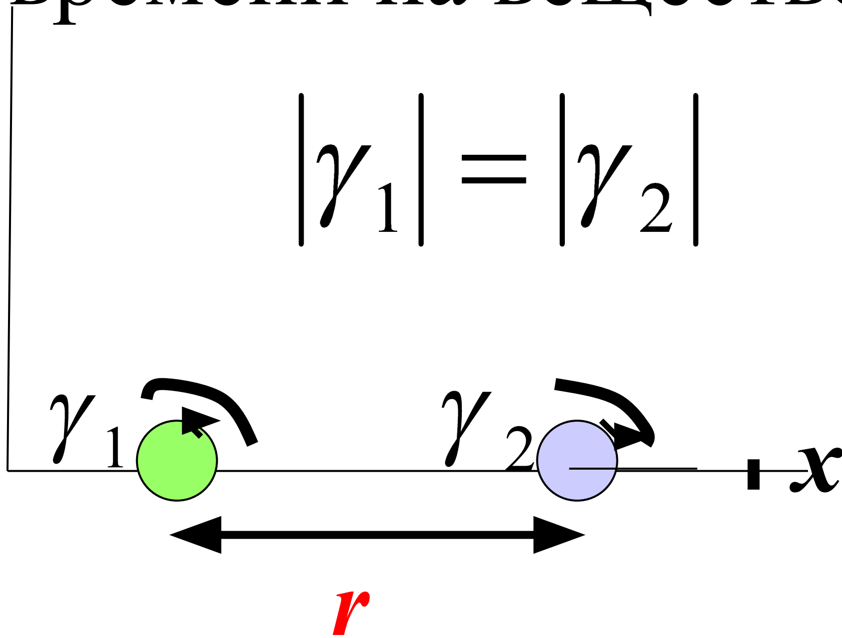
$$|\gamma_1| < |\gamma_2|$$

$$\omega_1 = \frac{V_1}{AC} = \omega_2 = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi \cdot AB^2}$$

Где будет точка С, если вихри вращаются в одном направлении?

Два вихря, вращающиеся в разных направлениях, находятся в начальный момент времени на вещественной оси.

$$|\gamma_1| = |\gamma_2|$$



Найти скорости вихрей, расстояние до центра системы.

Скорость первого вихря в точке z_1 (сам на себя не действует)

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z_1 - z_2}$$

Скорость второго вихря в точке z_2

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z_2 - z_1}$$

Отделяем мнимые и действительные части.

Обозначим расстояние между вихрями

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\frac{d\overset{*}{z_1}}{dt} = \frac{d\overset{*}{z_2}}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{(z_1 - z_2)}$$

$$\frac{d\overset{*}{z_1}}{dt} = \frac{d\overset{*}{z_2}}{dt} = \frac{\gamma_1}{2\pi i r} = -\frac{\gamma_1 i}{2\pi r}$$

Отделяем вещественную часть от мнимой :

$$u_{x1} = u_{x2} = 0 \qquad u_{y1} = u_{y2} = \frac{\gamma_1}{2\pi L}$$

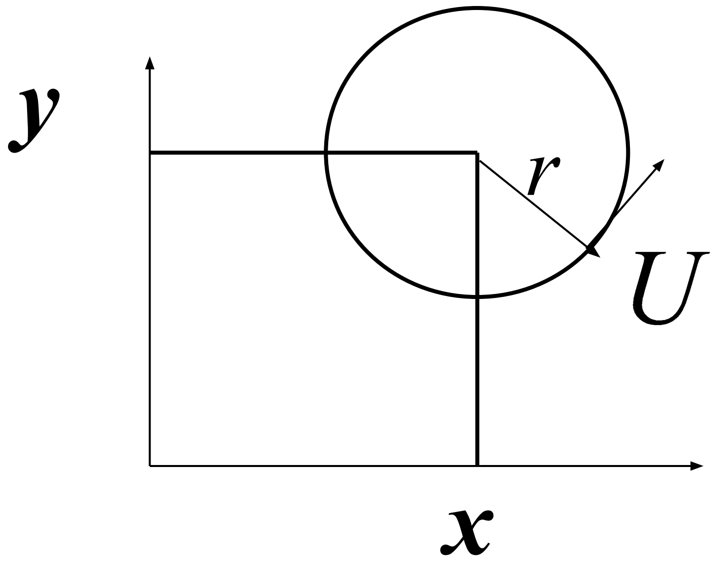
Вихри перемещаются с постоянной скоростью, перпендикулярно прямой, соединяющей вихри в положительном направлении оси y

Пример 1

Одна вихревая нить в точке (x,y), циркуляция скорости внутри бесконечно малого сечения имеет постоянное значение.

Найти центр системы

$$\overline{x_c} = \frac{\gamma x}{\gamma} = x \qquad \overline{y_c} = \frac{\gamma y}{\gamma} = y$$



$$U = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

Центр одиночного вихря не смещается во времени.

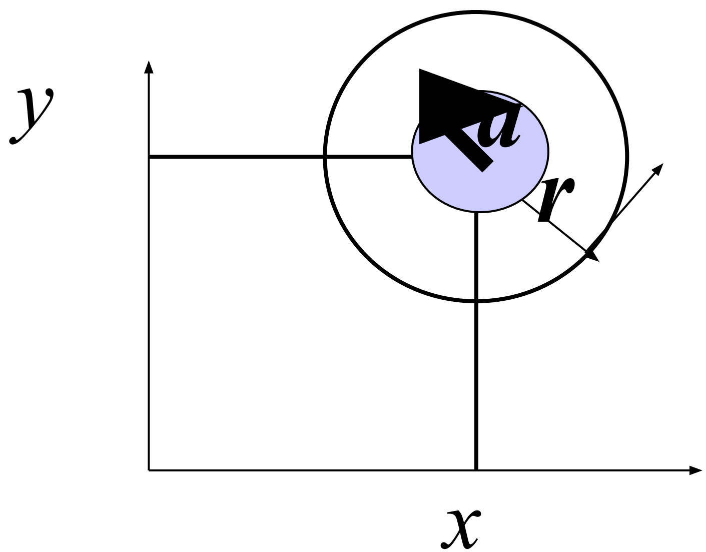
Пример 2

Внутри круга радиуса a жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью ω. Определить скорость вне круга.

$$U = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

$$\gamma = \varsigma\sigma = \pm 2\omega\pi a^2$$

$$U = \frac{\omega a^2}{r}$$



На границе вихря скорость равна **ω a**

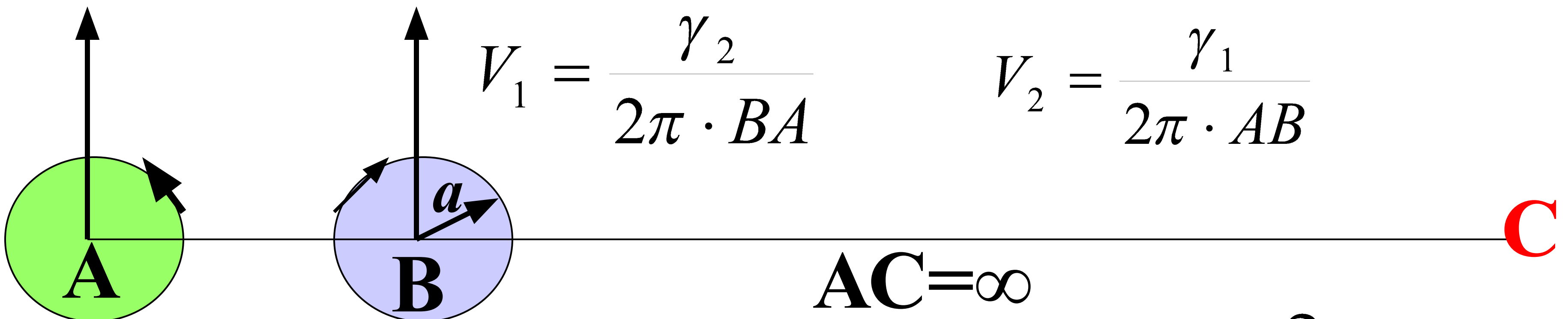
Пример 3

Как будут двигаться 2 вихря радиуса a, если они имеют циркуляцию разного знака, но одинаковую по модулю? Вихри вращаются как твердое тело.

Движение двух вихрей с противоположным направлением вращения и $\gamma_1 = -\gamma_2$

$$AC = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} AB = \infty$$

$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA} \qquad V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB}$$



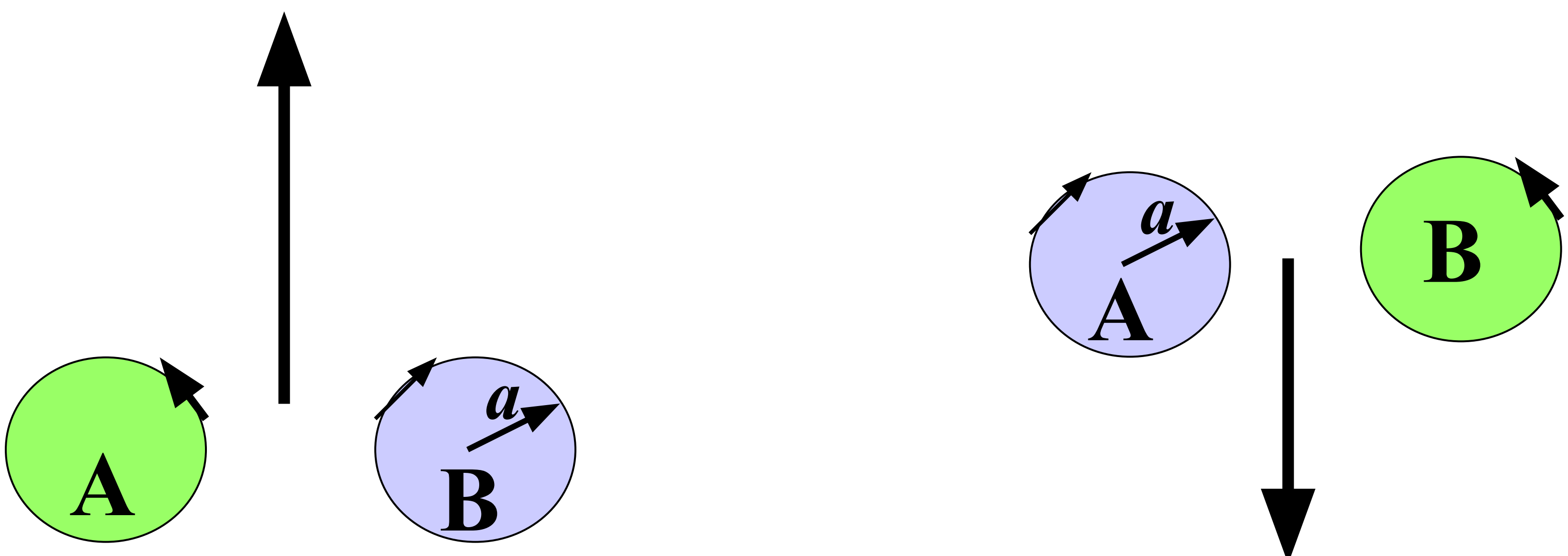
AC=∞

$$\gamma = \varsigma\sigma = \pm 2\omega\pi a^2$$

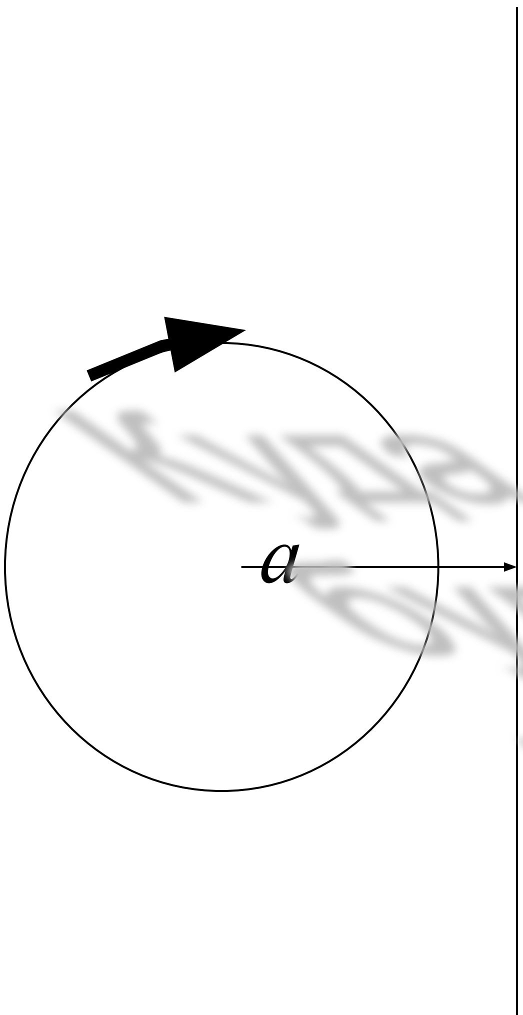
$$\mathbf{V_1=V_2=}\ \frac{\omega a^2}{AB}$$

Вихри двигаются по прямой с одинаковой скоростью

Пример 3



Пример 4

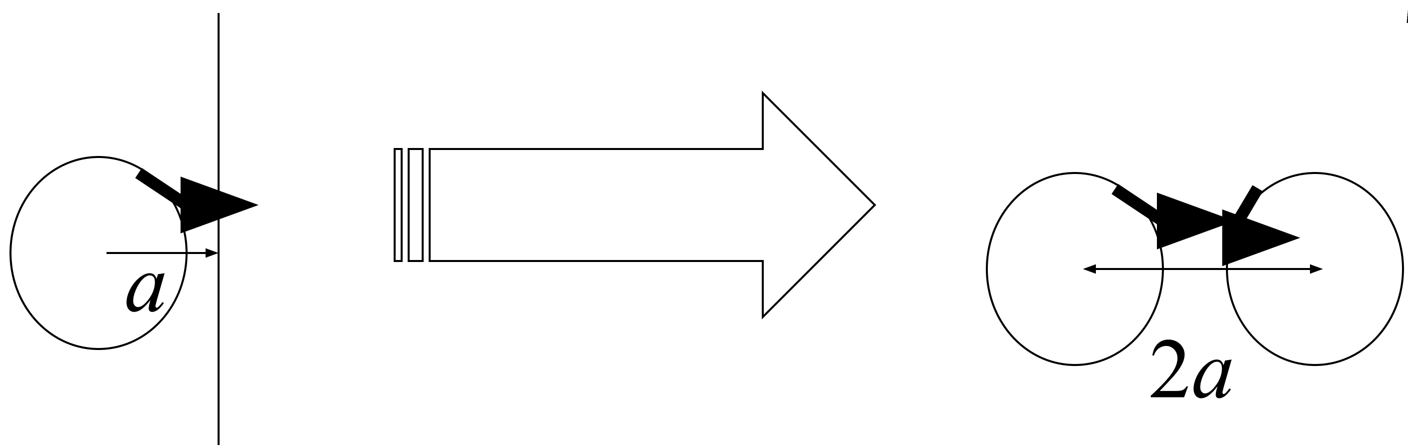


Куда
будет двигаться
вихрь?

Найти скорость перемещения вихря у твердой стенки

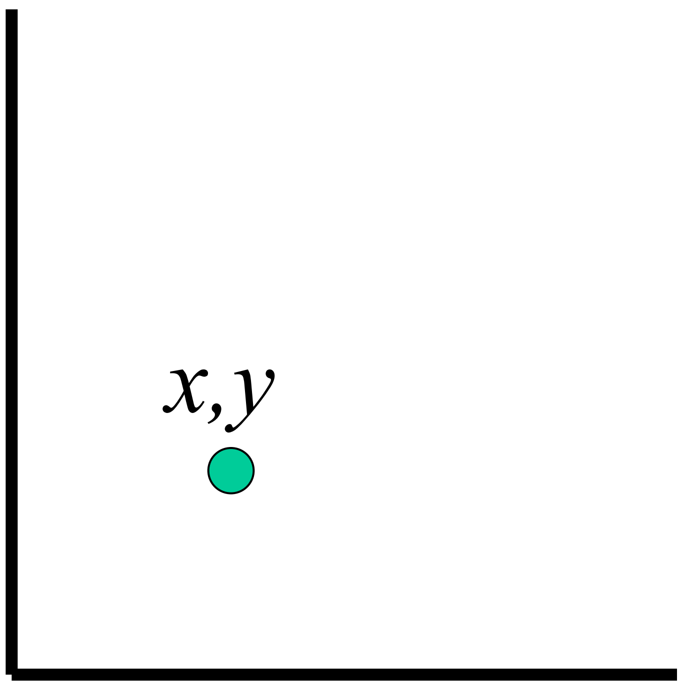
Так как скорость жидкости во всех точках плоскости симметрии направлена по касательной, то можно предположить, что эта плоскость образует твердую границу для жидкости. Таким образом систему «вихрь у твердой границы» можно смоделировать системой, представляющей собой пару вихрей. Вихрь у твердой границы будет перемещаться с постоянной скоростью

$$V = \frac{\gamma}{4\pi \cdot a}$$



Пример 5

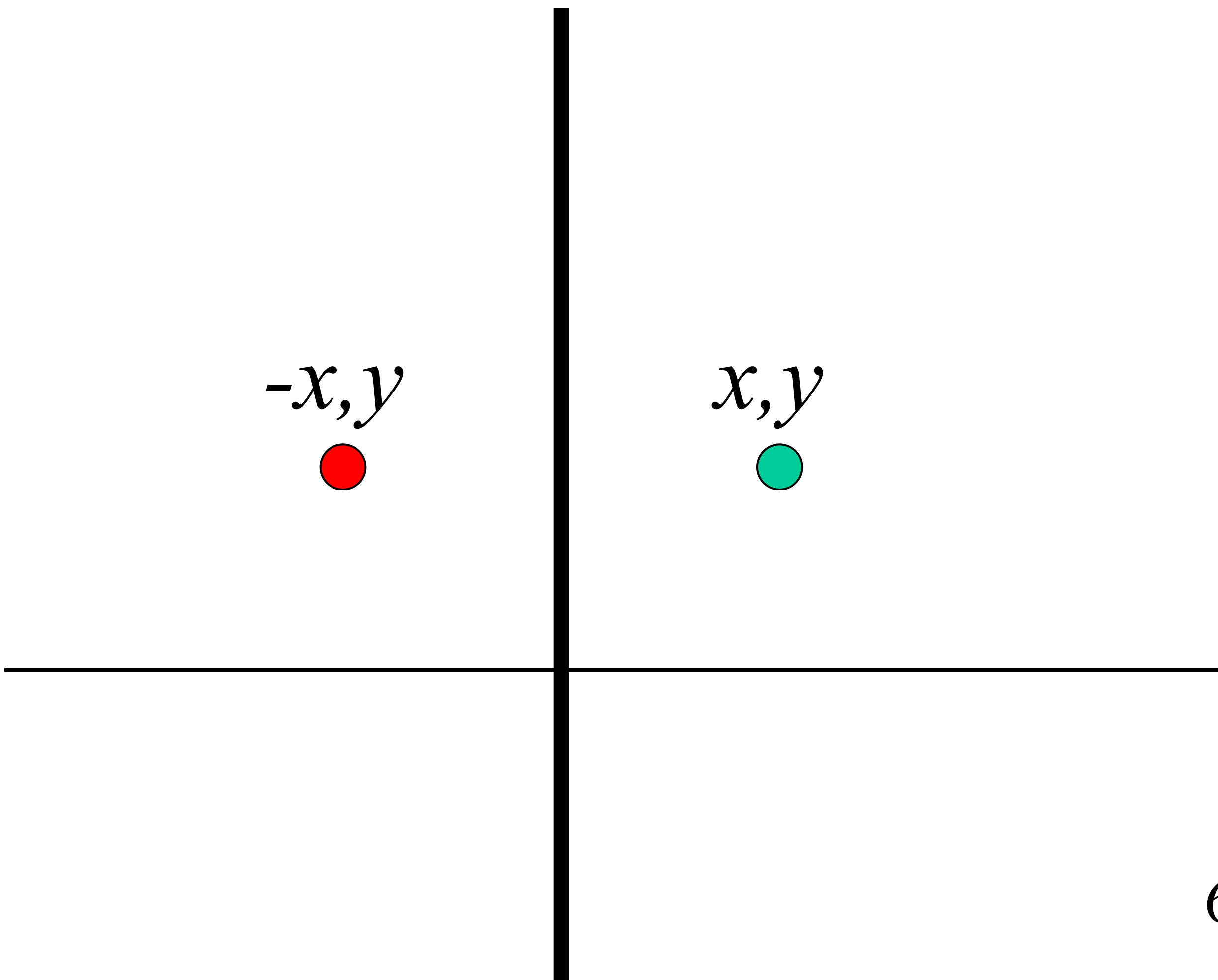
В точке с координатами x,y находится прямая вихревая нить. Жидкость ограничена твердыми стенками, образующими прямой угол вдоль осей координат. Найти траекторию вихря.


x,y

Так как циркуляция скорости вихря постоянна, то течение стационарно. В этом случае траектория вихря совпадает с линией тока, проходящей через точку (***x,y***)

Для того, чтобы описать влияние стенки, расположенной вдоль мнимой оси, поместим вихрь той же интенсивности, но с противоположным знаком циркуляции в точку (***-x,y***) ***(отразим вихрь)***

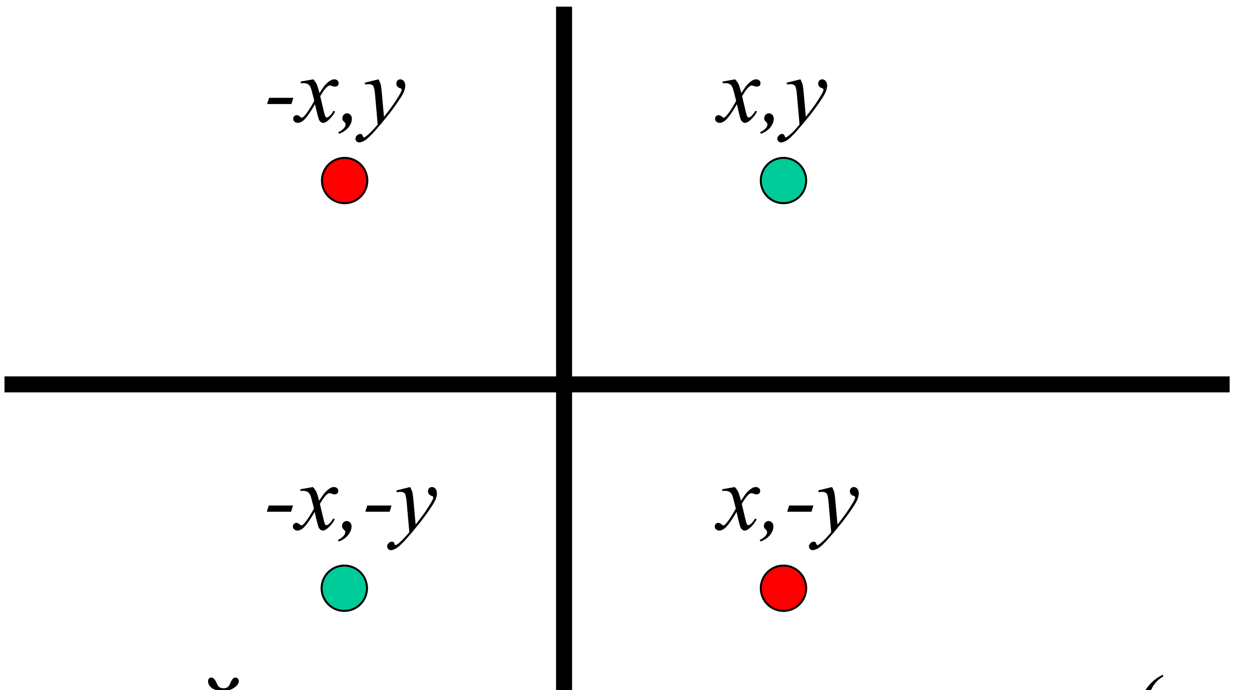
$$w = \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_1) - \frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z - z_2)$$



Для того, чтобы описать влияние стенки, расположенной вдоль действительной оси, поместим вихри той же интенсивности, но с противоположными знаками циркуляции в точки ($-x,-y$) *и* ($x,-y$)

$$w=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_1)-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_2)+$$

$$+\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_3)-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_4)$$



Надо найти потенциал в точке (***x,y***)

$$w = -\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left[(x+iy)-(-x+iy)\right]+$$

$$+\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left[(x+iy)-(-x-iy)\right]-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\left[(x+iy)-(x-iy)\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln 2x+\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(2x+2yi)-\frac{\gamma}{2\pi i}\ln 2yi=$$

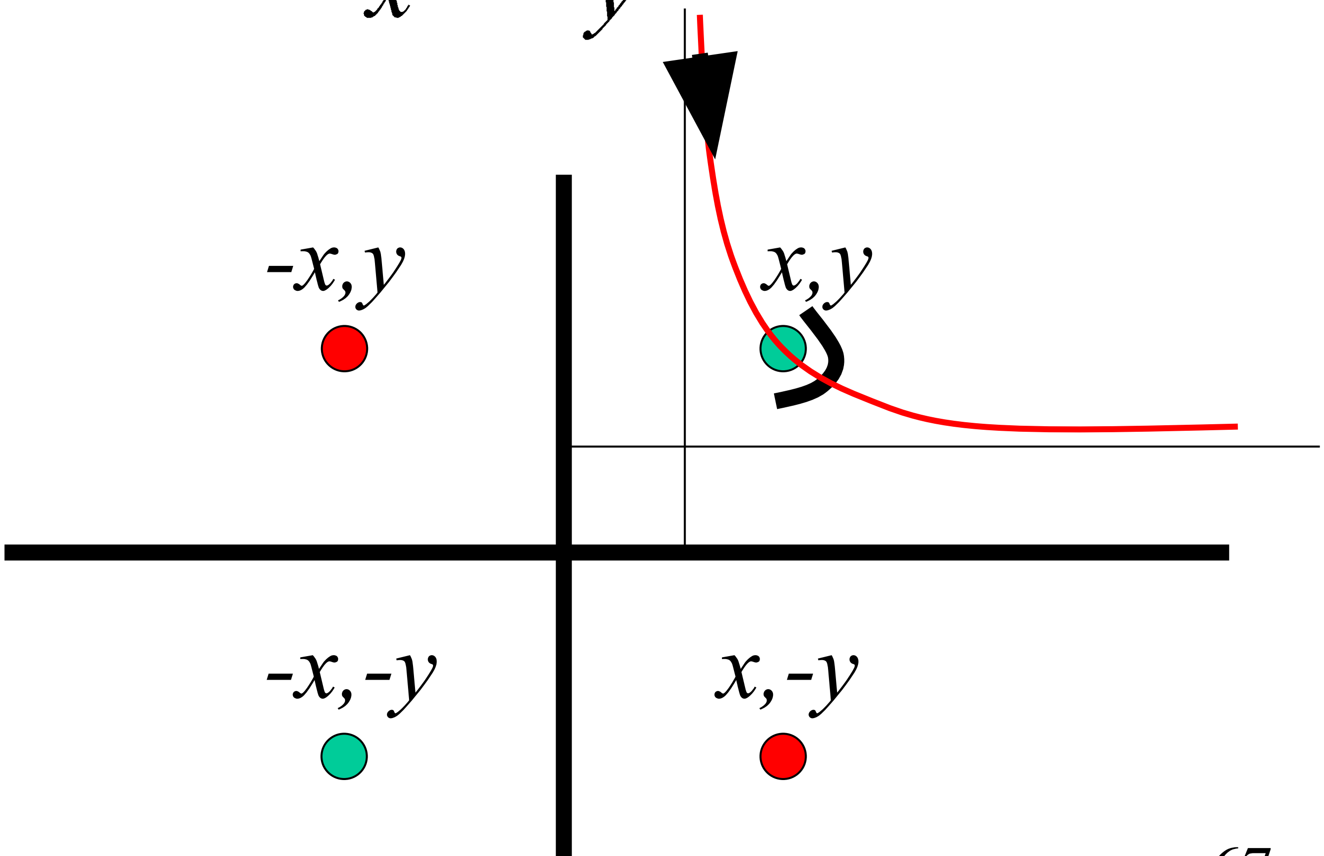
$$=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\frac{(x+yi)}{xy}$$

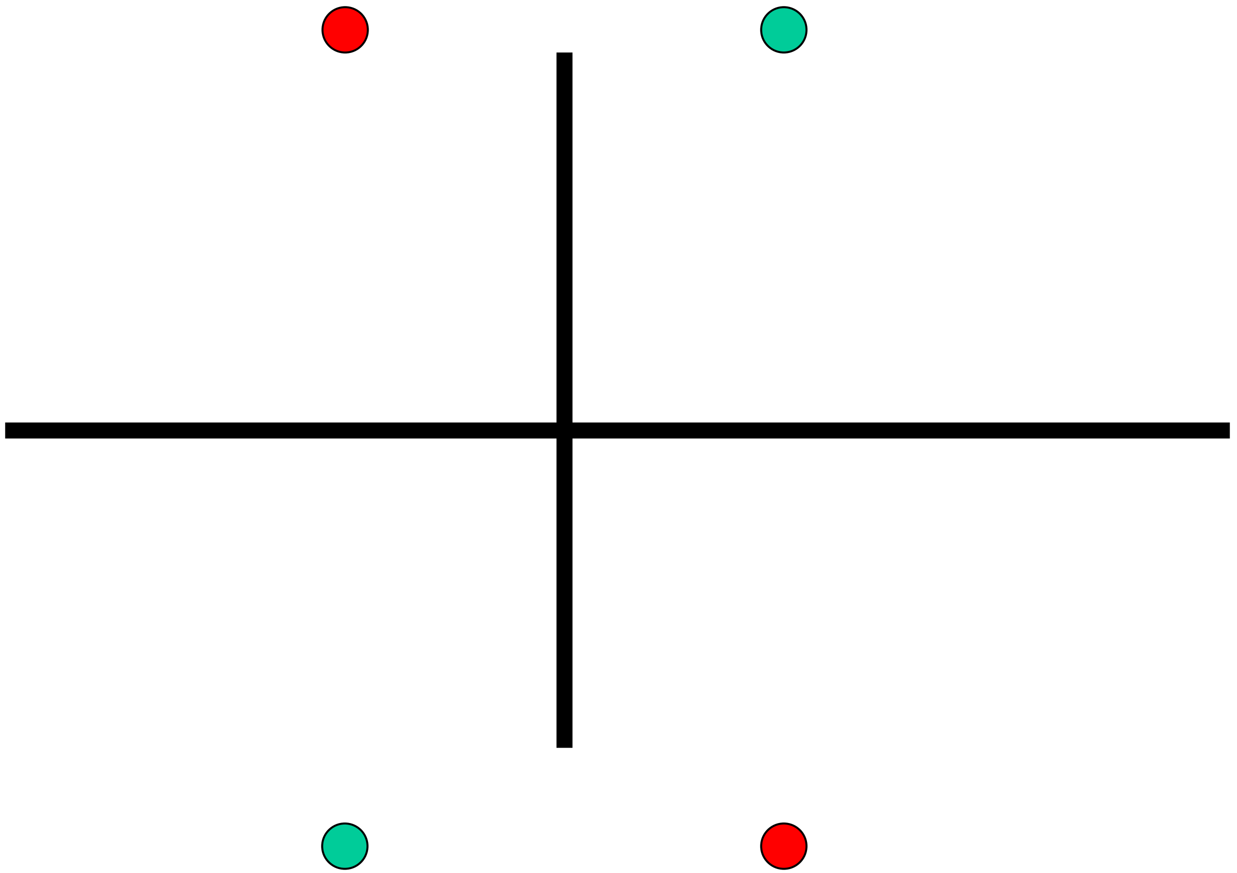
$$w=\varphi+i\psi;\quad \psi=-\frac{\gamma}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{(x+yi)}{xy}\right]=-\frac{\gamma}{2\pi}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$

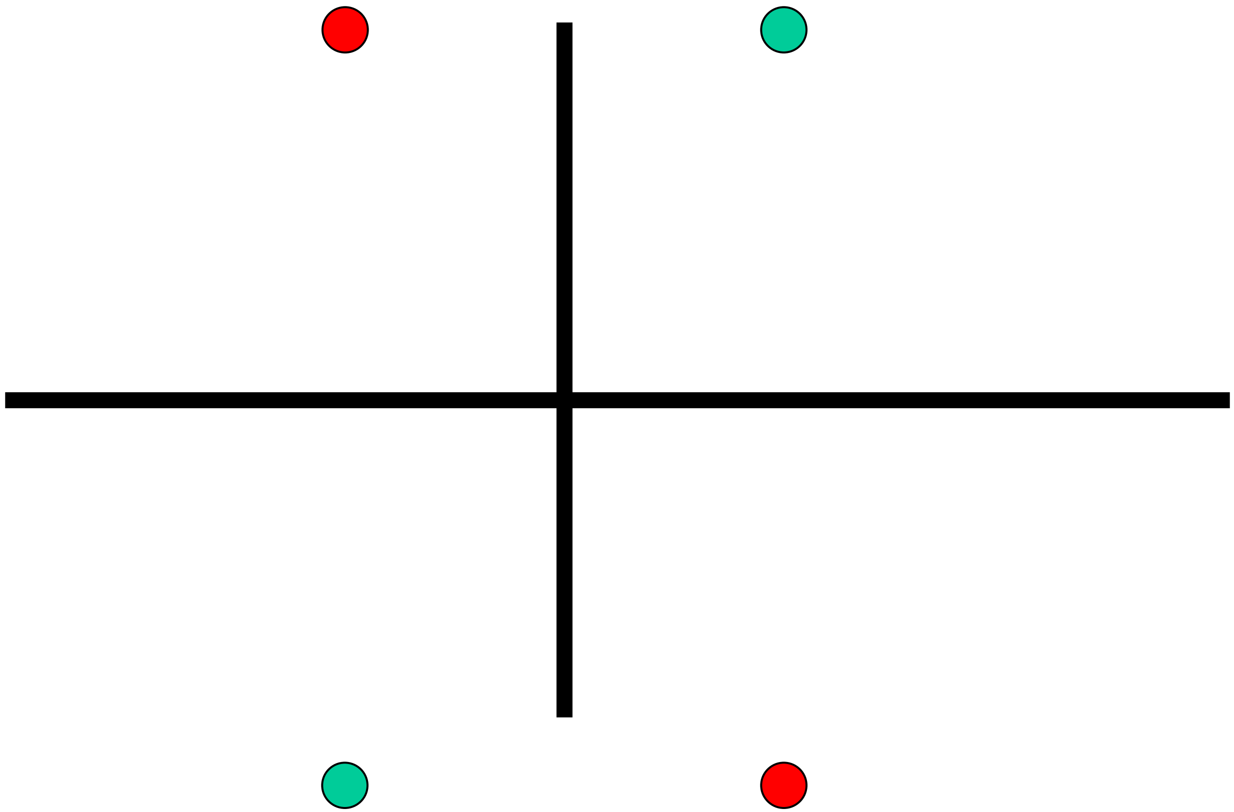
На линии тока ψ=const, т.е. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\text{const}$

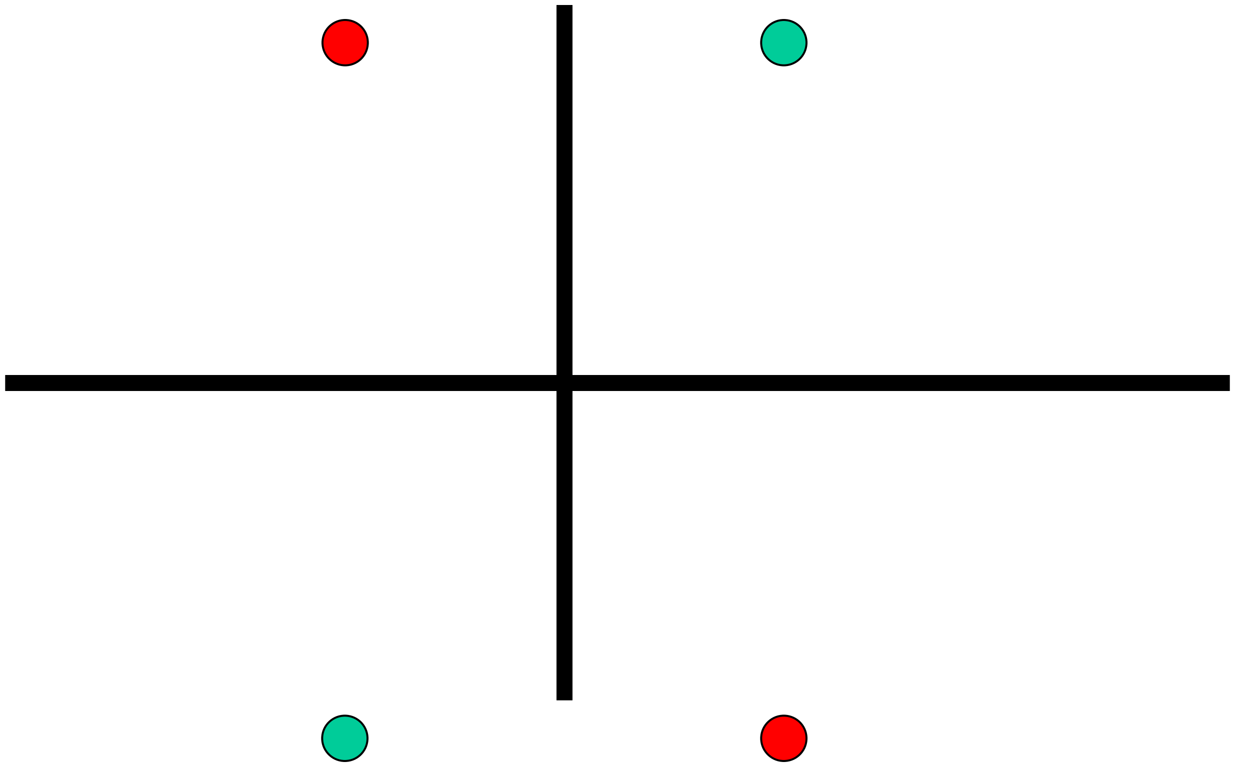
Траектория вихря в углу, образованном твердыми стенками

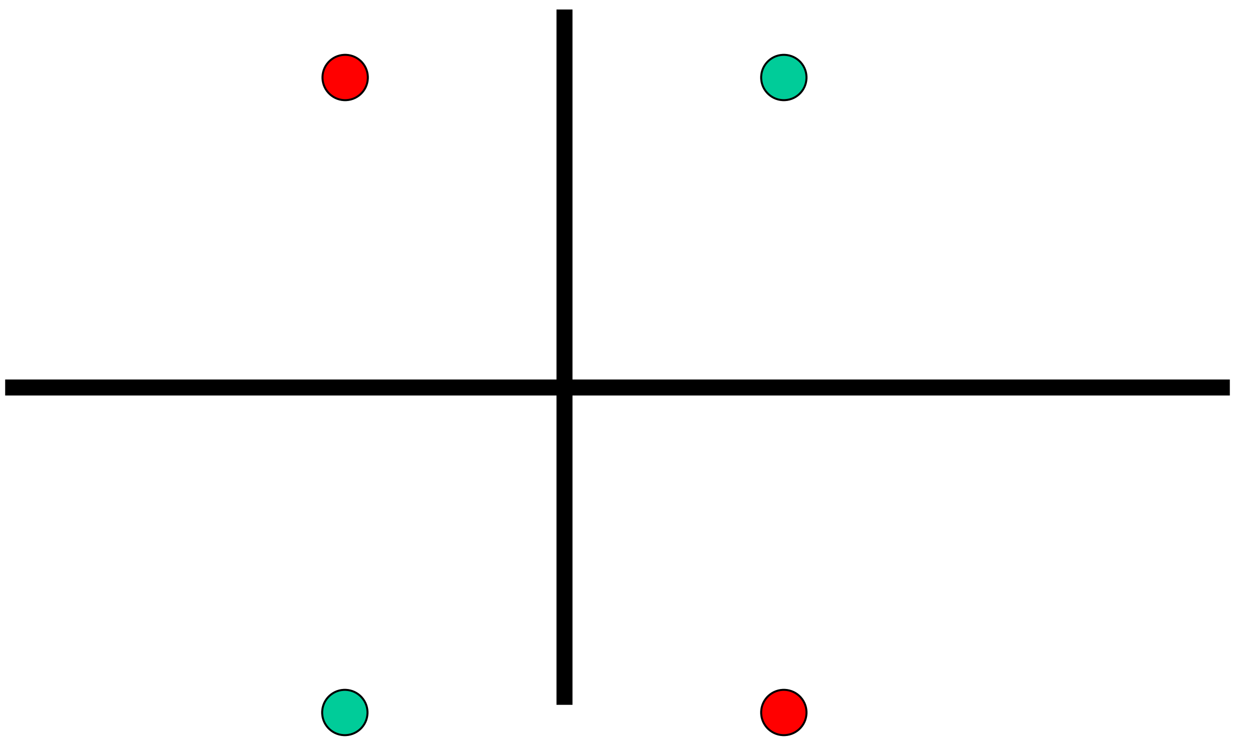
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\mathrm{const}$$

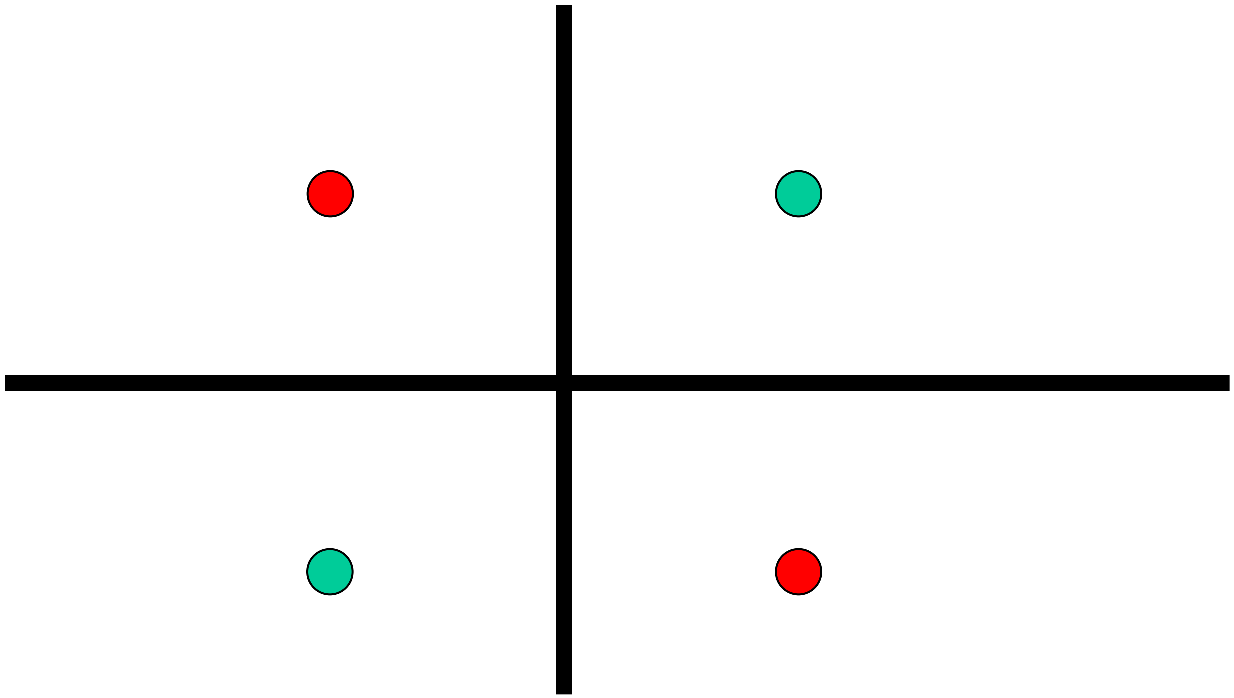


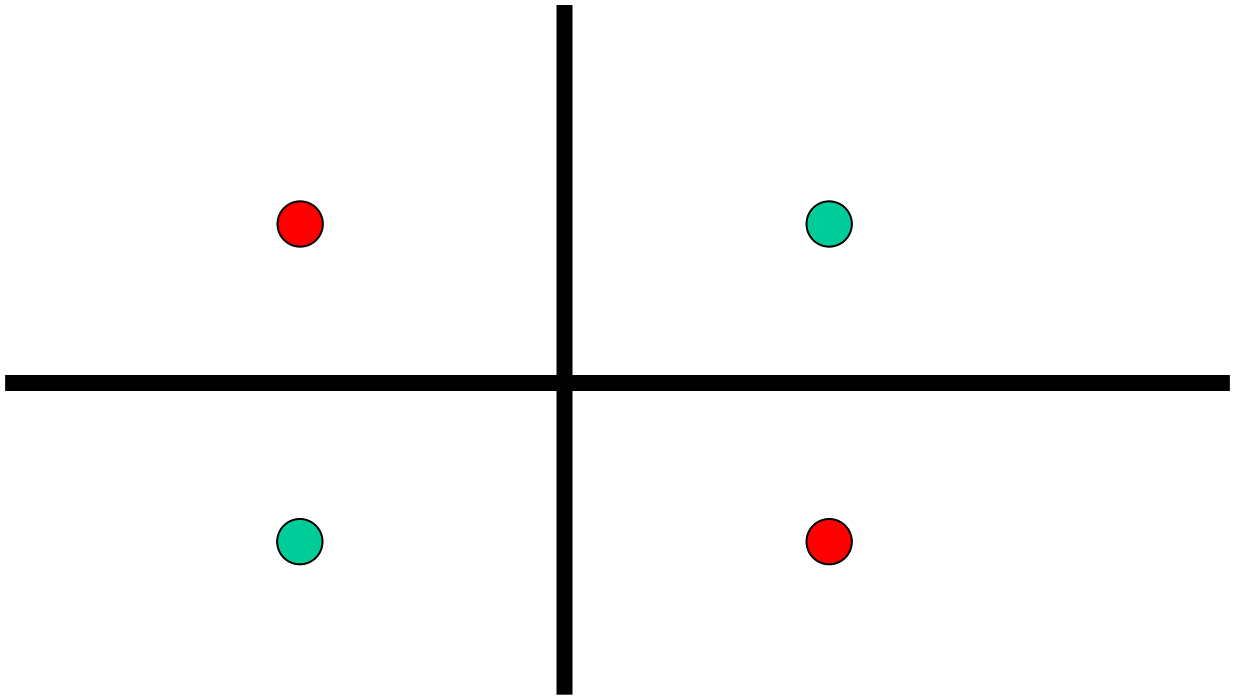


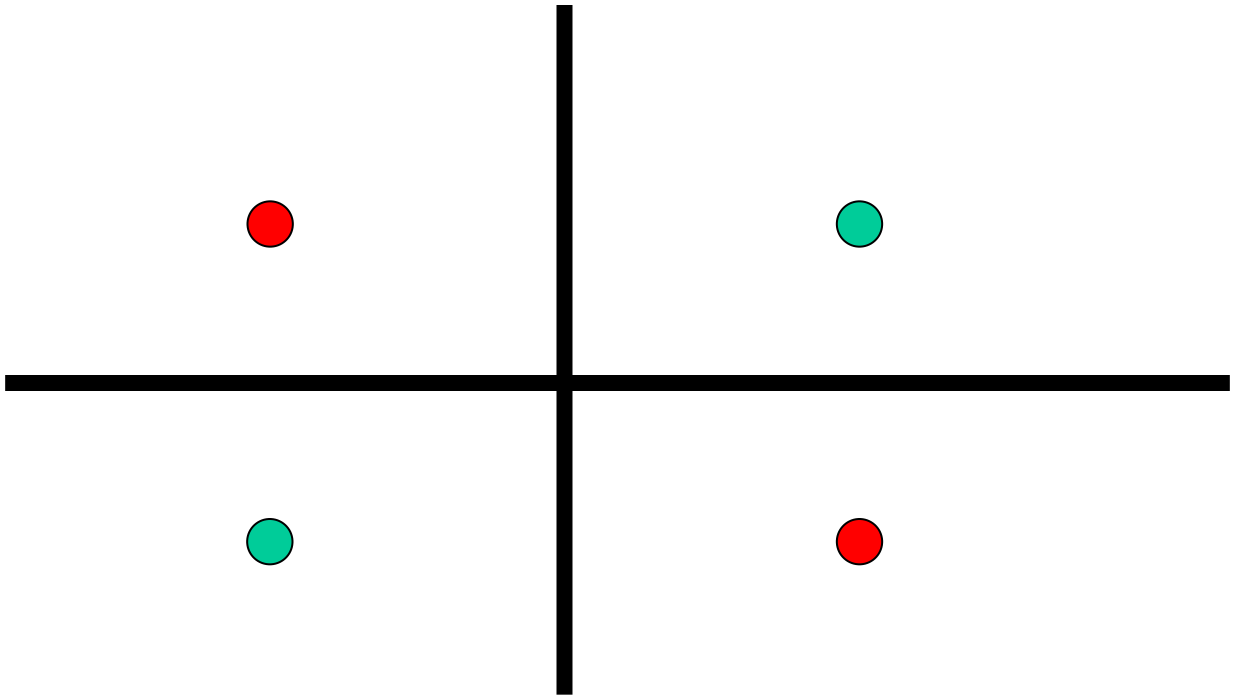


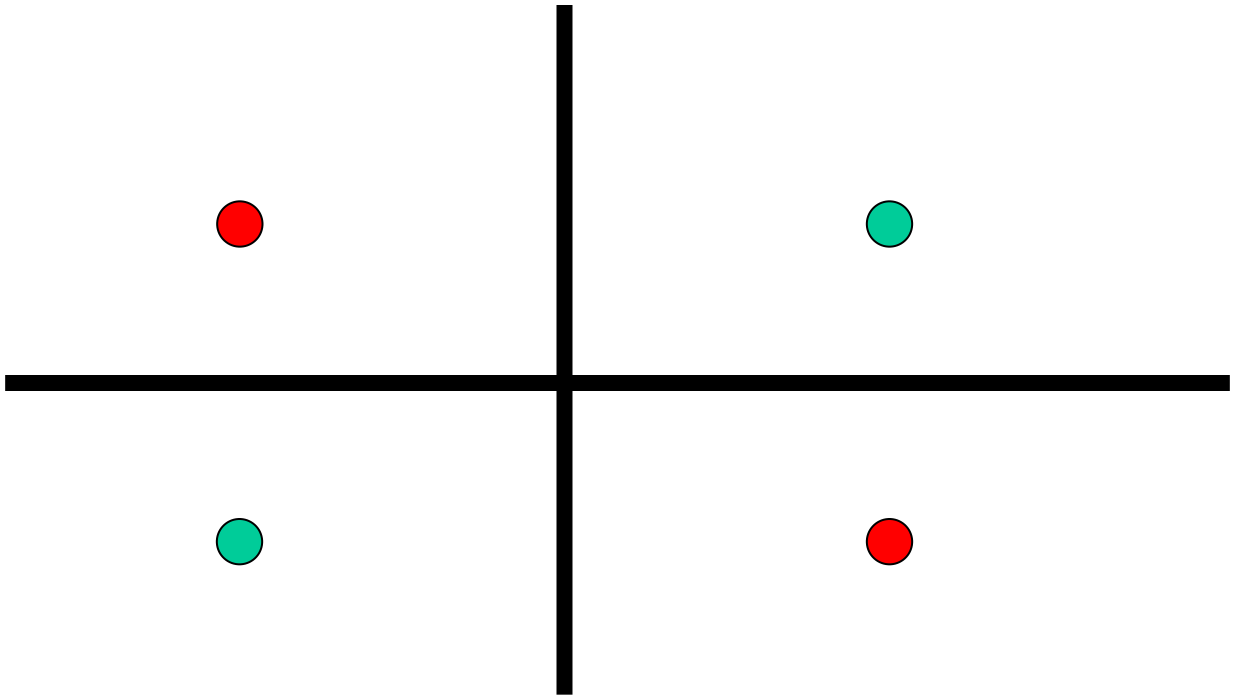


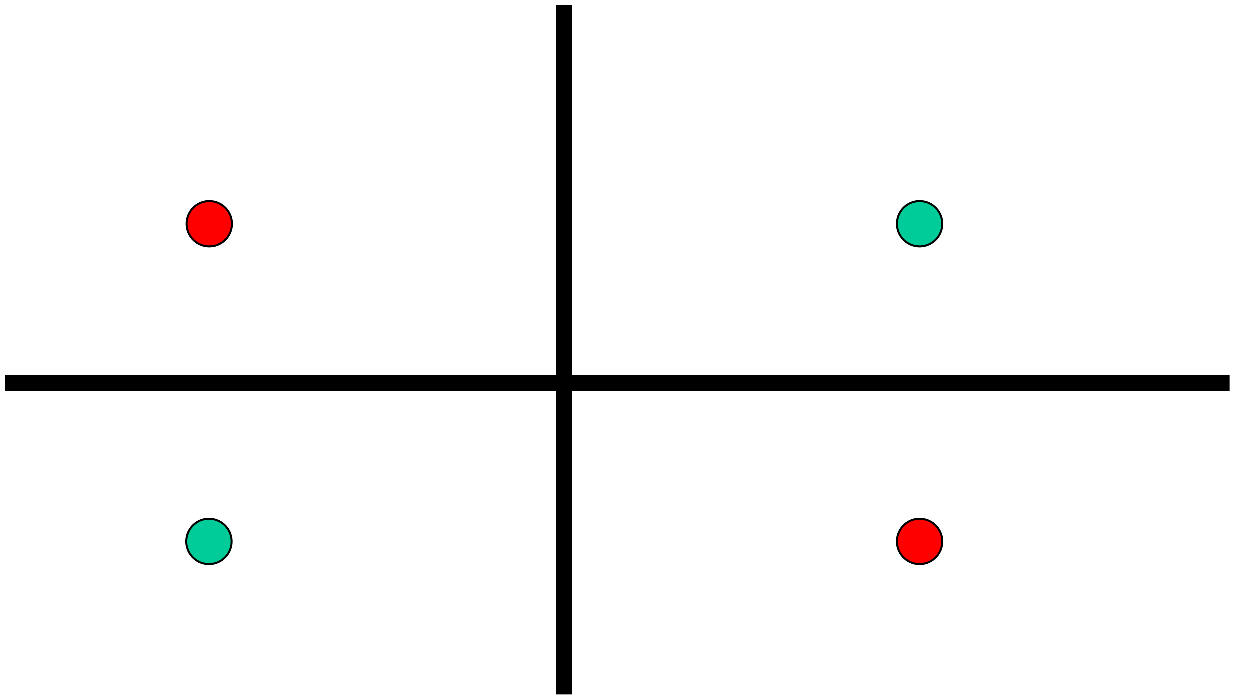


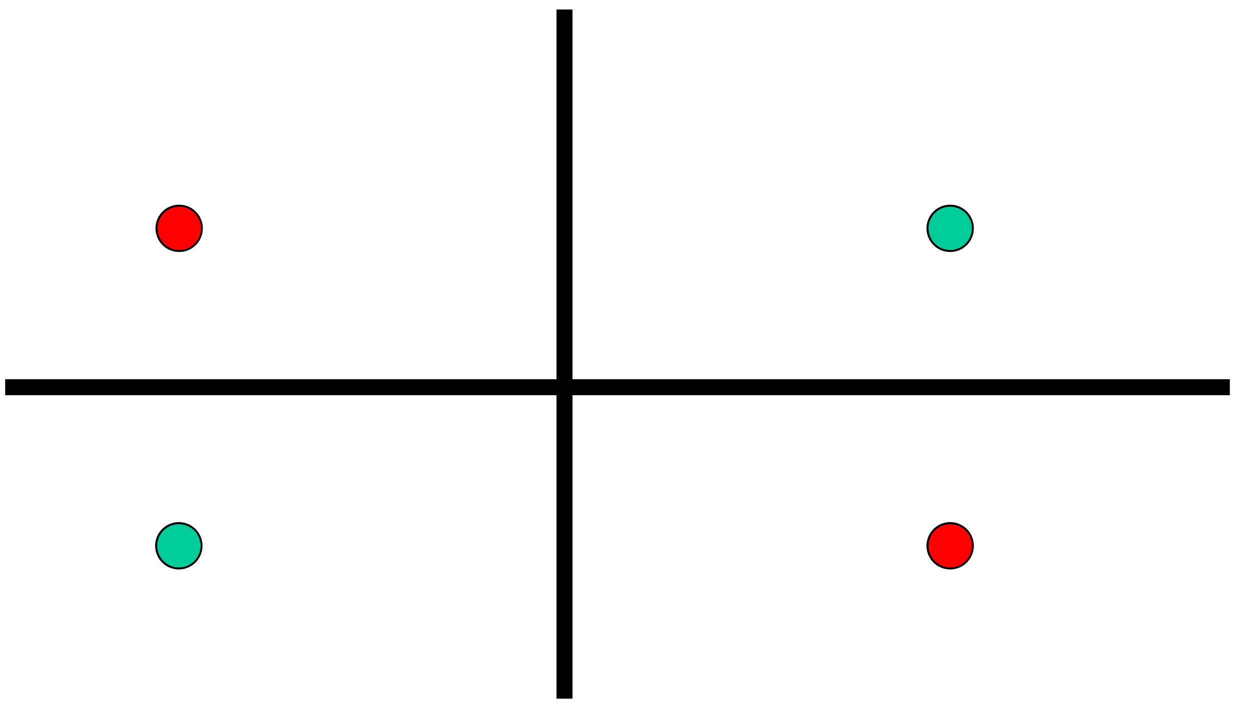












n вихрей

расположенных в точках $z_1, \ldots, z_n$ и имеющих интенсивности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$

Комплексный потенциал

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k)$$

Комплексная скорость

$$u_x - i u_y = \frac{dw}{dz} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_k}$$

Записать скорость вихря в точке z_p **(k=p)**

Уравнение движения вихря в точке z_p **(k=p)**

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая на γ_p и суммируя по переменной ***p*** от 1 до *n*, получаем в правой части

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k \gamma_p}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k} = 0$$

Так как слагаемому с $(z_p - z_k)$ соответствует слагаемое с $(z_k - z_p)$

Получаем

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \frac{dz_p^*}{dt} = 0$$

Следовательно

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p z_p^* = const$$

Отделяем мнимую и действительную части

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p x_p = const; \qquad \sum_{p=1}^{n} \gamma_p y_p = const$$

Если $\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \neq 0$, то получаем интегралы движения центров инерции (**следствие 1)**

$$\frac{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p x_p}{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p} = const; \qquad \frac{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p y_p}{\sum_{p=1}^{n} \gamma_p} = const$$

Следствие 2

Уравнение движения вихря в точке $\boldsymbol{z_p}$ **(k=p)**

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая на $\gamma_p\, z_p$ и суммируя по переменной p от 1 до n, получаем

$$\frac{z_p}{z_p - z_k} + \frac{z_k}{z_k - z_p} = 1$$

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p z_p \frac{dz_p^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq p} \gamma_k \gamma_p$$

Отделить мнимую и действительную части

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \left(x_p \frac{dx_p}{dt} + y_p \frac{dy_p}{dt} \right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \left(x_p \frac{dy_p}{dt} - y_p \frac{dx_p}{dt} \right) = \sum_{k \neq p} \gamma_k \gamma_p \qquad \textbf{(2)}$$

(2) Сумма моментов количеств движения масс γ_p относительно начала координат не меняется со временем

(1)

$$\frac{d}{dt}\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\left(x_p^{\ 2}+y_p^{\ 2}\right)=0$$

$$\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\left(x_p^{\ 2}+y_p^{\ 2}\right)=\text{const}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_p \left(r_p{}^2 \right) = \mathrm{const}$$

Сумма моментов инерции масс γ_p относительно начала координат не меняется со временем

Следствие 3

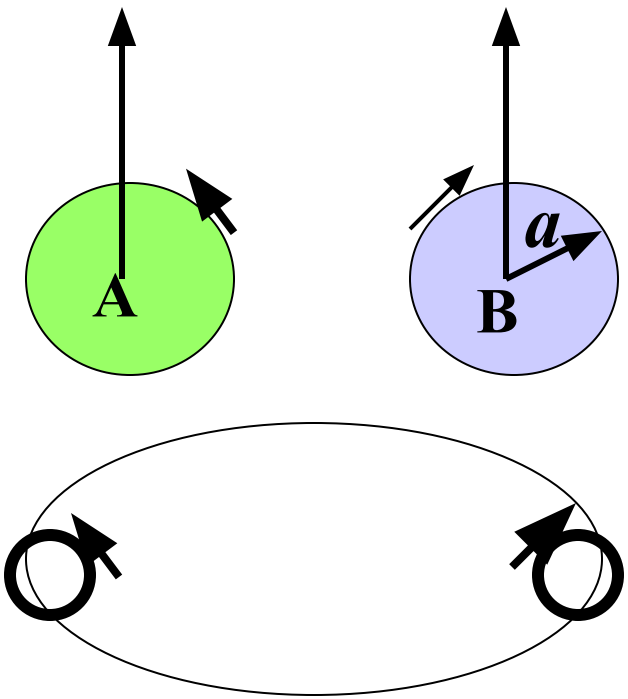
$$\frac{dz_p^*}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_p - z_k}$$

Умножая выражения скорости на $\gamma_p \dfrac{dz_p}{dt}$

и суммируя по переменной ***p*** от 1 до *n*, получаем еще один интеграл

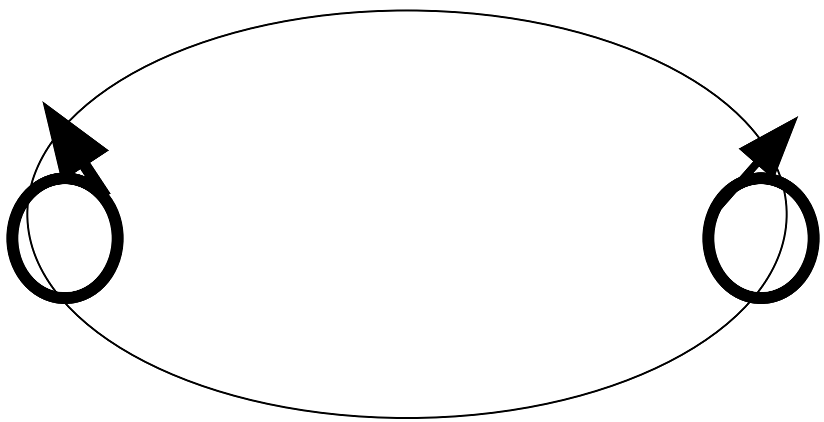
$$\sum_{k \neq p}^{n} \gamma_k \gamma_p \ln(r_{kp}) = \mathrm{const}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2$$



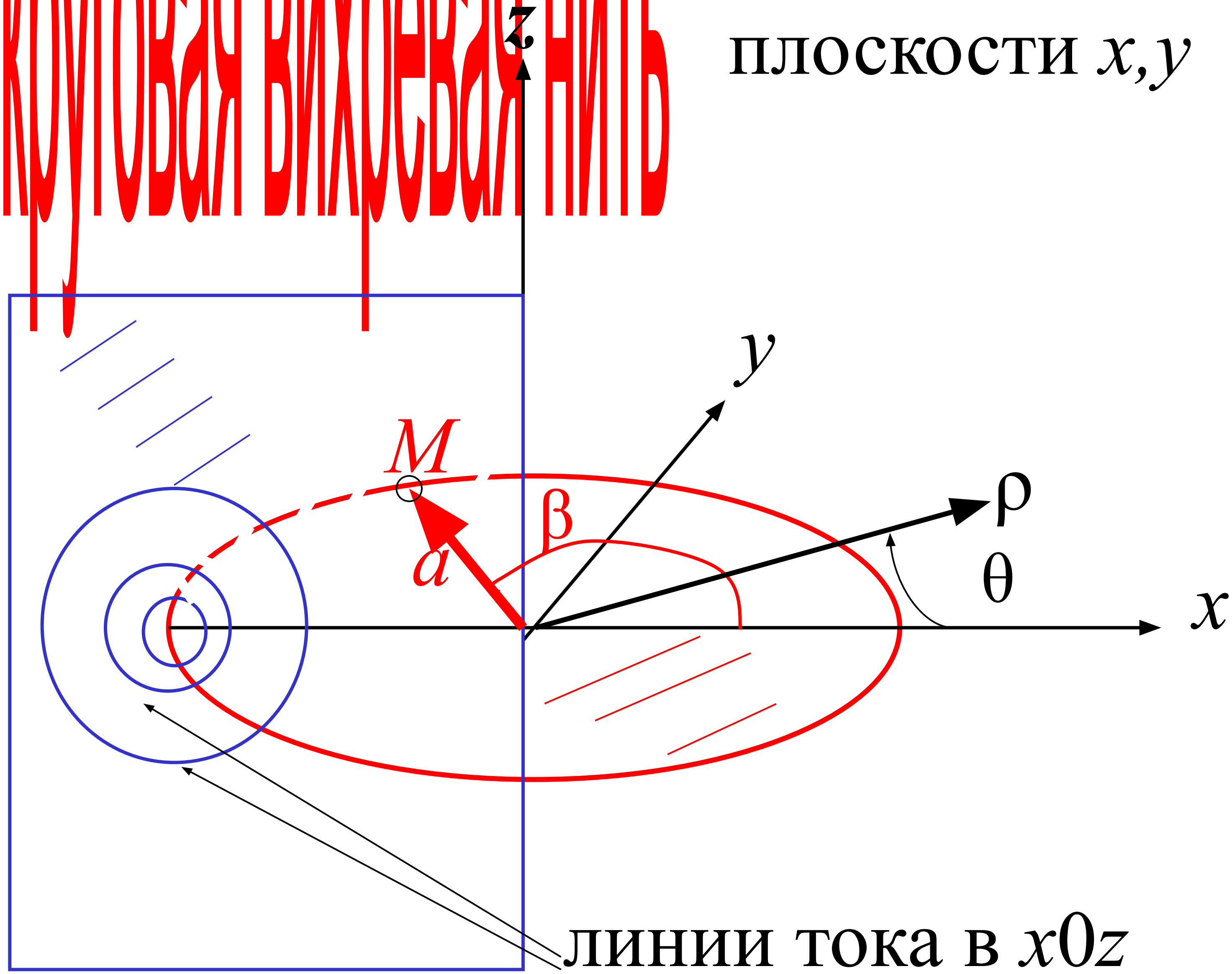
Такие вихри называются «парой вихрей». Они являются плоской аналогией вихревому кольцу и обладает многими свойствами последнего.

Куда двигается кольцевой вихрь?



круговая вихревая нить

радиуса *a* лежит в плоскости *x,y*



линии тока в *x*0*z*

Координаты точки M на вихревой нити

$$\xi = a\cos\beta; \quad \eta = a\sin\beta; \quad \zeta = 0$$

Расстояние от точки M на вихревой нити до точки $N(x,y,z)$

$$r = \sqrt{(\rho\cos\theta - a\cos\beta)^2 + (\rho\sin\theta - a\sin\beta)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos(\theta-\beta) + a^2 + z^2}$$

Запишем компоненты скорости через векторный потенциал

$$\left(rotA\right)_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}$$

$$\left(rotA\right)_\theta = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \qquad (1)$$

$$\left(rotA\right)_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\theta\right)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}$$

$$\vec{u} = rot\vec{A} \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_L \frac{\vec{\Omega}}{r}d\tau$$

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\xi}{r}; A_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\eta}{r}; A_z = \frac{\gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\zeta}{r}$$

$$\gamma = const$$

Для векторного потенциала в точке x,y,z

$$A_x = \frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\beta d\beta}{r}$$

$$A_y = \frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\beta d\beta}{r}$$

$$A_z = 0$$

Для плоскости *x,y при θ=0* $A_x = A_\rho ; A_y = A_\theta$
Вследствие симметрии задачи это справедливо для всех углов θ

$$A_\rho = -\frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\beta d\beta}{r} = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d(\cos\beta)}{\sqrt{\rho^2+z^2+a^2-2a\rho\cos\beta}} = 0$$

$$\int\frac{d(x)}{\sqrt{b+cx}} = \frac{2\sqrt{b+cx}}{b}$$

$$A_\rho = -\frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\beta d\beta}{r} = 0$$

$$A_\theta = \frac{\gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\beta d\beta}{r} = \mathrm{A}$$

$$A_z = 0$$

Подставляем выражения векторного потенциала в (1) и находим компоненты скорости $u = rotA$

$$u_{\rho} = -\frac{\partial A}{\partial z}; \qquad u_{\theta} = 0; \quad u_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho}$$

ОПРЕДЕЛИТЬ

объем жидкости, протекающей через круг радиусом ρ, лежащим в плоскости перпендикулярной оси z с центром на оси z, *через переменную A*

Объем жидкости, протекающей через круг радиусом ρ, лежащим в плоскости перпендикулярной оси *z* с центром на оси *z*

$$\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} u_z \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\rho} u_z \rho d\rho = 2\pi\rho A$$

ОПРЕДЕЛИТЬ

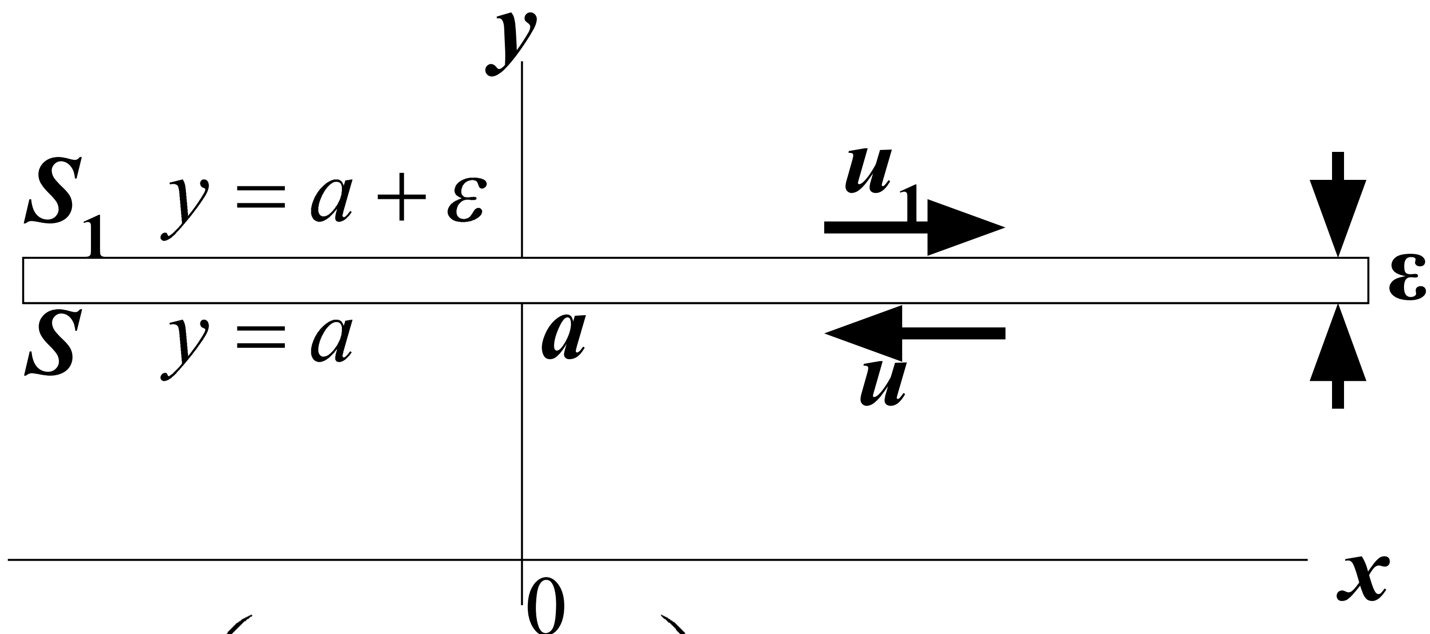
скорость перемещения круговой вихревой нити

$$\rho = a; \quad z = 0; \quad r = 0$$

$$u_\rho = -\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$u_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\gamma a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\beta d\beta}{r}\right) = \infty$$

Вихревой слой



$$u_x = (u - u_1)\left(1 - \frac{y-a}{\varepsilon}\right)$$

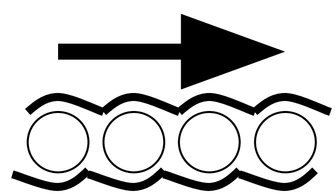
Найти ротор скорости

$$u_y = 0$$

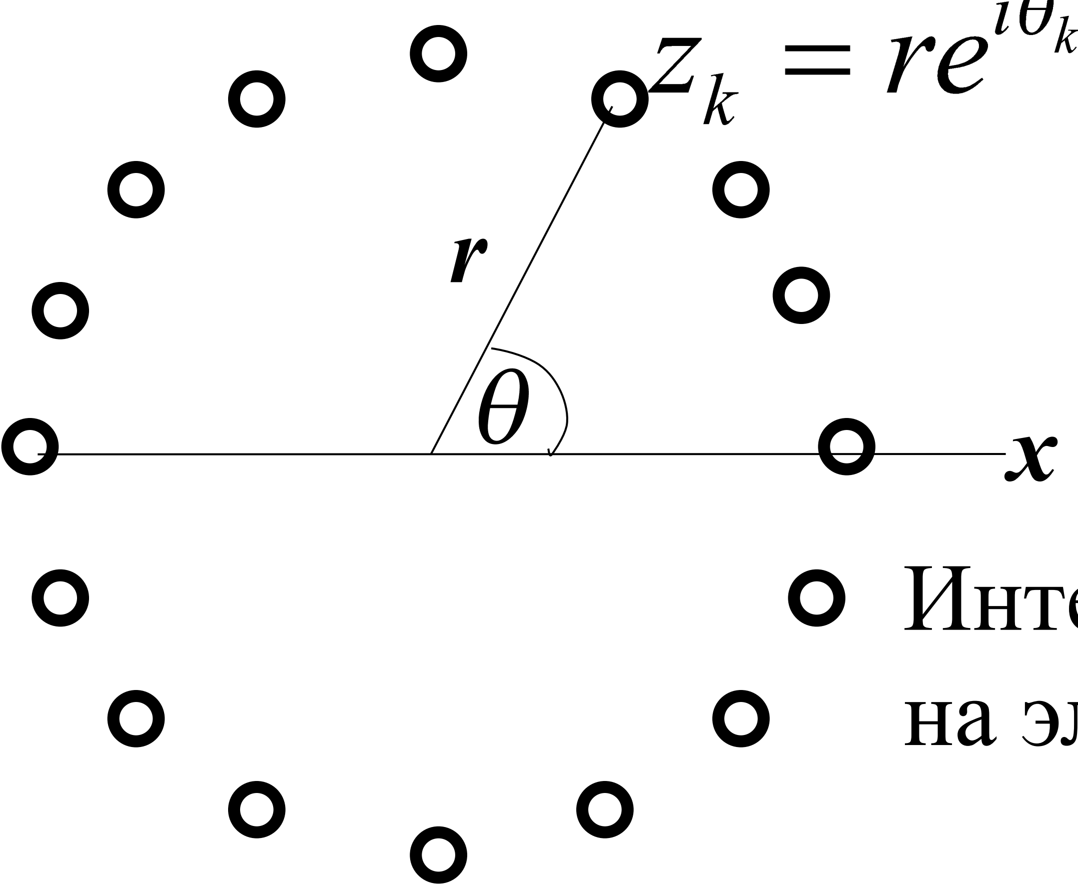
$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{u - u_1}{\varepsilon}$$

Внутри слоя $\Omega = \text{const}$

Разрыв скорости может быть смоделирован цепочкой вихревых нитей



Вихревой цилиндрический слой



Интенсивность вихрей на элементе дуги $r\mathrm{d}\theta$

$$\gamma r \mathrm{d}\theta$$

Записать комплексный потенциал и комплексную скорость для точки z

Комплексный потенциал цилиндрического слоя в точке z

$$w = \frac{\gamma r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \ln\left(z - re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

Комплексная скорость

$$u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{z - re^{i\theta}}$$

Делим подинтегральное выражение на z, умножаем на $z - re^{i\theta} + re^{i\theta}$

z рассматривается как постоянная при интегрировании

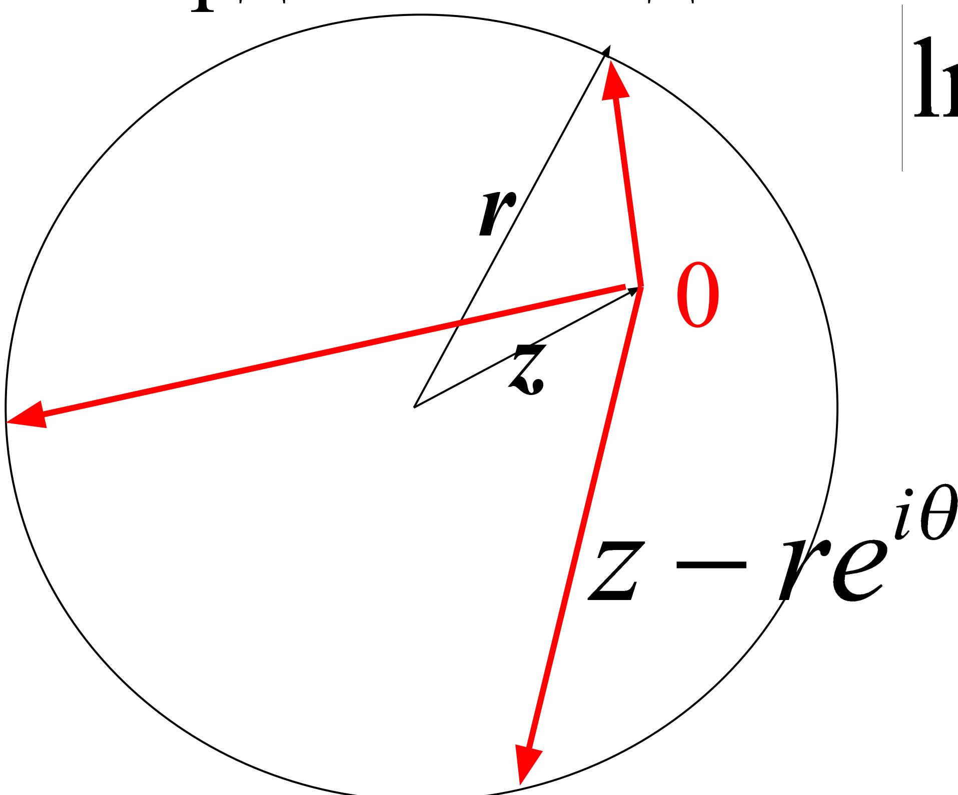
$$u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi z i}\int_0^{2\pi}\frac{z - re^{i\theta} + re^{i\theta}}{z\text{-}re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{\gamma r}{2\pi z i}\left\{2\pi - \frac{1}{i}\left|\ln\left(z - re^{i\theta}\right)\right|_0^{2\pi}\right\}$$

Если z внутри окружности, т.е. $|z| < r$

При изменении θ от 0 до 2π аргумент разности $z - re^{i\theta}$ меняется на 2π, так как вектор $z - re^{i\theta}$ обходит начало координат. Тогда

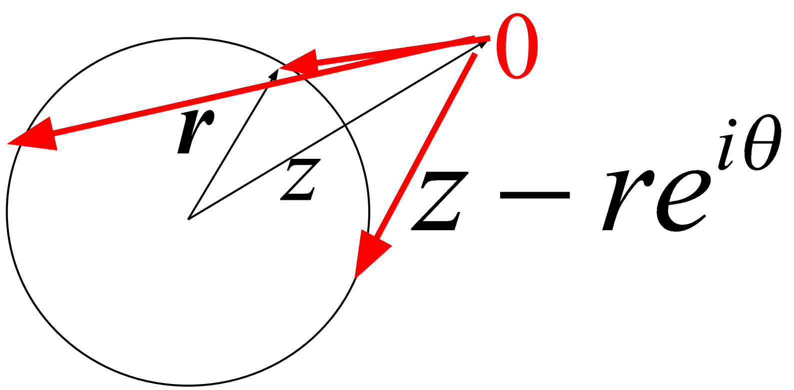
$$\ln\left(z - re^{i\theta}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$



Если z вне окружности, т.е. $|z| > r$

При изменении θ от 0 до 2π конец вектора $z - re^{i\theta}$ обходит замкнутый путь не содержащий начала координат. Тогда

$$\left. \ln\left(z - re^{i\theta}\right) \right|_0^{2\pi} = 0$$



Записать комплексную скорость внутри и вне цилиндра

Комплексная скорость

$$|z| < r \qquad u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{2\pi z i}\left\{2\pi - \frac{1}{i}2\pi i\right\} = 0$$

движения нет внутри цилиндра

$$|z| > r \quad u_x - iu_y = \frac{\gamma r}{zi}$$

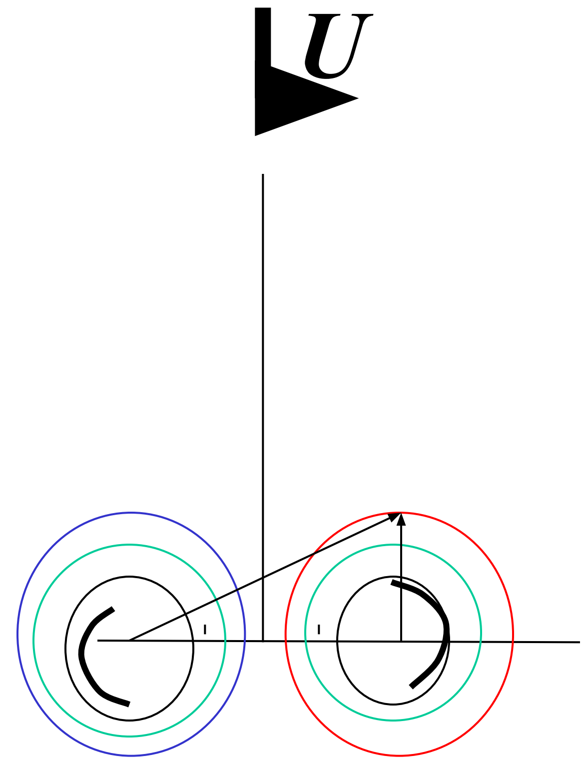
вне цилиндра движение описывается воздействием вихревой нити интенсивности $2\pi r\gamma$, расположенной в начале координат

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

№1

Записать функцию тока для вихревой пары в потоке жидкости, имеющего постоянную скоростью ***U*.**

Скорость потока равна по модулю скорости пары, но противоположна по направлению.



№2

Найти в ортогональной системе координат уравнения линий тока для

1) случая двух вихрей одинаковой интенсивности

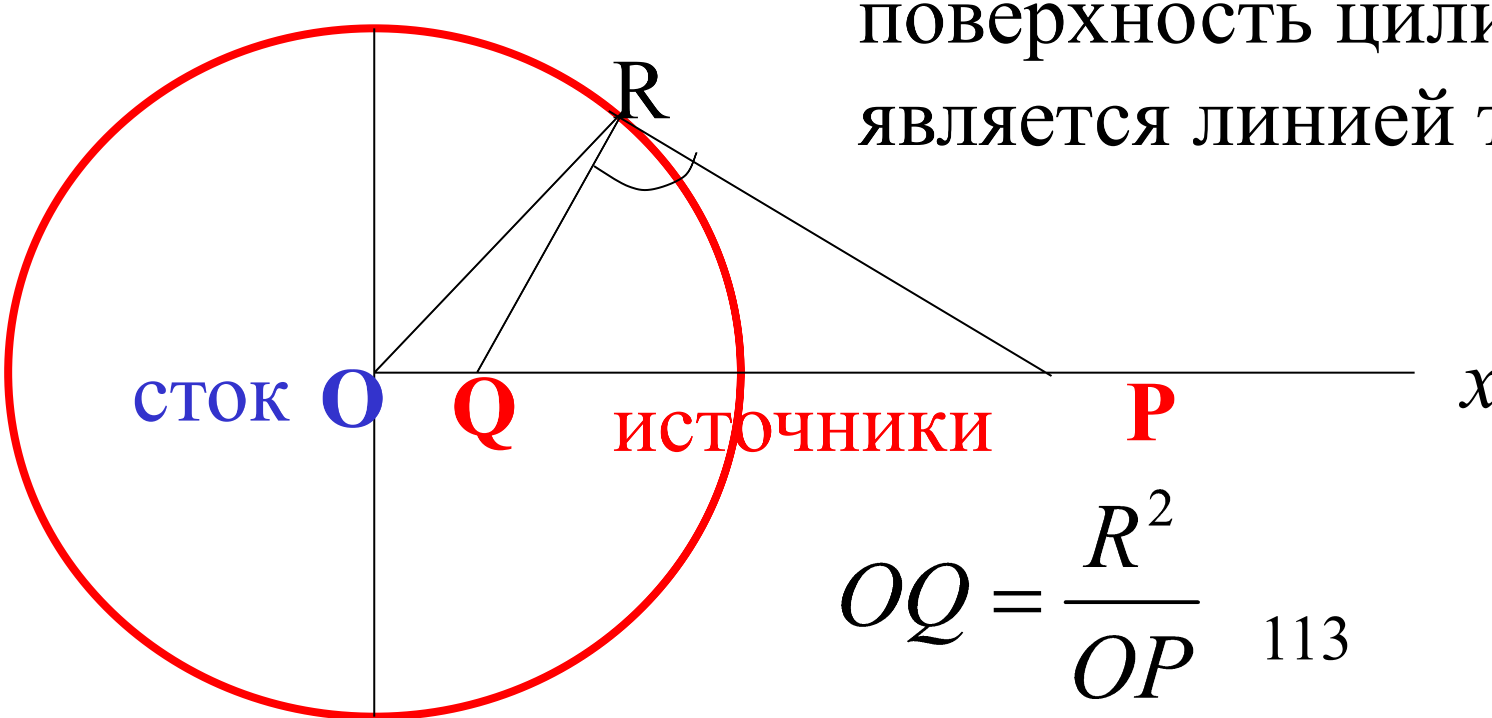
2) пары вихрей

№3

При обтекании цилиндра жидкостью, его поверхность должна быть линией тока, а ψ=const.

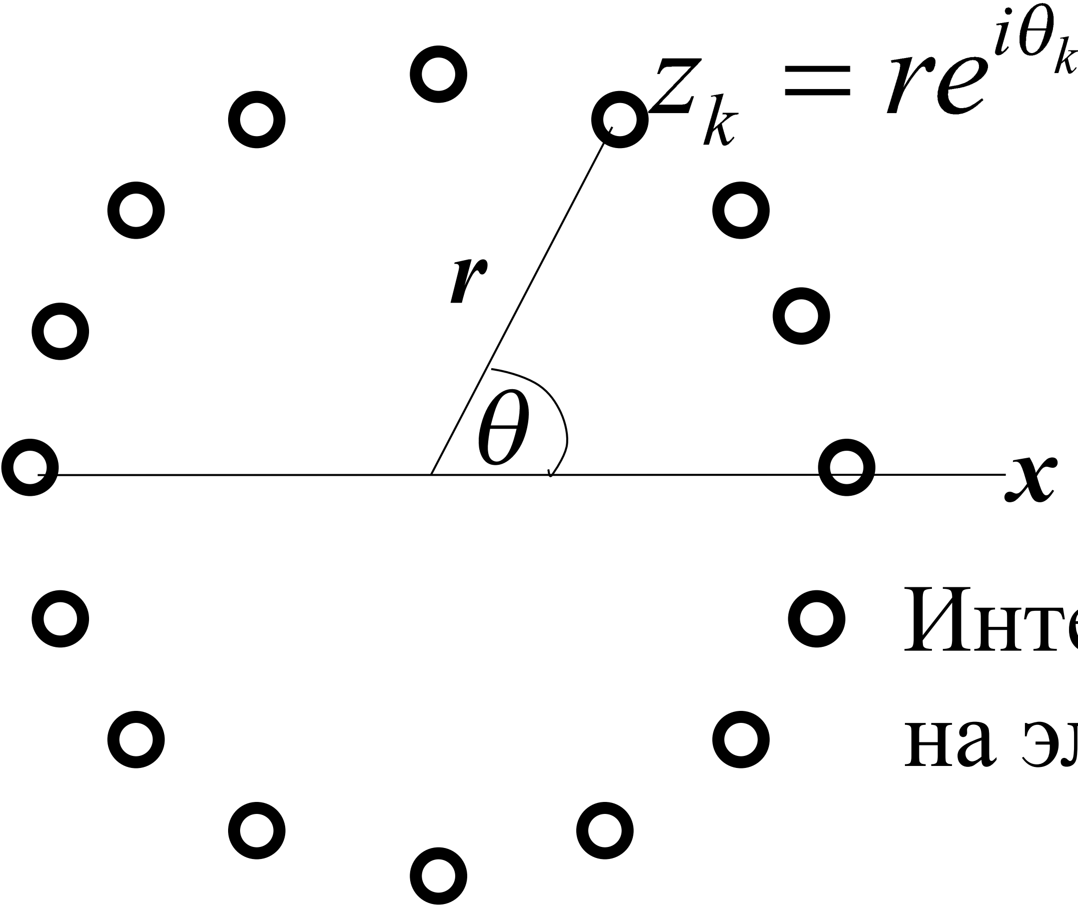
Пусть в центре цилиндра имеется сток, а на оси $0x$ лежат два источника: один внутри цилиндра, другой вне цилиндра, Q – инверсия точки P, *мощность* одинакова. Показать, что

поверхность цилиндра является линией тока



$$OQ = \frac{R^2}{OP}$$

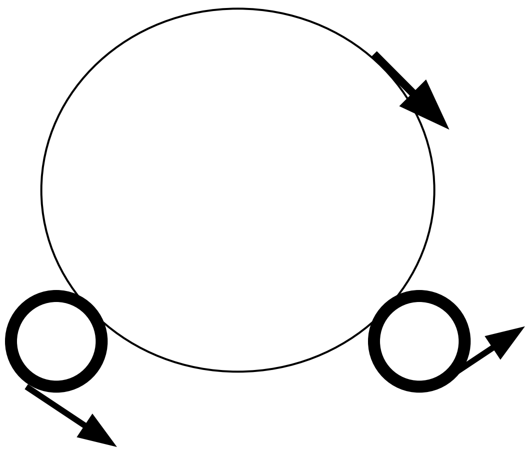
Вихревой цилиндрический слой



Интенсивность вихрей на элементе дуги rdθ

$$\gamma r \mathrm{d}\theta$$

Найти координаты центра системы



№5

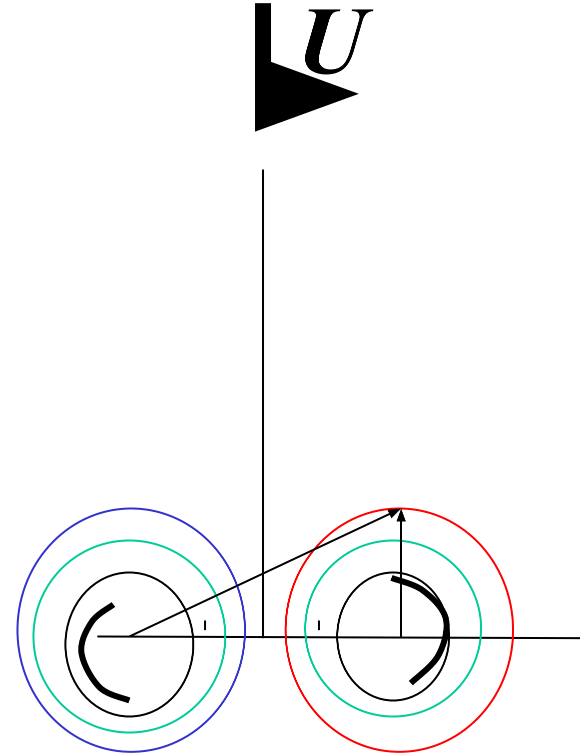
Интенсивность твердотельно вращающихся вихрей такова, что тангенциальные составляющие скорости в точках соприкосновения равны

Найти координаты центра системы

РЕШЕНИЯ

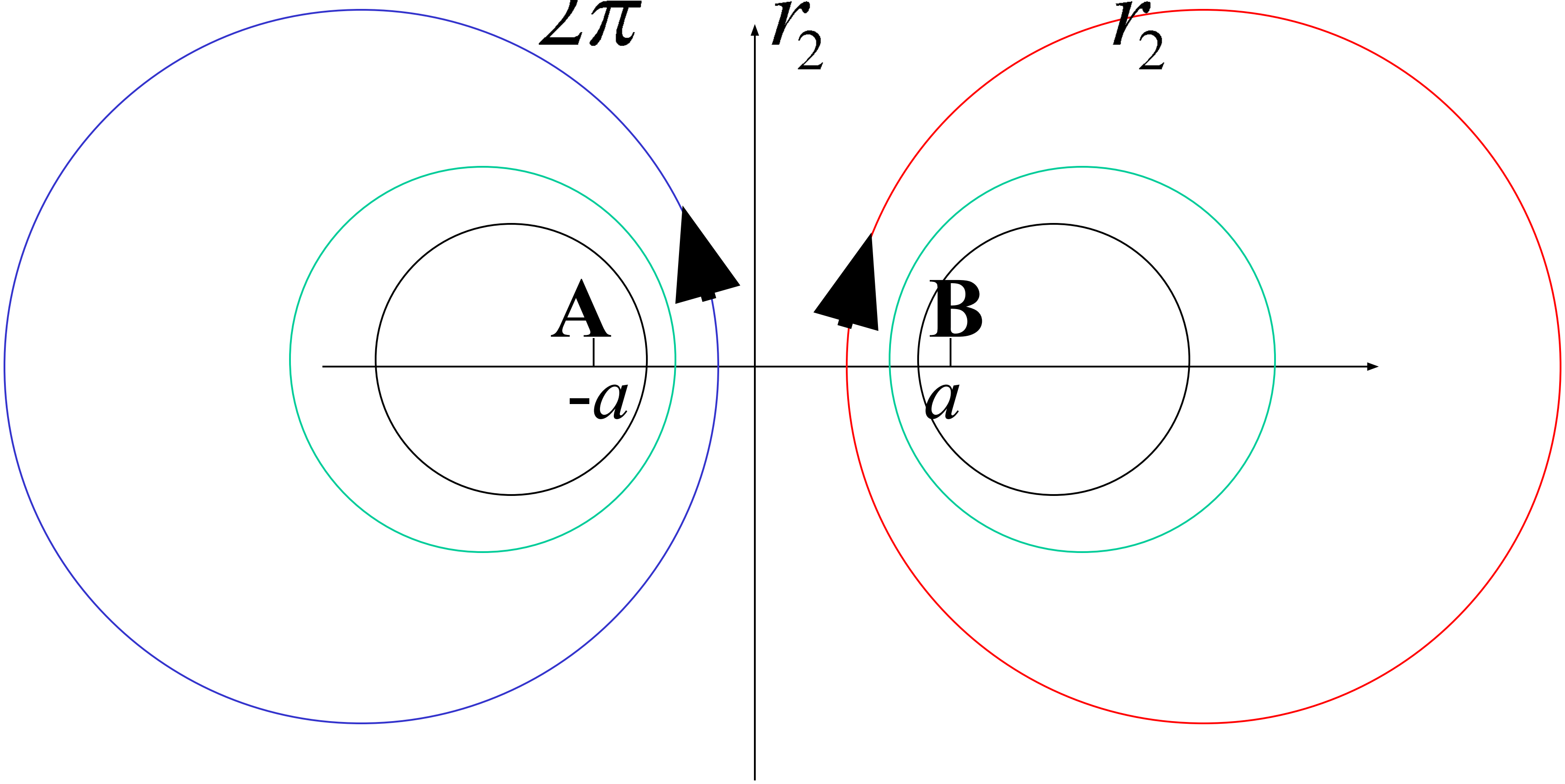
№1

Записать функцию тока для вихревой пары в потоке жидкости, имеющего постоянную скоростью ***U*.**
Скорость потока равна по модулю скорости пары, но противоположна по направлению.



Линии тока вихревой пары

ψ=const $\quad \psi = \dfrac{\gamma}{2\pi} \ln \dfrac{r_1}{r_2}, \Rightarrow \quad \dfrac{r_1}{r_2} = const$



$$\gamma_1\big|_{[-a]} = 2\pi\mu, \qquad \gamma_2\big|_{[+a]} = -2\pi\mu,$$

Функция тока для течения, имеющего постоянную скорость вдоль оси ординат

$$U = -\frac{\partial \psi_{потока}}{\partial x}$$

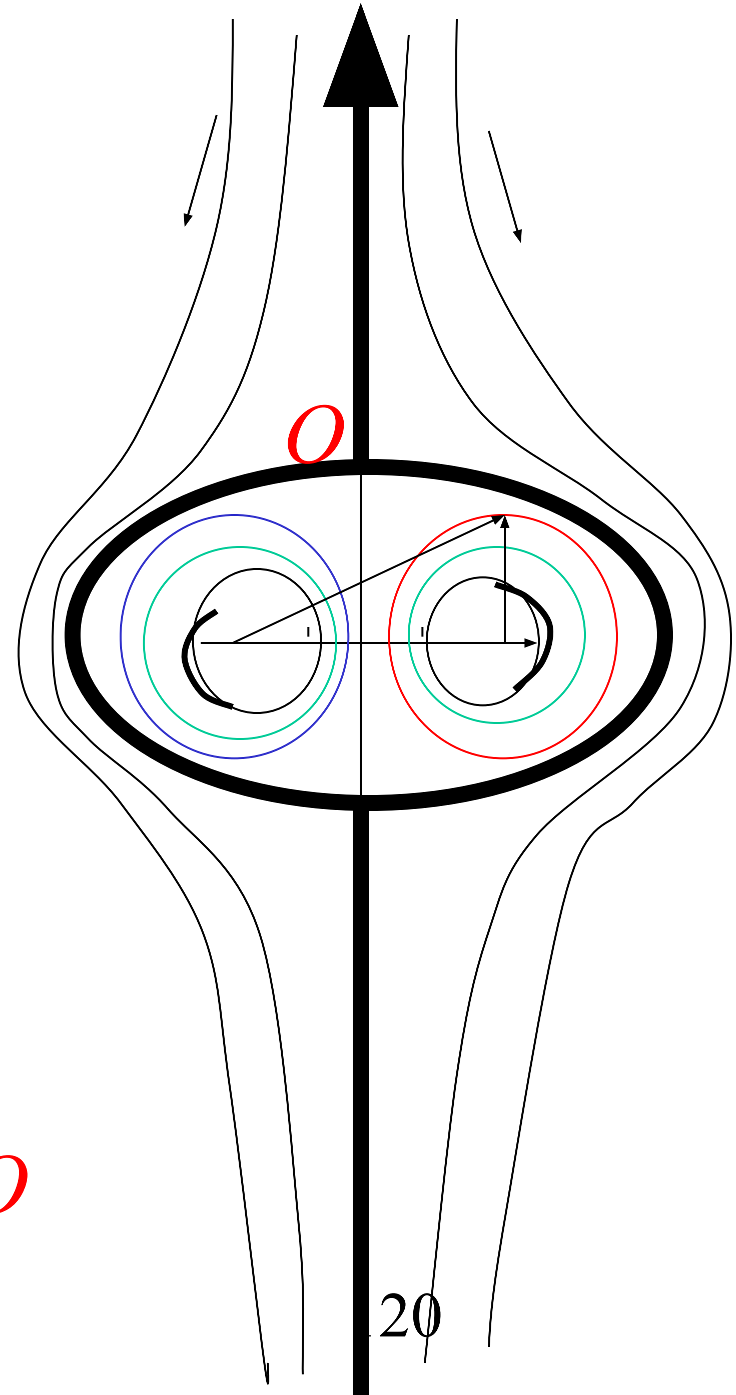
$$\psi_{потока} = -\int U dx = -Ux$$

$$U = -V_{пары}$$

$$V_{пары} = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB} = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA} = \frac{|\gamma|}{4\pi a}$$

$$\psi_{потока} = \frac{|\gamma| x}{4\pi a}$$

Относительные линии тока вихревой пары



$$\psi = \frac{\gamma}{2\pi}\left(\frac{x}{2a} + \ln\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$\psi = 0$ на оси y и на овале O (***жирная линия***).

Жидкость внутри овала *O* движется вместе с вихрями.

Жидкость вне овала *O* обтекает этот овал как твердый цилиндр.

Полуоси овала *O* приблизительно имеют длину 2.09a и 1.73a.

№2

Найти в ортогональной системе координат уравнения линий тока для

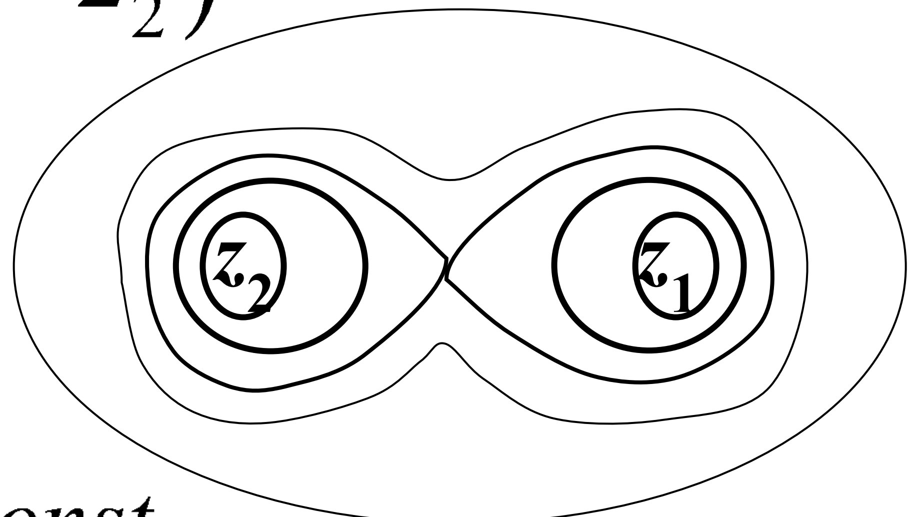
1) случая двух вихрей одинаковой интенсивности

2) пары вихрей

$$w=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_1)+\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_2)$$

$$w=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln(z-z_1)(z-z_2)$$

$$\psi=-\frac{\gamma}{2\pi}\ln(r_1 r_2)$$



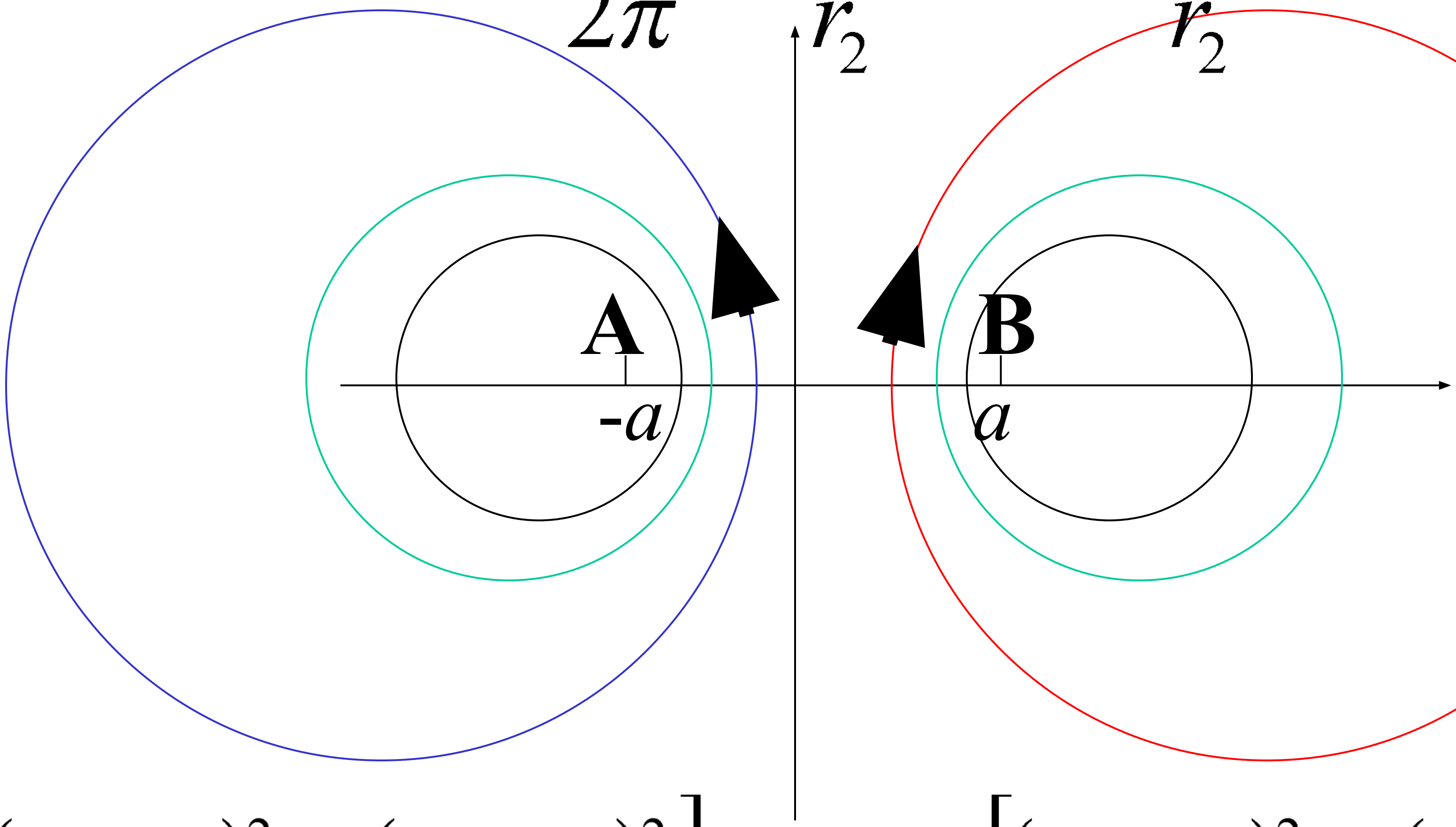
На линии тока $\quad \psi=const$

$$r_1 r_2=const$$

$$\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\right]=const$$

Линии тока вихревой пары

ψ=const $\quad \psi = \dfrac{\gamma}{2\pi} \ln \dfrac{r_1}{r_2}, \Rightarrow \quad \dfrac{r_1}{r_2} = const$



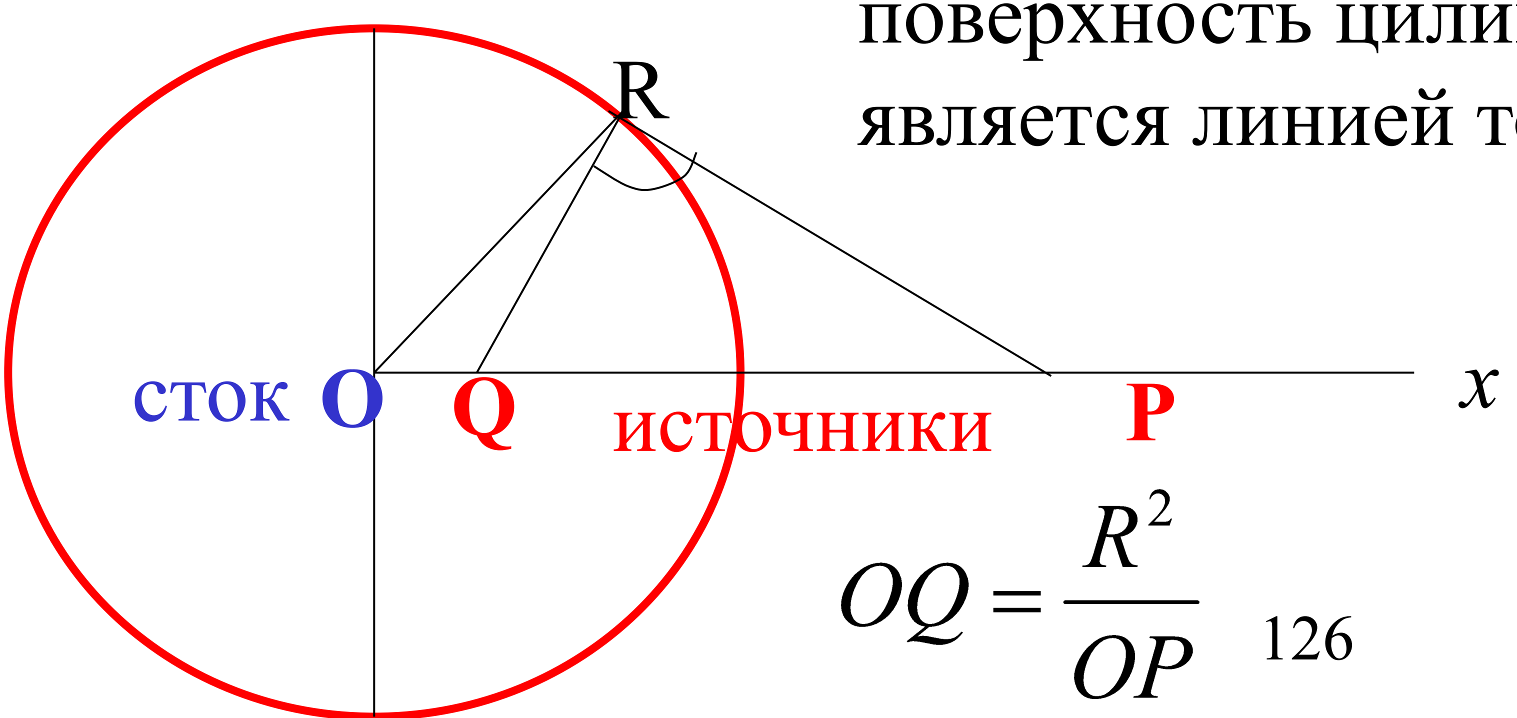
$$\left[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right] = const\left[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2\right]$$

№3

При обтекании цилиндра жидкостью, его поверхность должна быть линией тока, а ψ=const.

Пусть в центре цилиндра имеется сток, а на оси $0x$ лежат два источника: один внутри цилиндра, другой вне цилиндра, Q – инверсия точки P, *мощность* одинакова. Показать, что

поверхность цилиндра является линией тока



$$OQ = \frac{R^2}{OP}$$

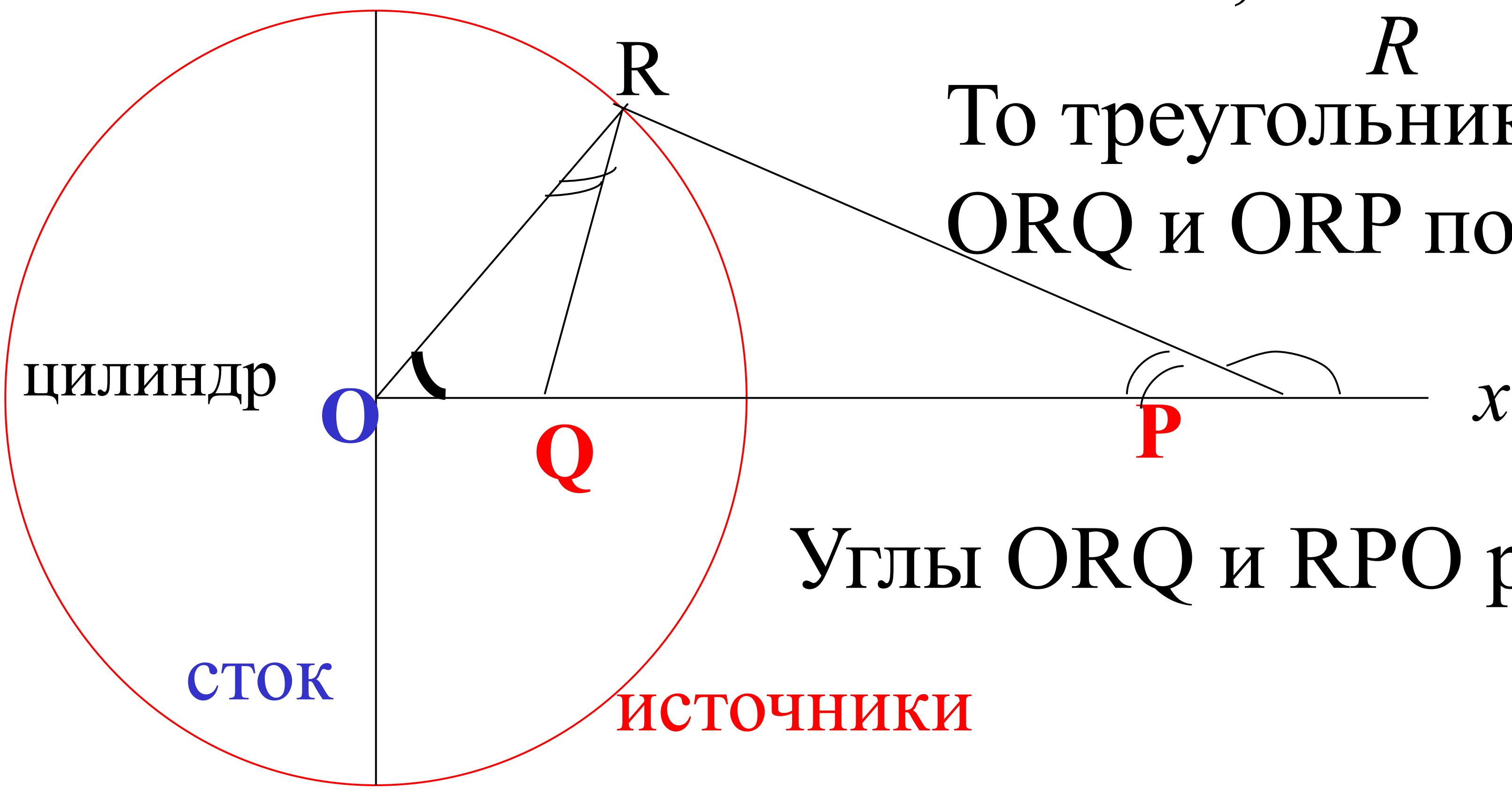
$$w = \varphi + i\psi \qquad z = re^{i\theta}$$

$$\varphi + i\psi = \mu \ln(re^{i\theta}) = \mu \ln r + i\mu\theta,$$

$$\varphi = \mu \ln r, \qquad \psi = \mu\theta$$

Так как, $\dfrac{OQ}{R} = \dfrac{R}{OP}$

То треугольники ORQ и ORP подобны



Углы ORQ и RPO равны

$$\psi = -\mu\left(\angle RPx + \angle RQx - \angle ROx\right) =$$

$$= -\mu\left(\angle RPx + \angle ORQ\right) =$$

$$= -\mu\left(\angle RPx + \angle RPQ\right) = -\pi\mu = \text{const}$$