



Проекции

Определения

- В математическом смысле проекции - это преобразования точек пространства размерности n в точки пространства размерности меньшей, чем n , или, как еще говорят, **на подпространство исходного пространства**.
- В компьютерной графике рассматриваются преимущественно проекции трехмерного пространства образа на двумерную картинную плоскость.
- Проекция трехмерного объекта, представленного в виде совокупности точек, строится при помощи прямых проецирующих лучей, которые называются проекторами и которые выходят из центра проекции, проходят через каждую точку объекта и, пересекая картинную плоскость, образуют проекцию

Мировые и экранные координаты

- *мировые координаты*, которые описывают истинное положение объектов в пространстве с заданной точностью.
- *система координат устройства изображения*, в котором осуществляется вывод изображения объектов в заданной проекции.

Для получения изображения в определенной проекции необходимо рассчитать координаты проекции. Из них можно получить координаты для графического устройства— назовем их *экранными координатами*. Для синтеза изображения на плоскости достаточно двумерной системы координат. Однако в некоторых алгоритмах визуализации используются трехмерные экранные координаты, например, в алгоритме Z-буфера.

Основные типы проекций

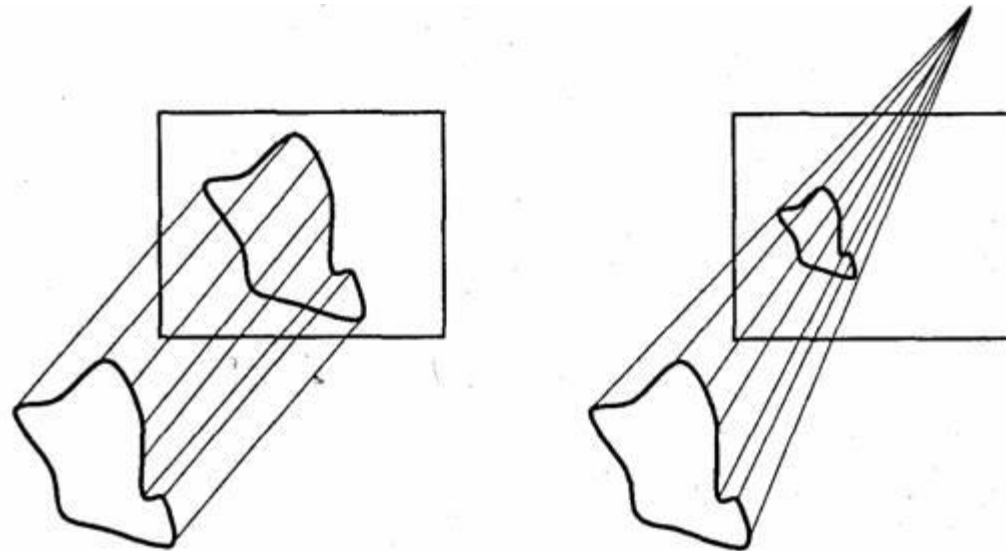


Рис. 2.15. Параллельная и центральная проекции

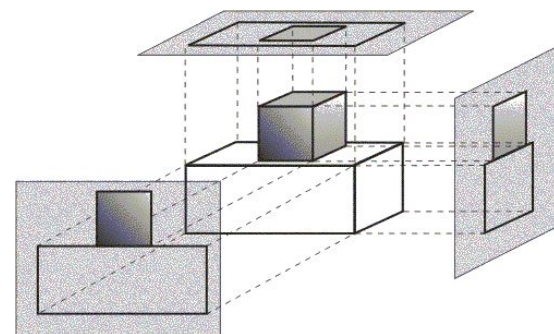
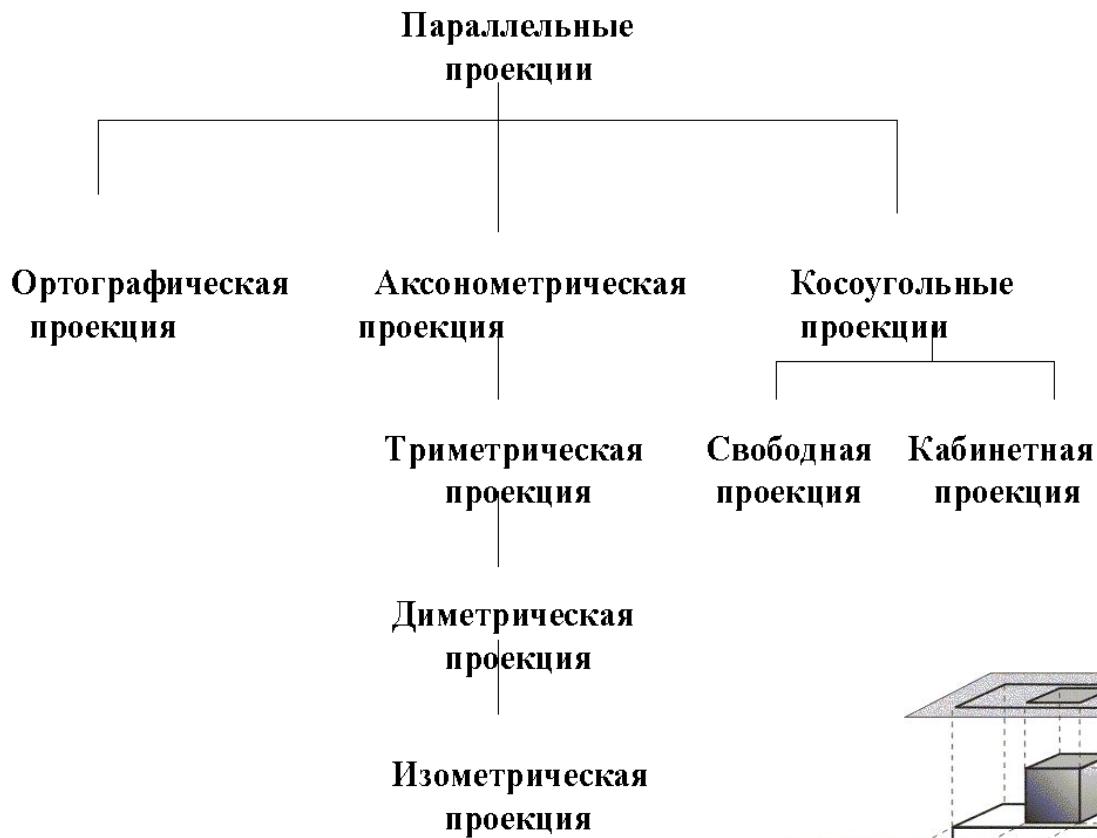
Для **центральной проекции** (также называемой *перспективной*) лучи проецирования исходят из **одной точки**, размещенной на конечном расстоянии от объектов и плоскости проецирования.

Для **параллельной проекции** лучи проецирования **параллельны**.

Общая классификация

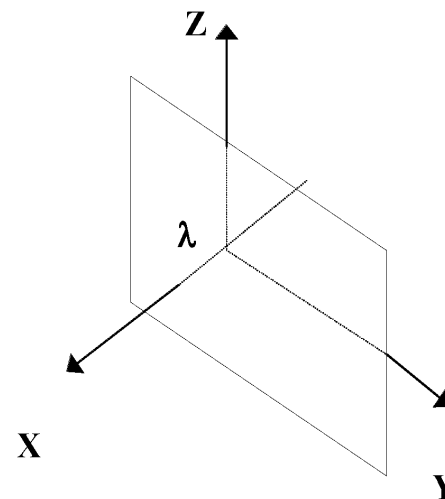
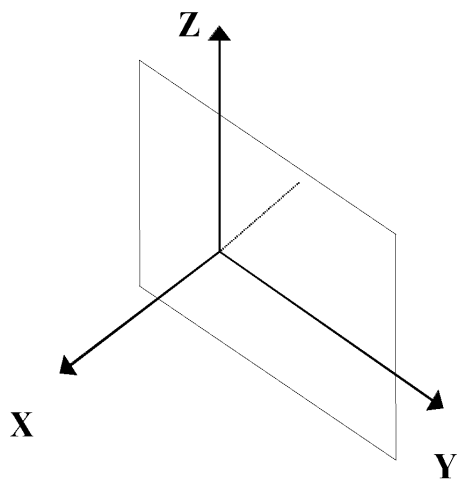


Параллельные проекции



Ортогональная проекция

При **ортографической** (от греч. *orthós* — прямой и *grápho* — пишу) **проекции** картинная плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей или параллельна ей. Проектирующие прямые перпендикулярны картинной плоскости.



Так как проецирование можно рассматривать как вид геометрических преобразований, для его описания в задачах компьютерной графики используются однородные координаты и матрицы четвертого порядка. В частности, для ортографической проекции матрица проецирования вдоль оси X на плоскость YZ имеет вид:

$$P_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Если картинная плоскость параллельна координатной плоскости и перенос составляет величину λ (рис.5), необходимо умножить матрицу P_x на матрицу переноса, учитывая при этом, что $\mu = 0$ и $\nu = 0$.

$$P_{x\lambda} = P_x * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

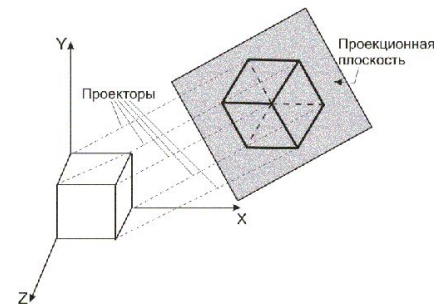
$$P_{z\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_{y\mu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

АксонOMETрические проекции

АксонOMETрические проекции подразделяются на три группы в соответствии с расположением проекционной плоскости по отношению к осям координат.

Если нормаль к проекционной плоскости образует три различных угла с осями, то проекция называется **триметрической (триметрией)**. Если два из этих углов одинаковы, то получаем **диметрическую** проекцию (**диметрию**). И, наконец, если все три угла равны между собой, то проекция называется **изометрической (изометрией)**. Изометрическая проекция обладает тем свойством, что все три главные координатные оси одинаково укорачиваются. Поэтому можно проводить измерения вдоль направления осей с одним и тем же масштабом (отсюда название: "изо", что означает "равно", и "метрия" - "измерение"). Кроме того, главные координатные оси проецируются так, что их проекции составляют равные углы друг с другом



Косоугольные проекции

Проекции, для получения которых используется пучок прямых, не перпендикулярных картинной плоскости, называют косоугольными.

Среди них различают:

свободную проекцию, когда угол наклона проектирующих прямых к картинной плоскости равен половине прямого, и **кабинетную проекцию**, когда требуется еще, чтобы масштаб по одной из осей был вдвое меньше, чем по двум остальным осям.

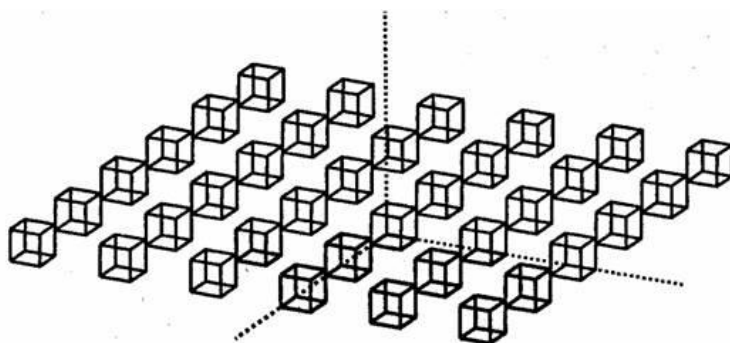
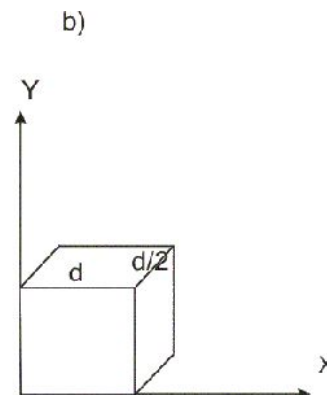
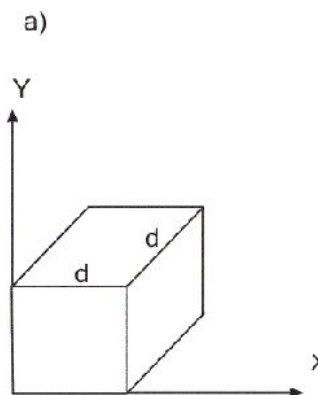


Рис. 2.20. Аксонометрическая проекция



Представление

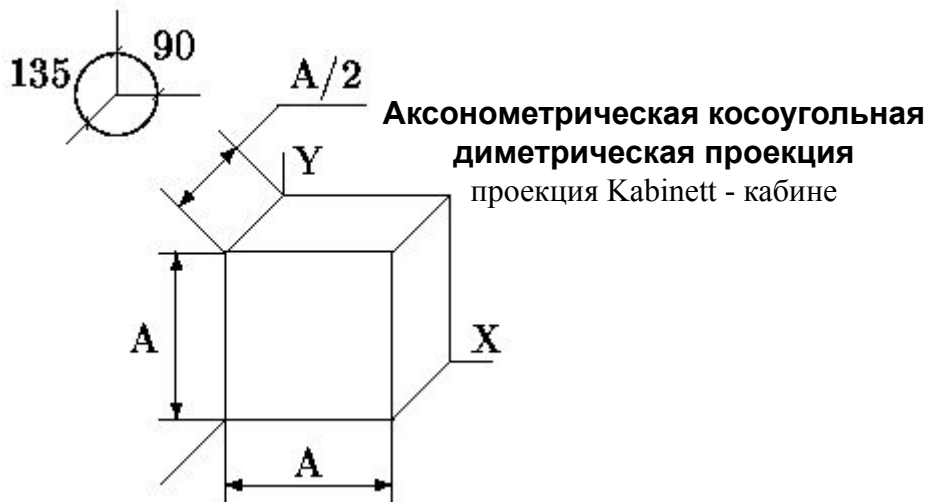
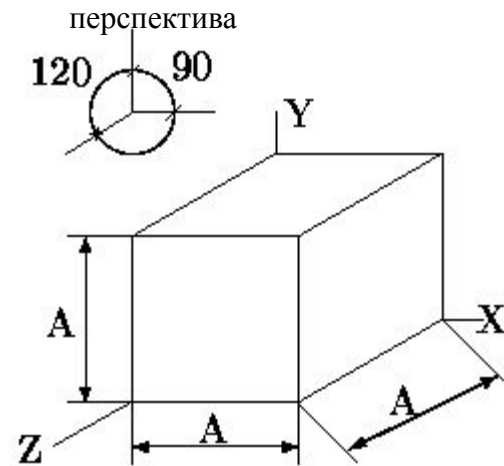
Каждый из трех видов указанных проекций получается комбинацией поворотов, за которой следует параллельное проецирование.

Так, например, при повороте на угол ψ относительно оси ординат, на угол ϕ вокруг оси абсцисс и при последующем проецировании вдоль оси аппликат необходимо построить матрицу:

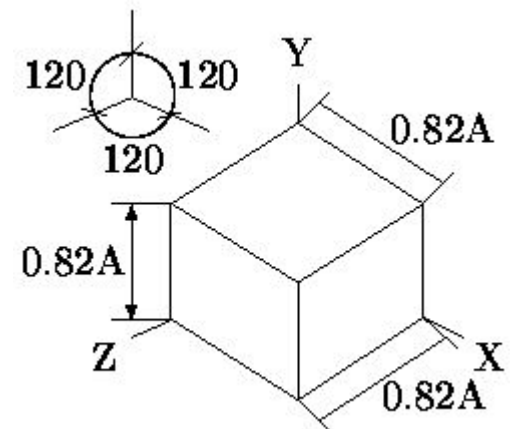
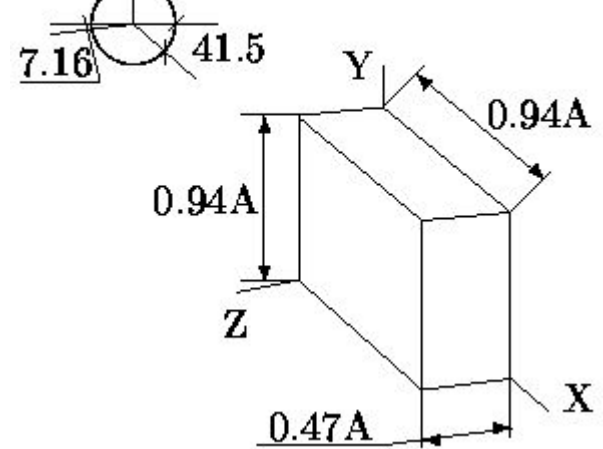
$$M = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1 \end{vmatrix}$$

Примеры

**АксонOMETрическая косоугольная
изометрическая проекция**
(проекция Kavalier - кавалье) или военная

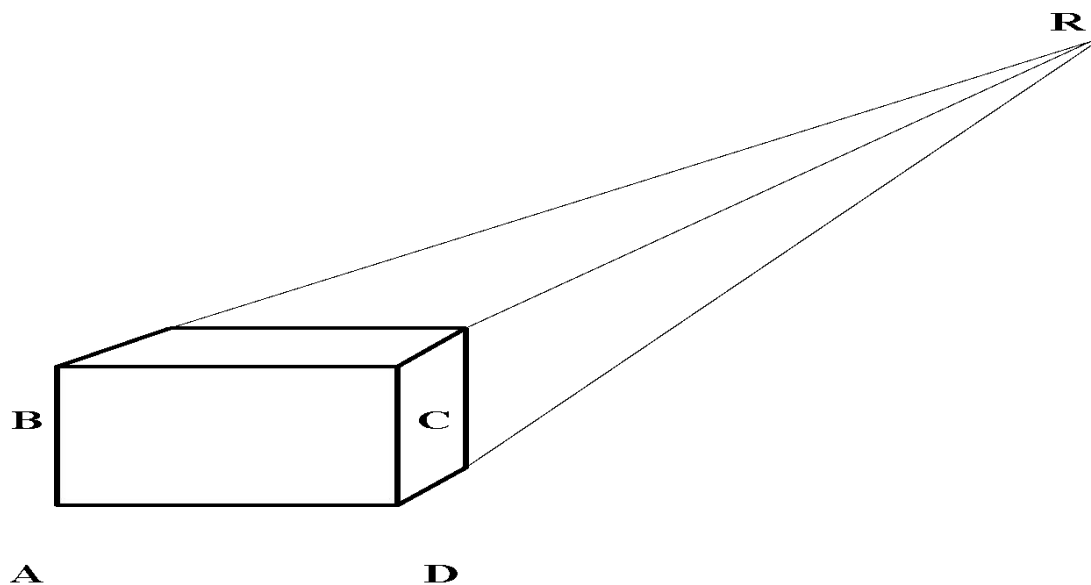


**АксонOMETрическая прямоугольная
диметрическая проекция**



**АксонOMETрическая прямоугольная
изометрическая проекция**

Центральная проекция (перспективная)



Описание

- Эффект перспективы заключается в том, что параллельные прямые пересекаются на горизонте (рис.1). Предметы должны становиться меньше по мере их удаления от наблюдателя. Для достижения этого эффекта применяется центральное (перспективное) проецирование

Для описания перспективного изображения представим, что каждая видимая точка на объекте некоторой прямой линией (лучом) соединяется с глазом. При этом глаз видит лишь те предметы, что попадают в так называемый зрительный конус (ABCDR). Ось этого конуса совпадает с направлением взгляда. Картинную плоскость мы помещаем перпендикулярно оси зрительного конуса. Чтобы построить перспективную проекцию, мы отмечаем точки пересечения лучей с этой плоскостью. Наносить на плоскость следует только те точки, что соответствуют важнейшим элементам объекта: вершины, концы отрезков, угловые точки граней

Свойства перспективной проекции:

1. Перспективная проекция прямой линии есть прямая линия.
2. Перспективная проекция грани (то есть плоской области, ограниченной замкнутой ломаной линией) есть грань. Если грань ограничена ломаной, состоящей из N сегментов, то и перспективная проекция этой грани будет гранью, ограниченной ломаной из N сегментов.
3. Проекция выпуклой грани есть выпуклая грань.

Классификация перспективных проекций определяется количеством точек схода проецирующих лучей для соответствующих осей X , Y , Z представлена выше

Представление

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Где c – центр проецирования который лежит в точке $C(0,0,c)$,

Матрица Q соответствует так называемому односточечному перспективному преобразованию. Более сложные (двухточечные и трехточечные) перспективные преобразования, представленные в классификации, не рассматриваются.

Алгоритм вычисления перспективной проекции

Учитывая все сказанное выше о перспективных проекциях можно отметить следующее:

1. Каждую вершину трехмерного объекта можно задать в однородных координатах в виде $(x \ y \ z \ 1)$ и, следовательно, представить объект координатной моделью.
2. Перспективная проекция трехмерного объекта может быть получена с помощью матрицы Q .
3. После применения матрицы Q необходимо первую и вторую координаты разделить на последний элемент полученного вектора координат, то есть на $(1 - z / c)$, чтобы получить координаты перспективной проекции точки на картинной плоскости.

Примеры

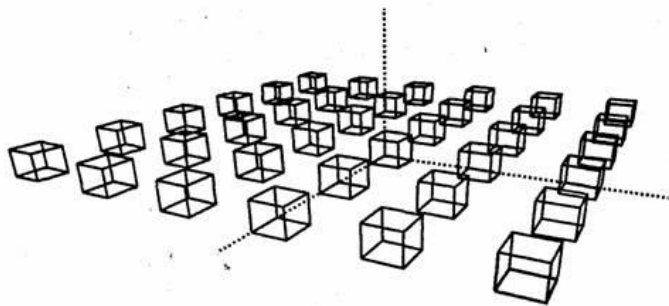


Рис. 2.21. Перспективная проекция для длиннофокусной камеры ($z_k = 2000$)

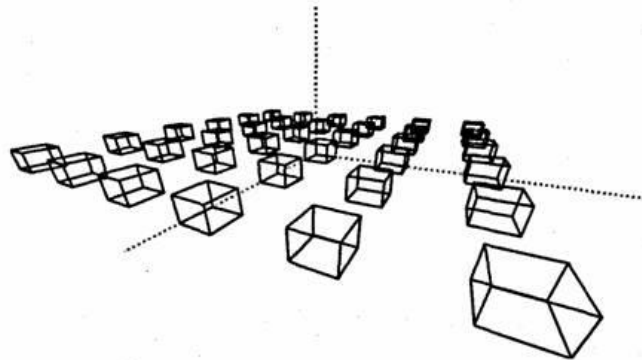
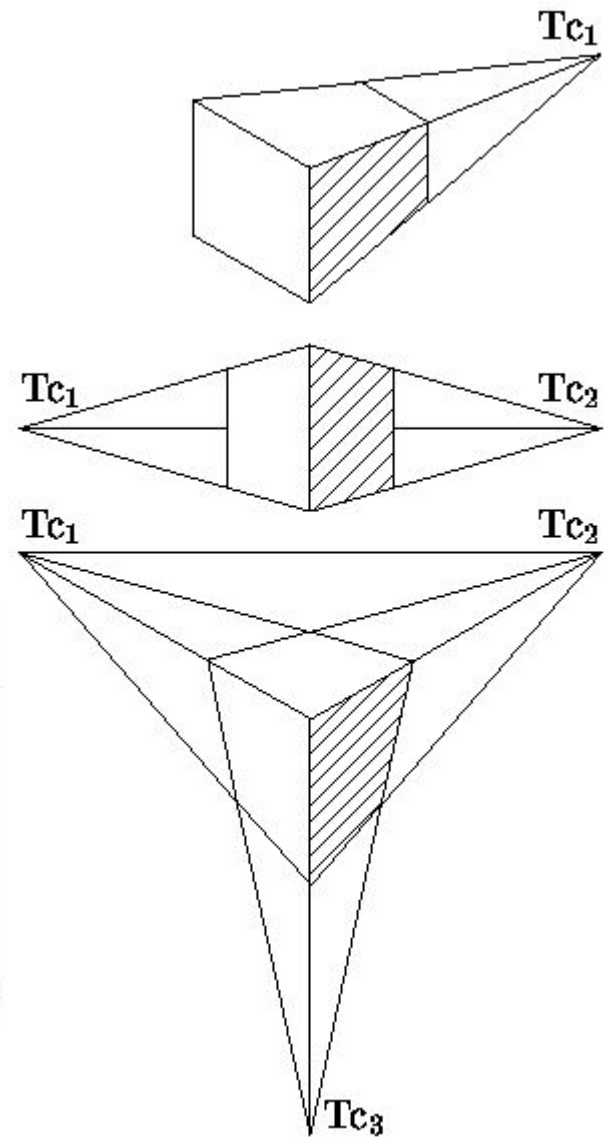


Рис. 2.22. Перспективная проекция для короткофокусной камеры ($z_k = 1200$)



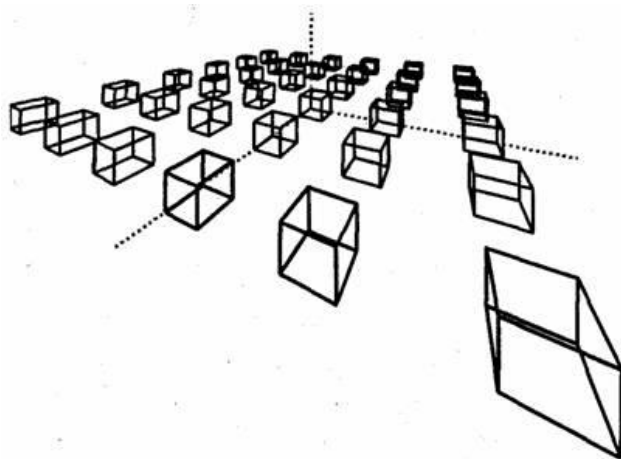


Рис. 2.24. Косоугольная перспективная проекция для короткофокусной камеры ($z_x = 1200$)

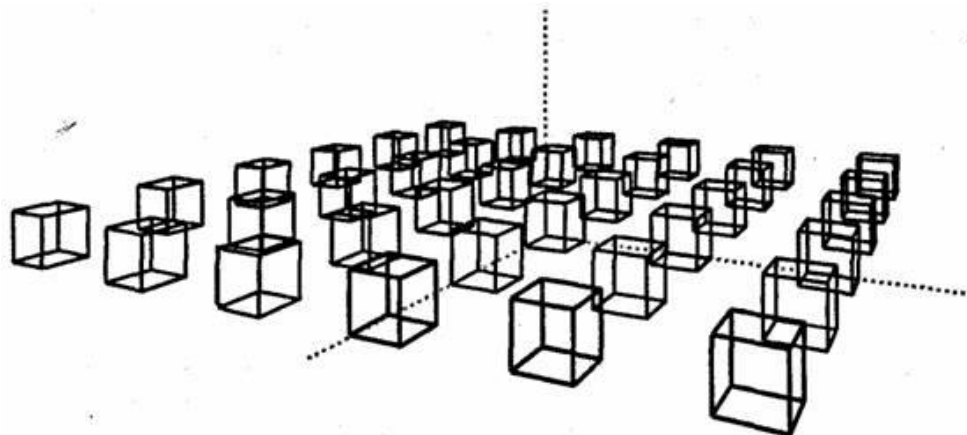


Рис. 2.23. Косоугольная перспективная проекция для длиннофокусной камеры ($z_x = 2000$)

Преобразование координат

Представим цепочку преобразований координат от мировых к экранным следующим образом



Рис. 2.26. Этапы преобразований координат