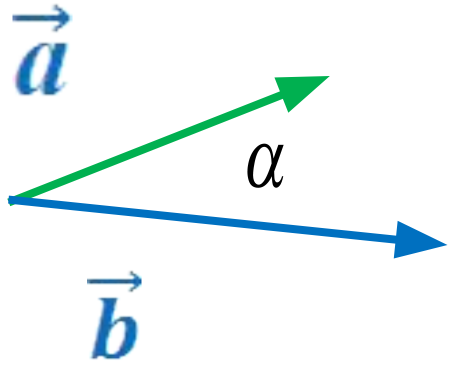
Умножение векторов

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется

число $\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \,\widehat{}\, \vec{b})$, если векторы ненулевые

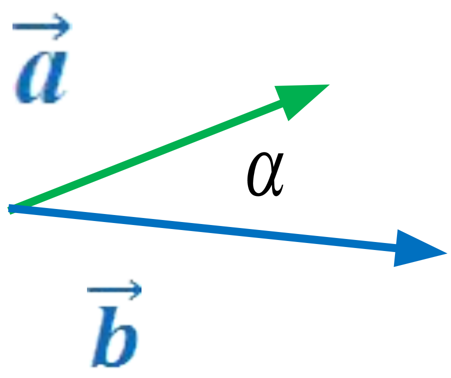
число 0, если хотя бы один из векторов нулевой



$$\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \,\widehat{}\, \vec{b})$$

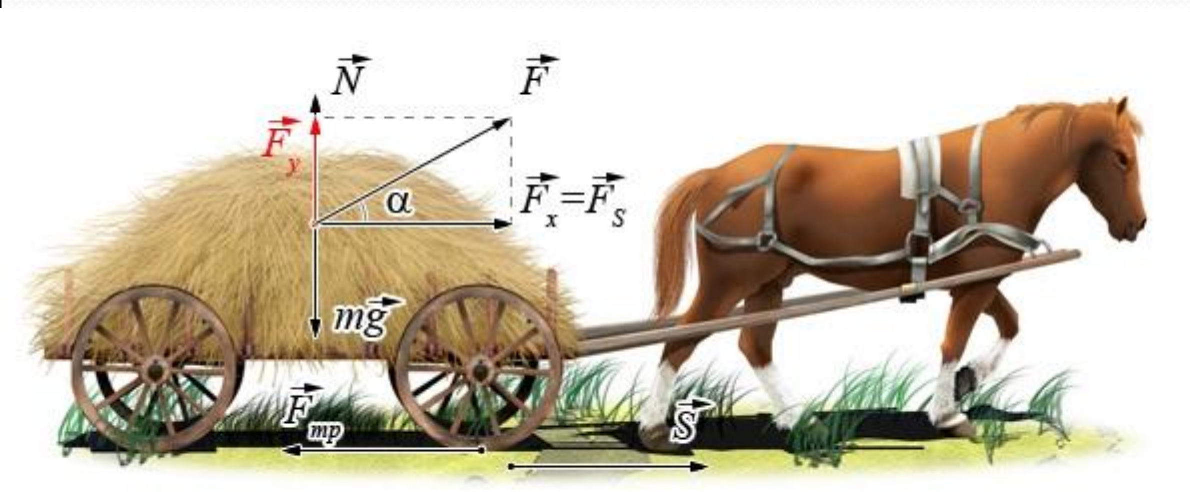
Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется

- число $\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}\right)$, если векторы ненулевые
- число 0, если хотя бы один из векторов нулевой

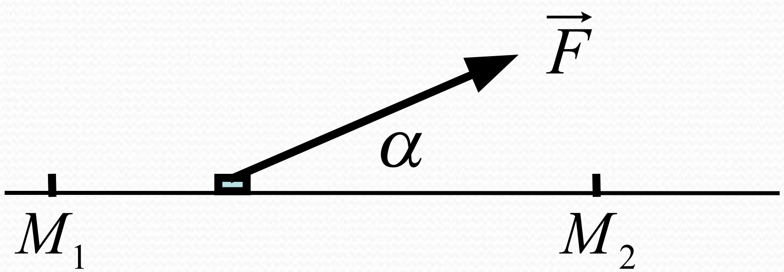


$$\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}\right)$$

Физический смысл скалярного произведения



Пусть материальная точка под действием силы $\vec{F}$ перемещается из положения M_1 в положение M_2

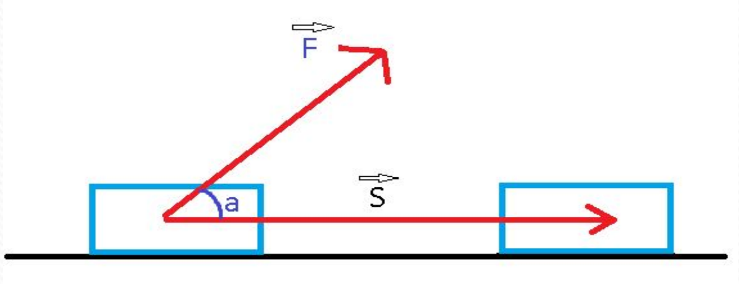


$$A = \vec{F} \cdot \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| \cdot \cos\alpha$$

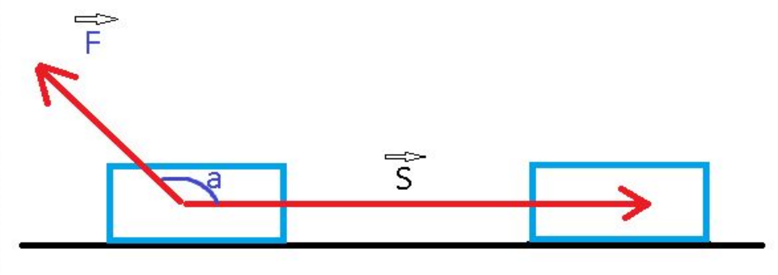
Работа силы по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

работа - скалярная величина

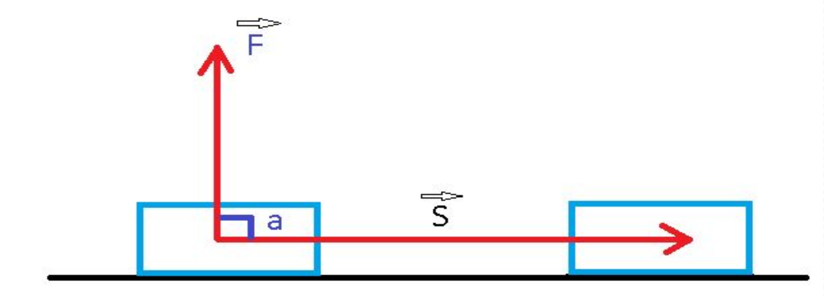
положительная



отрицательная



равна нулю



Свойства скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, если $\vec{a} \neq 0$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, если $\vec{a} = 0$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными (друг к другу), если их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Теорема

Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}$ своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, то их скалярное произведение равно сумме парных произведений одноименных координат, т.е

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1, + x_2 \cdot y_2$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \longrightarrow \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2) \longrightarrow \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i}^2 + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{j}^2 =$$

$$= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

$\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i} = 1}$ $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0}$ $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{j} = 1}$

Согласно определению скалярного произведения

Теорема

Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ своими координатами $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ то их скалярное произведение равно сумме парных произведений одноименных координат, т.е

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1, + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Покупатель купил три вида товаров:

3 кг первого вида – по **20** ден.ед. за килограмм,

2 пачки второго вида – по **25** ден.ед. за пачку,

5 коробок третьего вида – по **10** ден.ед. за коробку

$$\vec{a} = (3, 2, 5) \qquad \vec{b} = (20, 25, 10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 10 = 160$$

Одним из способов определения индекса цен и уровня инфляции является расчет стоимости «потребительской корзины», состоящей из некоторого вида товаров и услуг, получаемых потребителями. В таблице приведен условный пример того, как можно вычислять индекс цен для определенного месяца по отношению к предыдущему месяцу

вид товара	количество	цена единицы товара в текущем месяце	расходы в текущем месяце	цена единицы товара в предыдущем месяце	расходы в предыдущем месяце
1	3	40	120	35	105
2	10	20	200	18	180
3	2	40	80	45	90
общие расходы	-	-	400	-	375

Обозначим через

- $\vec{q} = (3, 10, 2)$ - **вектор количества потребляемых товаров**
- $\vec{c} = (40, 20, 40)$ - **вектор цен в текущем месяце**
- $\vec{c}_{np} = (35, 18, 45)$ - **вектор цен в предыдущем месяце**

индекс цен

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100\ \%$$

$$p(\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}) = (\vec{c} \cdot \vec{q}) \cdot 100$$

$$\left(p(\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}) - (\vec{c} \cdot \vec{q}) \cdot 100\right) = 0$$

индекс цен - численный коэффициент *p*, который делает вектор $\vec{q}$ ортогональным вектору $\left(p\vec{c}_{np} - \vec{c} \cdot 100\right)$

$$\left(p\vec{c}_{np} - 100\vec{c}\right)\vec{q} = 0$$

индекс инфляции

$$i = p - 100 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100 - 100 = \frac{(\vec{c}_{np} - \vec{c}) \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100$$

вид товара	количество	цена единицы товара в текущем месяце	расходы в текущем месяце	цена единицы товара в предыдущем месяце	расходы в предыдущем месяце
1	3	40	120	35	105
2	10	20	200	18	180
3	2	40	80	45	90
общие расходы	-	-	400	-	375

индекс цен

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_{np} \cdot \vec{q}} \cdot 100\ \% =$$

$$= \frac{3 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 2 \cdot 40}{3 \cdot 35 + 10 \cdot 18 + 2 \cdot 45} \cdot 100\ \% = \frac{400}{375} 100\ \% = 106,7\ \%$$

индекс инфляции

$$i = p - 100 = 106,7 - 100 = 6,7\ \%$$

Задача №1

Дан вектор $\vec{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ своими координатами. Вычислить длину данного вектора.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 \cdot x_1, + x_2 \cdot x_2 + \cdots + x_n \cdot x_n$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Задача №2

Даны два ненулевых вектора своими координатами $\vec{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_\text{п})$. Найти косинус угла, образованного данными векторами.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1, + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

$$\cos(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot y_1, + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y + \cdots + y_n^2}}$$

Лемма

Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}$ своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2)$ то справедлива формула

$$\sin(\vec{a} \,\widehat{}\, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее заданным свойствам (*рассматриваемым как аксиомы*), называется <u>евклидовым</u> пространством E^n.

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ пространства E^n образует ортонормированный базис, если эти векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и норма (длина) каждого из них равна единице.

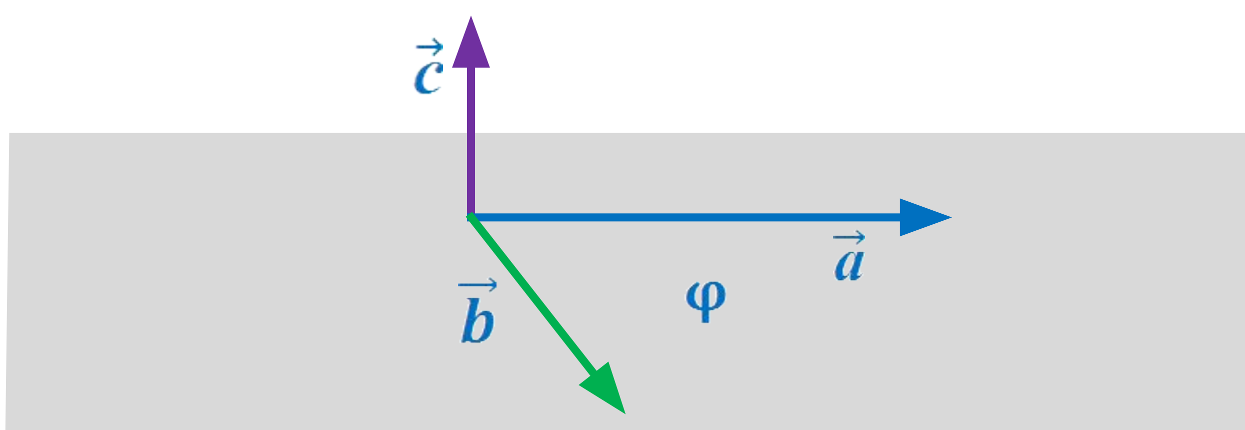
Теорема

Во всяком *n*-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис

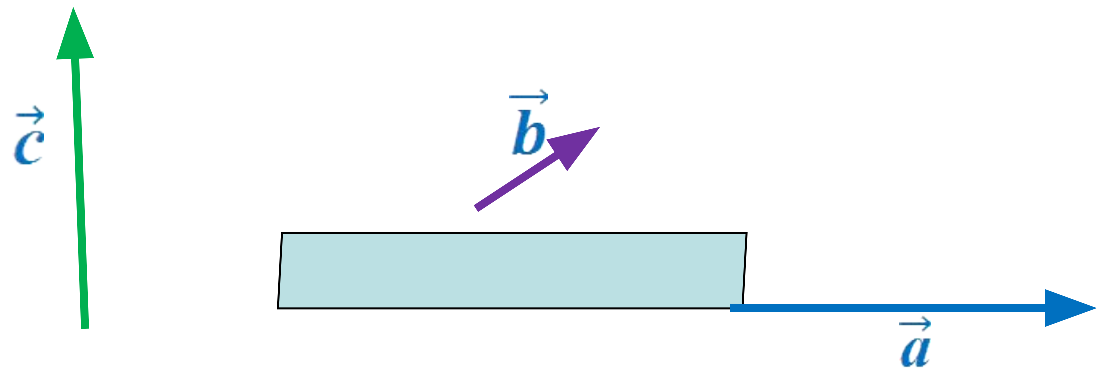
ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi \qquad \sin\varphi \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
- вектор $\vec{c}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является правой



Ориентированные тройки векторов



Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ некомпланарных векторов называется *левой.*

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается:

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad \text{или} \quad \left[\vec{a},\vec{b}\right]$$

свойства векторного произведения векторов

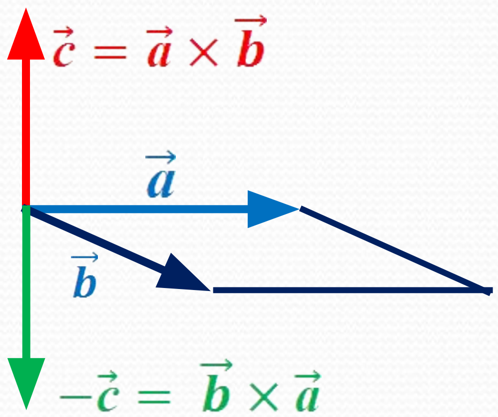
модуль векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равен площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$

векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или хотя бы один из них равен нуль вектору

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$$



Пример. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$.

Решение. Найдем

$$(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{a})-\vec{a}\times\vec{b}+4(\vec{b}\times\vec{a})-2(\vec{b}\times\vec{b})$$

$$=-5(\vec{a}\times\vec{b})$$

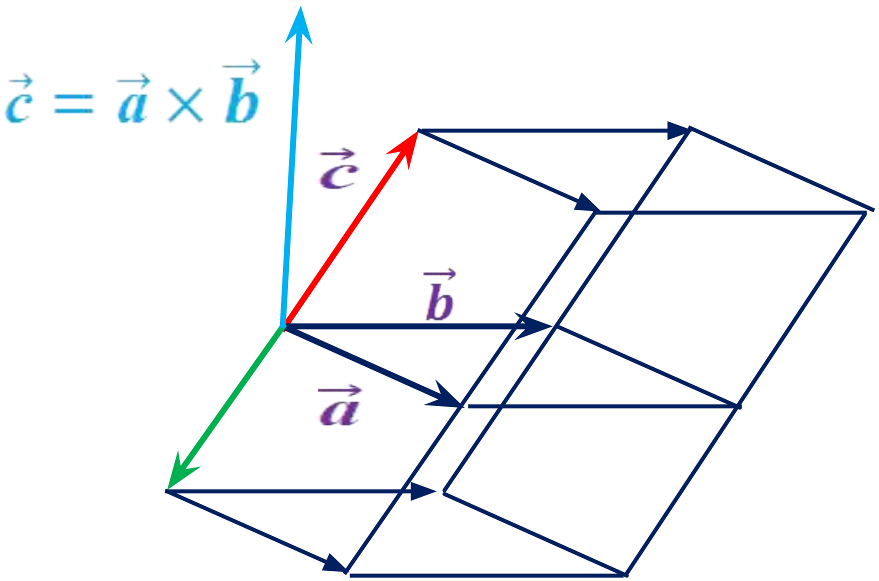
(поскольку $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0$ и $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$)

Площадь параллелограмма S равна:

$$S=5|\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\,60°=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}$$

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

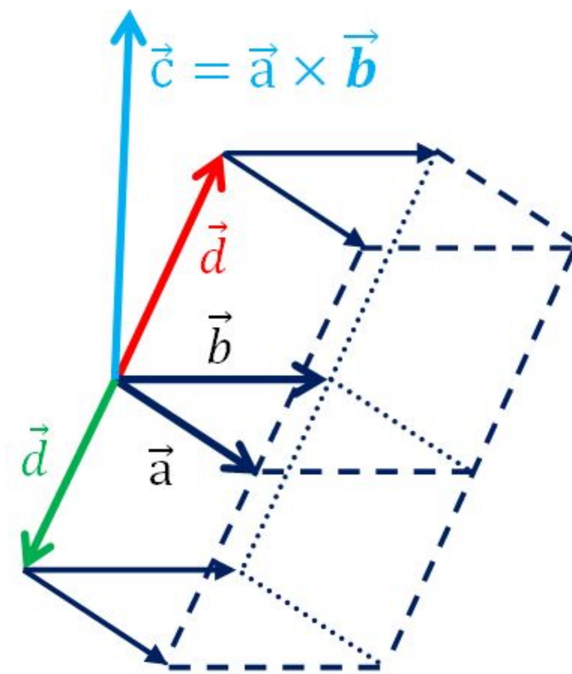
Смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c})$



Результат смешанного произведения трех векторов является скалярной величиной

Свойства смешанного произведения векторов

1. Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\left([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{d}\right)$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$:



2. Объем пирамиды образованной тремя векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$ равен одной шестой части от модуля смешанного произведения этих векторов:

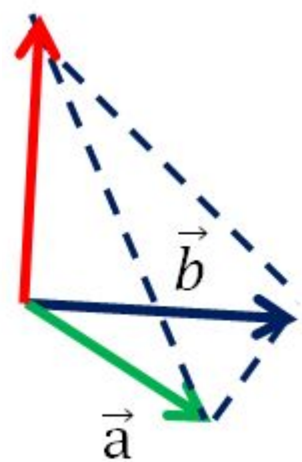
$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{d}\right)\right|$$

3. Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.



4. $\left([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{d}\right) = \left(\vec{a},[\vec{b}\times\vec{d}]\right)$