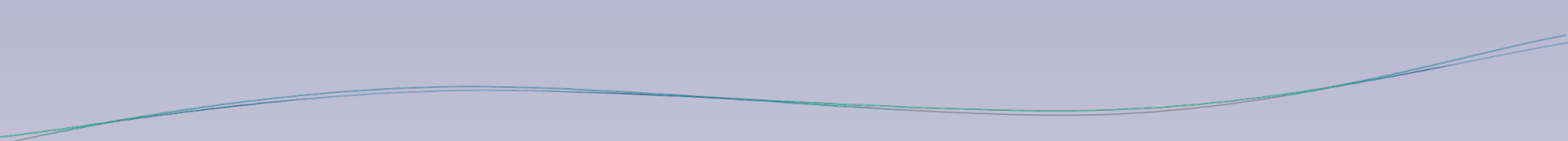


Умножение векторов

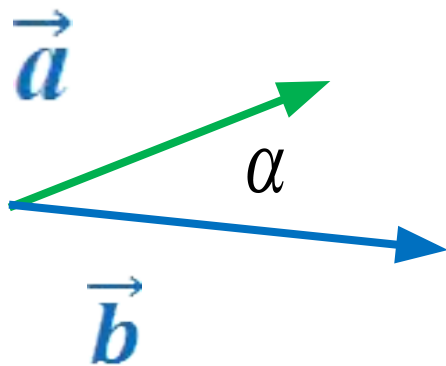


СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется

число $\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$, если векторы ненулевые

число 0, если хотя бы один из векторов нулевой

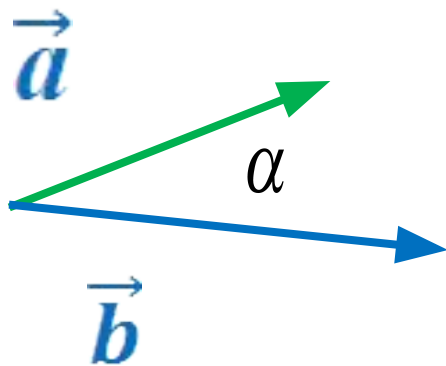


$$\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$$

Скалярным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется

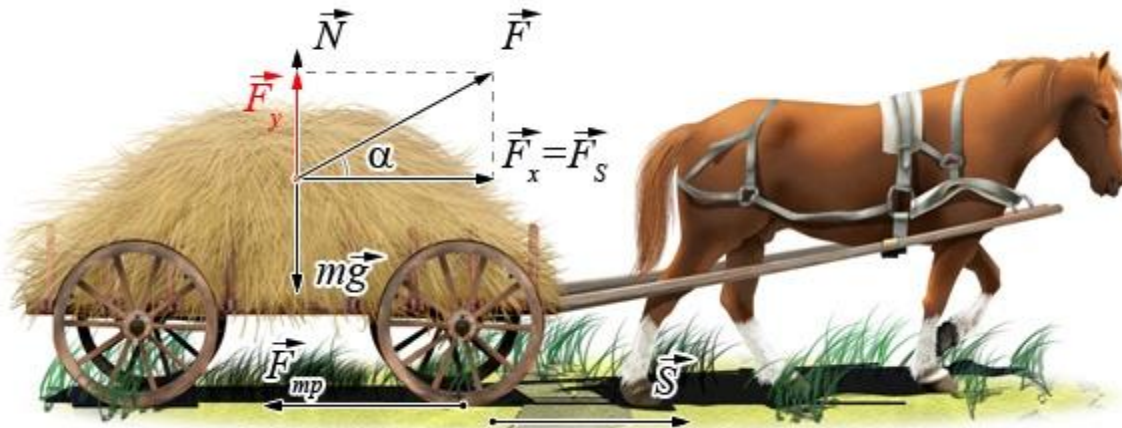
число $\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$, если векторы ненулевые

число 0, если хотя бы один из векторов нулевой

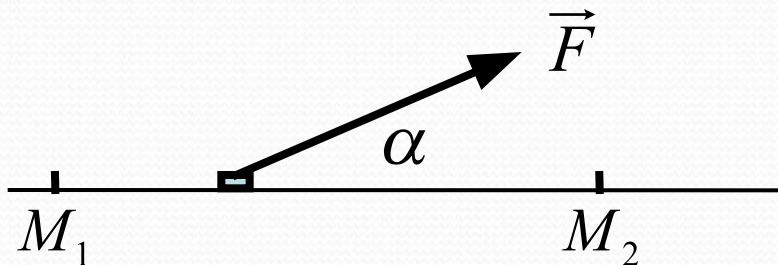


$$\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$$

Физический смысл скалярного произведения



Пусть материальная точка под действием силы \vec{F} перемещается из положения M_1 в положение M_2

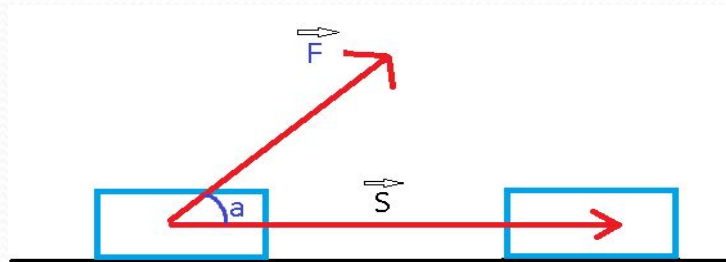


$$A = \vec{F} \cdot \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| \cdot \cos \alpha$$

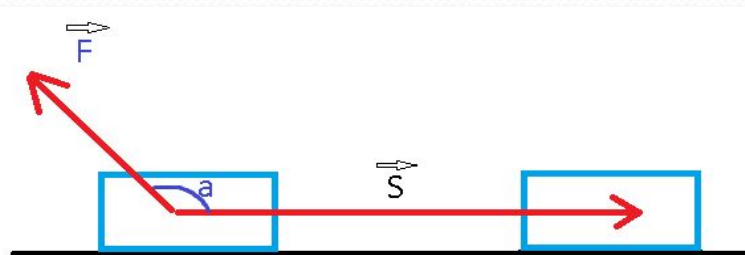
Работа силы по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

работа - скалярная величина

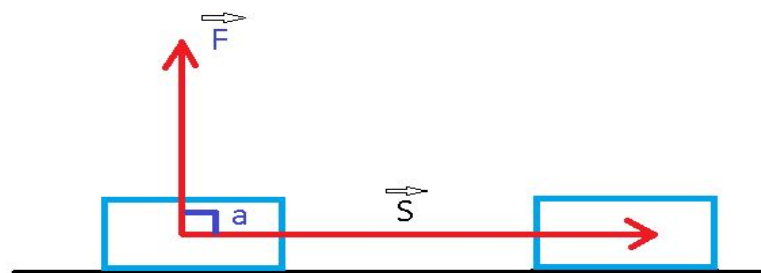
положительная



отрицательная



равна нулю



Свойства скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0, \text{ если } \vec{a} \neq \mathbf{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0, \text{ если } \vec{a} = \mathbf{0}$$

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются ортогональными (друг к другу), если их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Теорема

Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе \vec{i}, \vec{j} своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2)$, то их скалярное произведение равно сумме парных произведений одноименных координат, т.е

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \longrightarrow \vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2) \longrightarrow \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i}^2 + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{j}^2 =$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

Согласно определению скалярного произведения

Теорема

Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе \vec{i} \vec{j} своими координатами $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ то их скалярное произведение равно сумме парных произведений одноименных координат, т.е

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Покупатель купил три вида товаров:

3 кг первого вида – по 20 ден.ед. за килограмм,

2 пачки второго вида – по 25 ден.ед. за пачку,

5 коробок третьего вида – по 10 ден.ед. за коробку

$$\vec{a} = (3, 2, 5)$$

$$\vec{b} = (20, 25, 10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 10 = 160$$

Одним из способов определения индекса цен и уровня инфляции является расчет стоимости «потребительской корзины», состоящей из некоторого вида товаров и услуг, получаемых потребителями. В таблице приведен условный пример того, как можно вычислять индекс цен для определенного месяца по отношению к предыдущему месяцу

вид товара	количество	цена единицы товара в текущем месяце	расходы в текущем месяце	цена единицы товара в предыдущем месяце	расходы в предыдущем месяце
1	3	40	120	35	105
2	10	20	200	18	180
3	2	40	80	45	90
общие расходы	-	-	400	-	375

Обозначим

через

- $\vec{q} = (3, 10, 2)$ - вектор количества потребляемых товаров
- $\vec{c} = (40, 20, 40)$ - вектор цен в текущем месяце
- $\vec{c}_{np} = (35, 18, 45)$ - вектор цен в предыдущем месяце

индекс цен

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100 \%$$

$$p(\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}) = (\vec{c} \cdot \vec{q}) \cdot 100$$

$$(p(\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}) - (\vec{c} \cdot \vec{q}) \cdot 100) = 0$$

индекс цен - численный коэффициент p , который делает вектор \vec{q} ортогональным вектору $(p\vec{c}_{np} - \vec{c} \cdot 100)$

$$(p\vec{c}_{np} - 100\vec{c})\vec{q} = 0$$

индекс

инфляции

$$i = p - 100 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100 - 100 = \frac{(\vec{c}_{np} - \vec{c}) \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100$$

вид товара	количество	цена единицы товара в текущем месяце	расходы в текущем месяце	цена единицы товара в предыдущем месяце	расходы в предыдущем месяце
1	3	40	120	35	105
2	10	20	200	18	180
3	2	40	80	45	90
общие расходы	-	-	400	-	375

индекс цен

$$p = \frac{\sum \vec{c} \cdot \vec{q}}{\sum \vec{c}_{пр} \cdot \vec{q}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{3 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 2 \cdot 40}{3 \cdot 35 + 10 \cdot 18 + 2 \cdot 45} \cdot 100\% = \frac{400}{375} \cdot 100\% = 106,7\%$$

индекс

инфляции

$$i = p - 100 = 106,7 - 100 = 6,7\%$$

Задача №1

Дан вектор $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ своими координатами. Вычислить длину данного вектора.

СВОИМИ

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \dots + x_n \cdot x_n$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Задача №2

Даны два ненулевых вектора своими координатами $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Найти косинус угла, образованного данными векторами.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

$$\cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}$$

Лемма

Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе \vec{i}, \vec{j} своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2)$ то справедлива формула

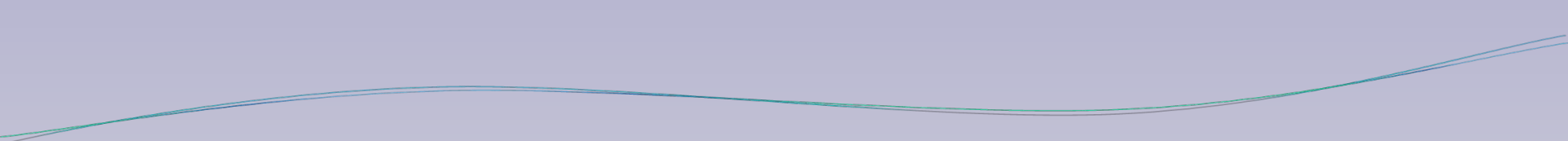
$$\sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее заданным свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется евклидовым пространством E^n .

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ пространства E^n образует ортонормированный базис, если эти векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и норма (длина) каждого из них равна единице.

Теорема

Во всяком n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис



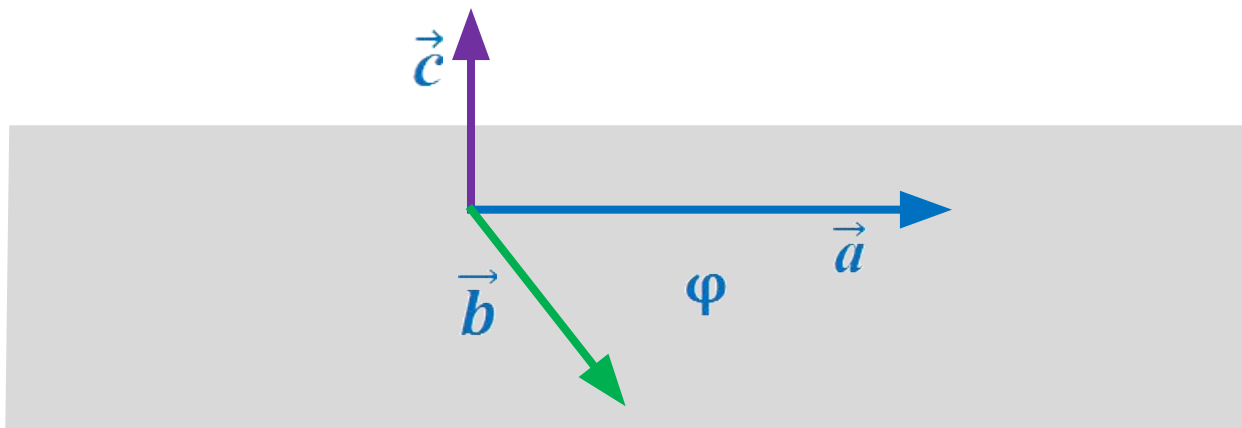
ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторным произведением вектора \vec{b} на вектор \vec{a} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий следующим условиям

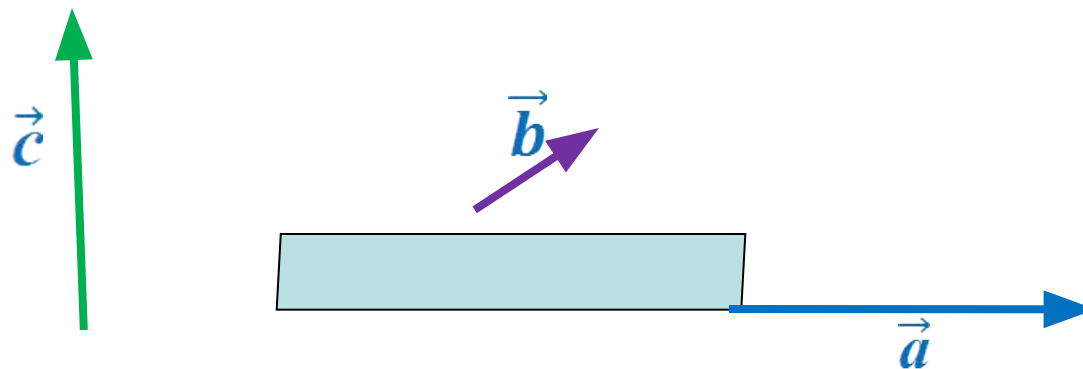
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi \quad \sin \varphi \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

вектор \vec{c} ортогонален каждому из векторов \vec{a} и \vec{b}

вектор \vec{c} направлен так, что тройка векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} является правой



Ориентированные тройки векторов



Упорядоченная тройка некопланарных векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} (виден из конца вектора \vec{c}) совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ некопланарных векторов называется *левой*.

Векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается:
$$\vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad [\vec{a}, \vec{b}]$$

свойства векторного произведения векторов

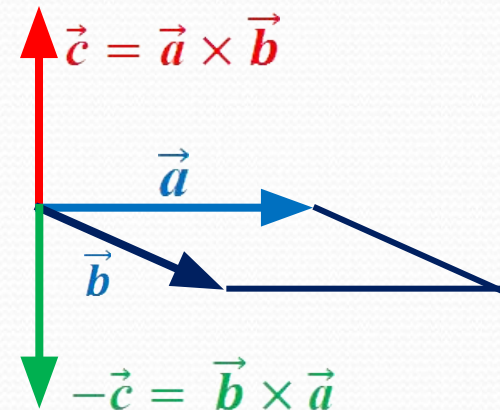
модуль векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равен площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах \vec{a} и \vec{b} $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны или хотя бы один из них равен нулю вектору

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$$



Пример. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ и угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° .

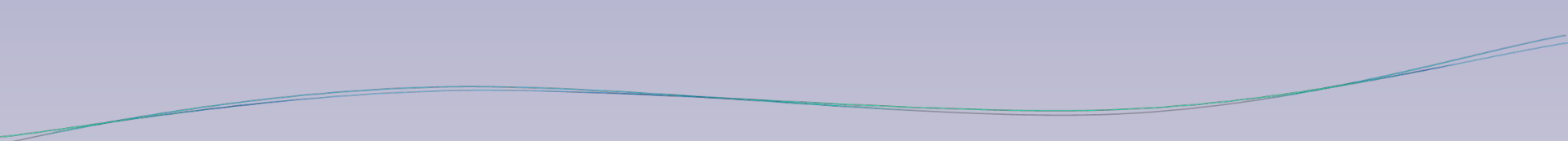
Решение. Найдем

$$\begin{aligned} & (\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 2(\vec{a} \times \vec{a}) - \vec{a} \times \vec{b} + 4(\vec{b} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{b}) \\ &= -5(\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

(поскольку $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$ и $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$)

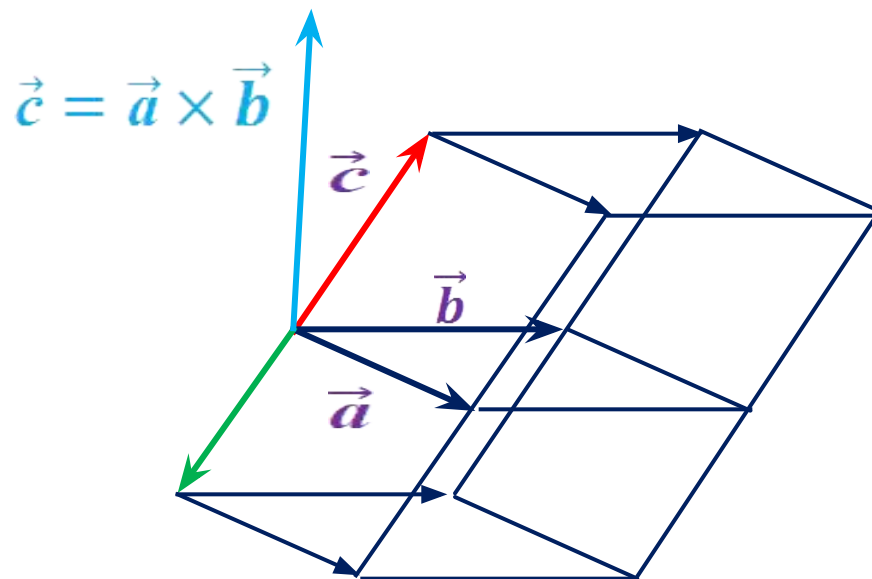
Площадь параллелограмма S равна:

$$S = 5|\vec{a} \times \vec{b}| = 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}$$



СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется число $([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c})$



Результат смешанного произведения трех векторов является скалярной величиной

Свойства смешанного произведения векторов

1. Абсолютная величина смешанного произведения векторов $([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{d})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{d} :

2. Объем пирамиды образованной тремя векторами \vec{a} , \vec{b} и \vec{d} равен одной шестой части от модуля смешанного произведения этих векторов:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{d})|$$

3. Смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хоть один из векторов равен нулю;
- б) два из векторов коллинеарны;
- в) векторы компланарны.

$$4. ([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{d}) = (\vec{a}, [\vec{b} \times \vec{d}])$$

