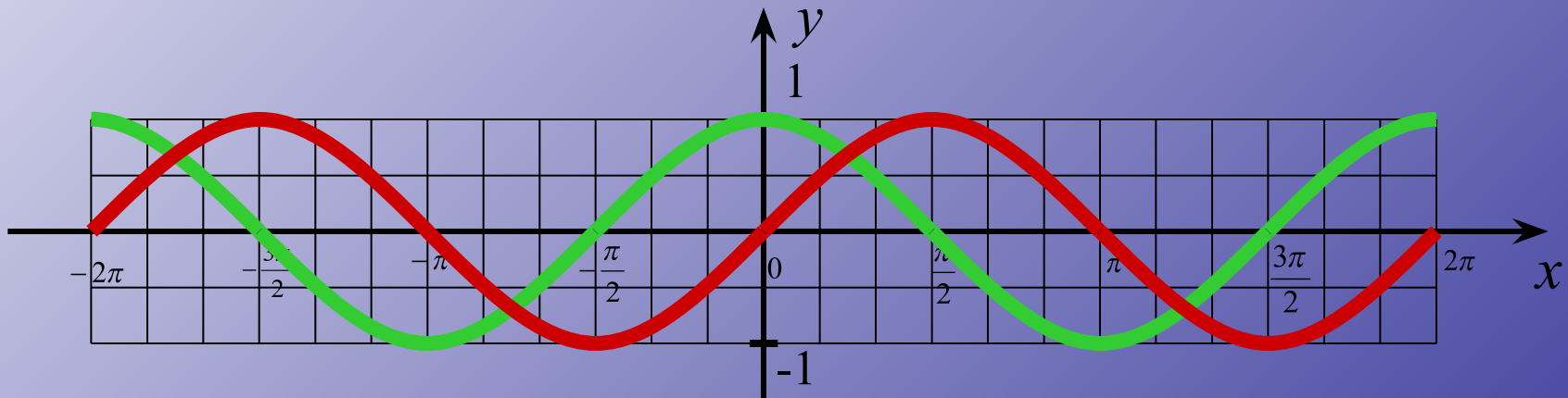


TRITHOMETPYNH QVARKW

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

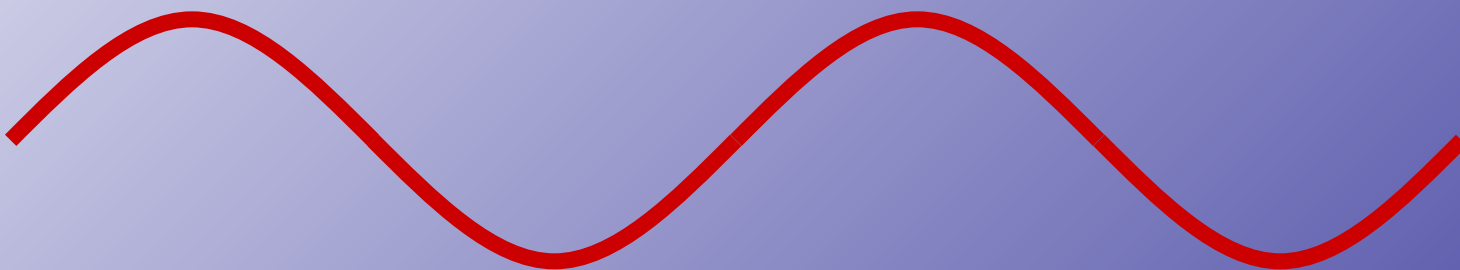
$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$

їх графіки



та властивості

Синус (від лат. *sinus*) – вигин,
кривизна.



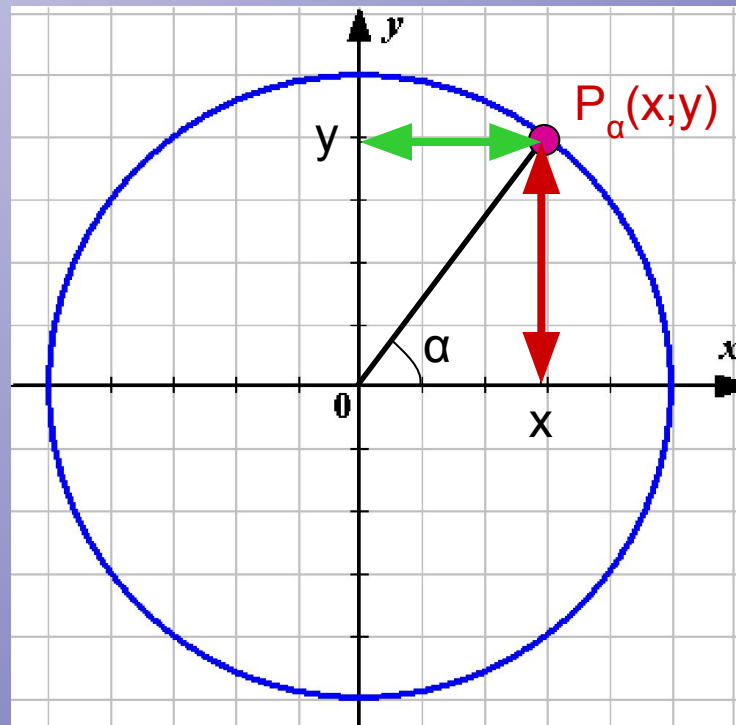
Означення тригонометричних функцій

$$\sin \alpha = y$$

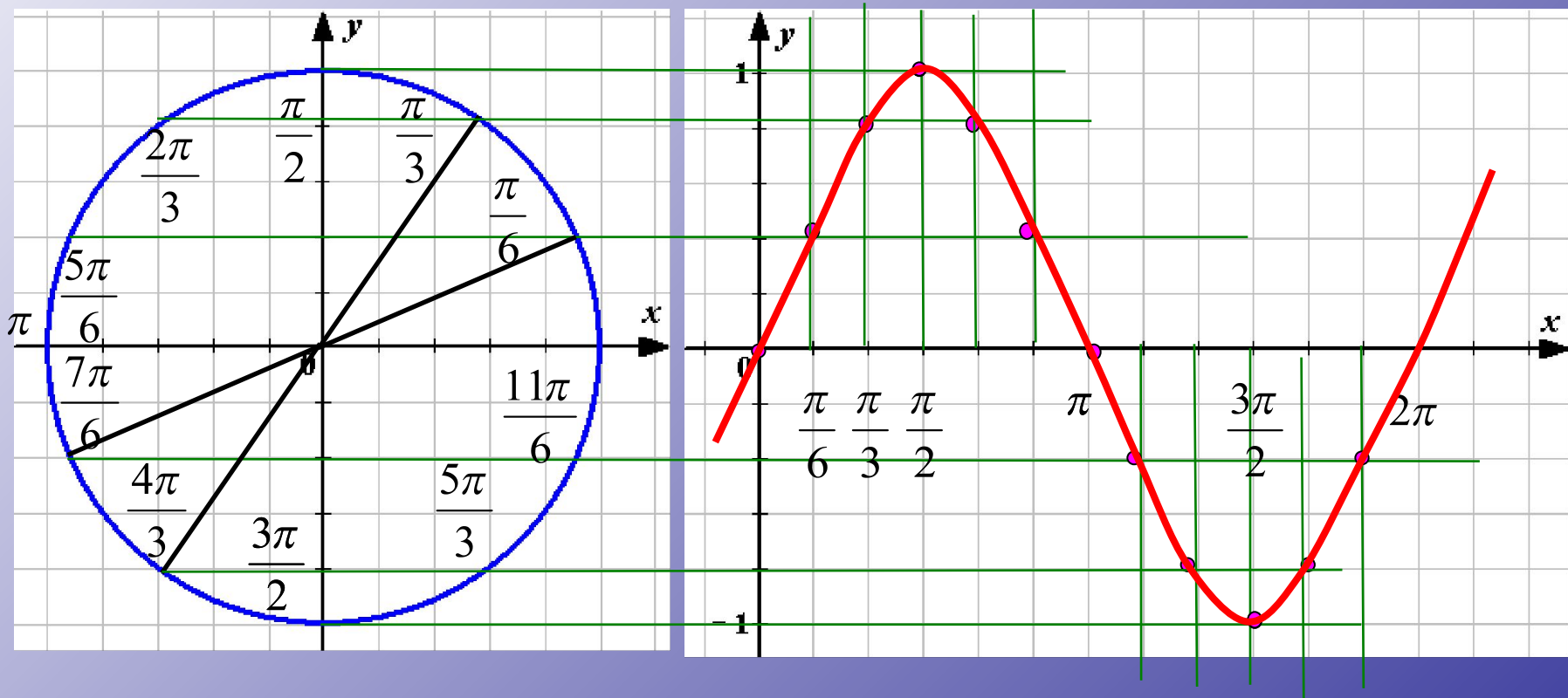
ордината
точки P_α

$$\cos \alpha = x$$

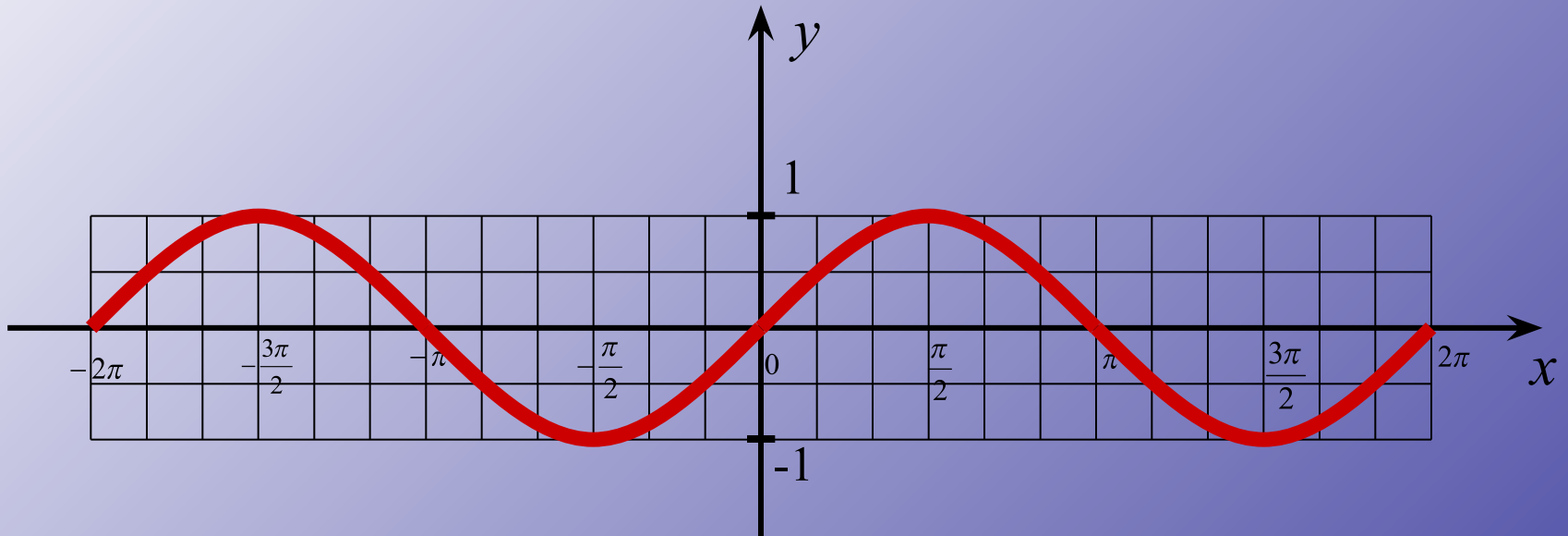
абсциса
точки P_α



Побудова графіка функції $y = \sin x$



Графік функції $y = \sin x$

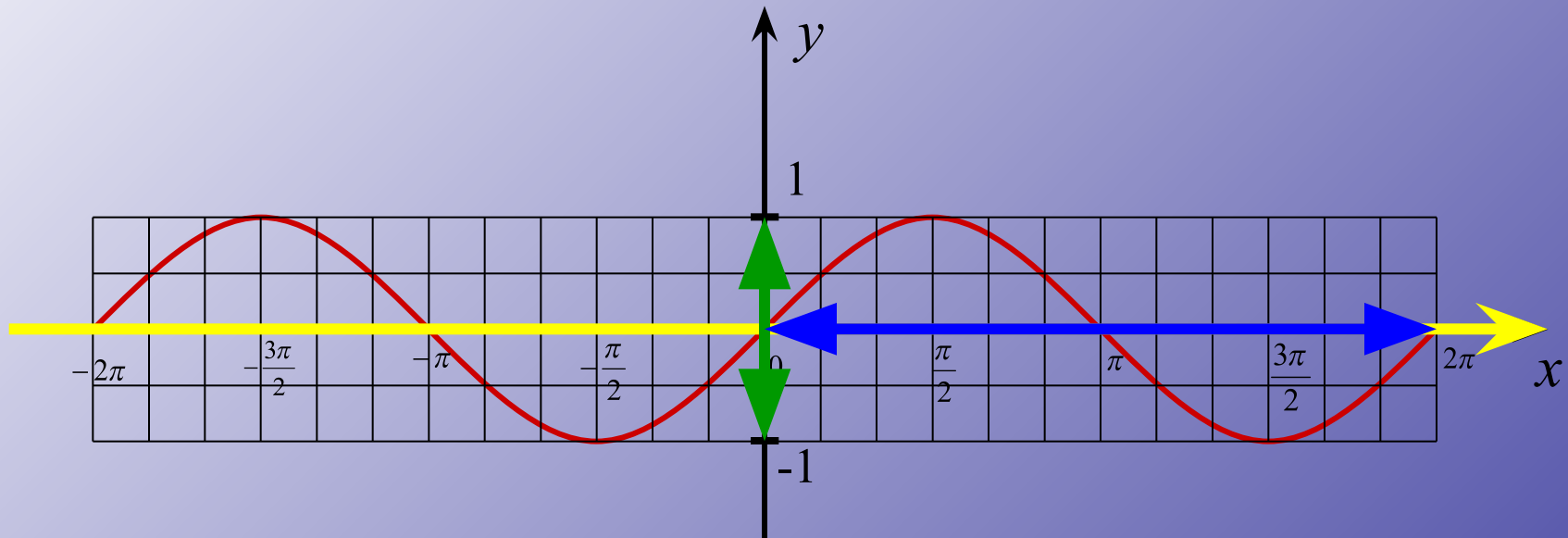


Графіком функції $y = \sin x$

є крива, яка називається

СИНУСОЇДА

Властивості функції $y = \sin x$



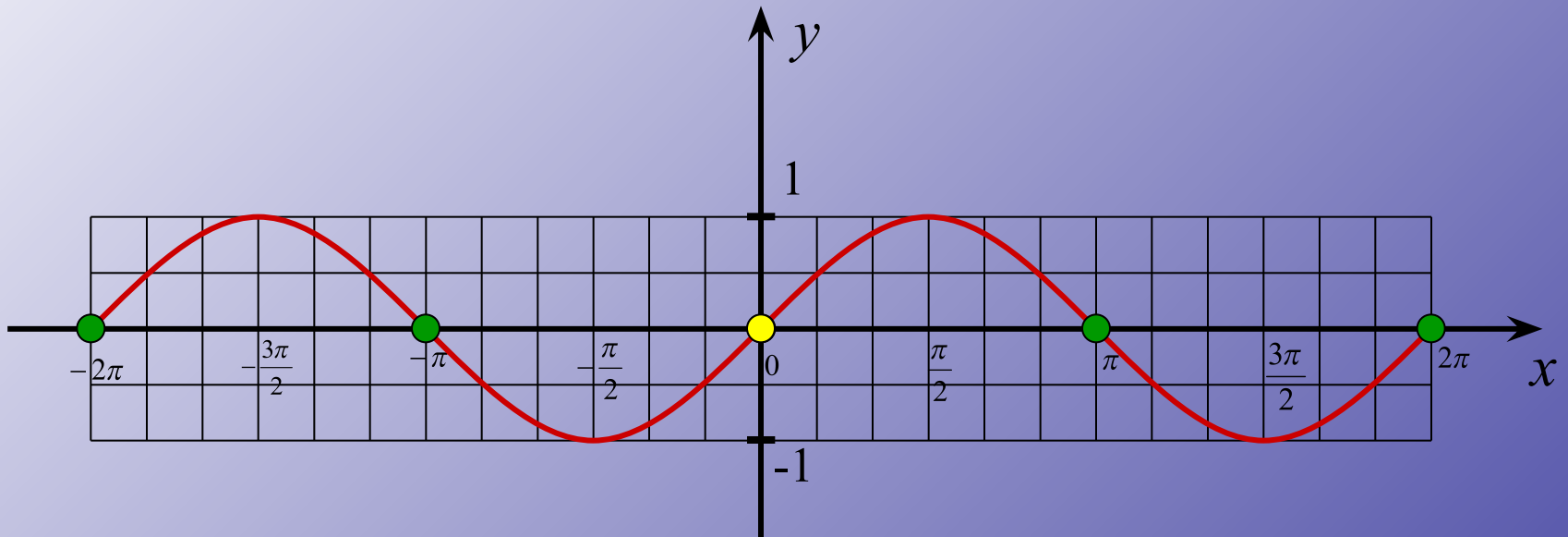
Область визначення $D(\sin x) = \mathbb{R}$

Множина значень $E(\sin x) = [-1; 1]$

Парність або непарність: функція $y = \sin x$ непарна $\sin(-x) = -\sin x$
(графік функції симетричний відносно початку координат)

Періодичність: функція $y = \sin x$ періодична з найменшим додатнім періодом $T = 2\pi$
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Властивості функції $y = \sin x$

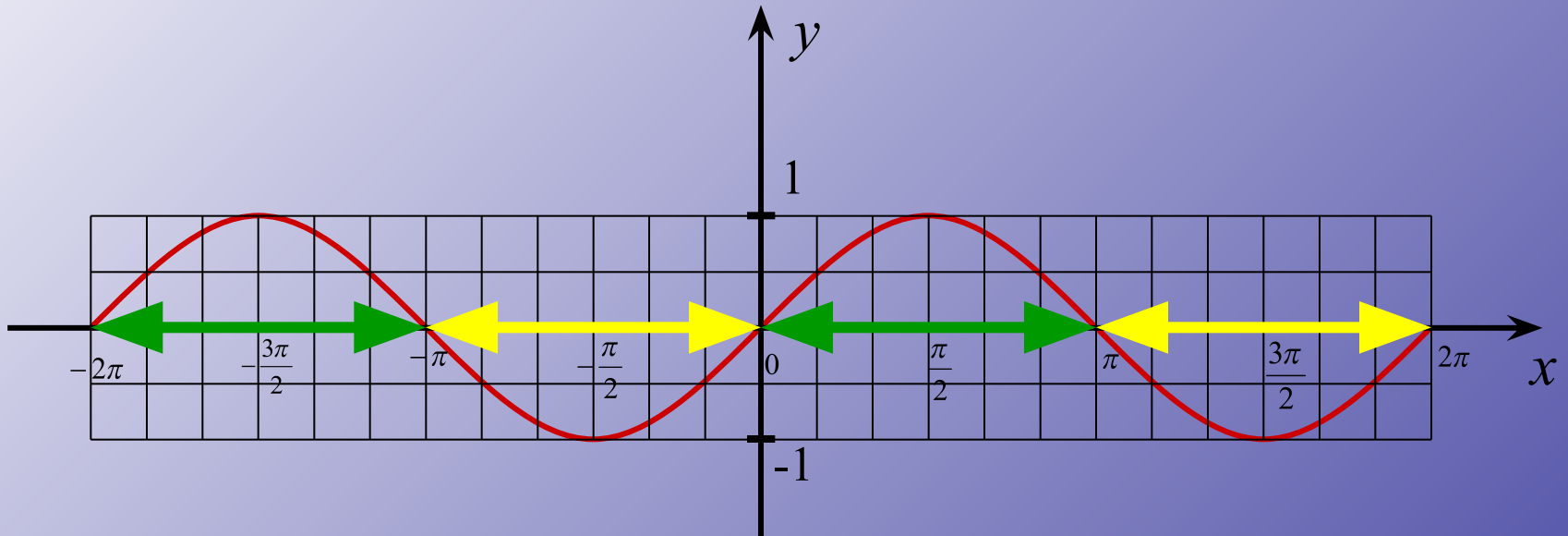


Точки перетину графіка функції $y = \sin x$ з осями координат:

а) з віссю OX (нулі функції): $y = 0$, $\sin x = 0$, якщо $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

б) з віссю OY : $f(0) = \sin 0 = 0$ (точка $(0; 0)$)

Властивості функції $y = \sin x$

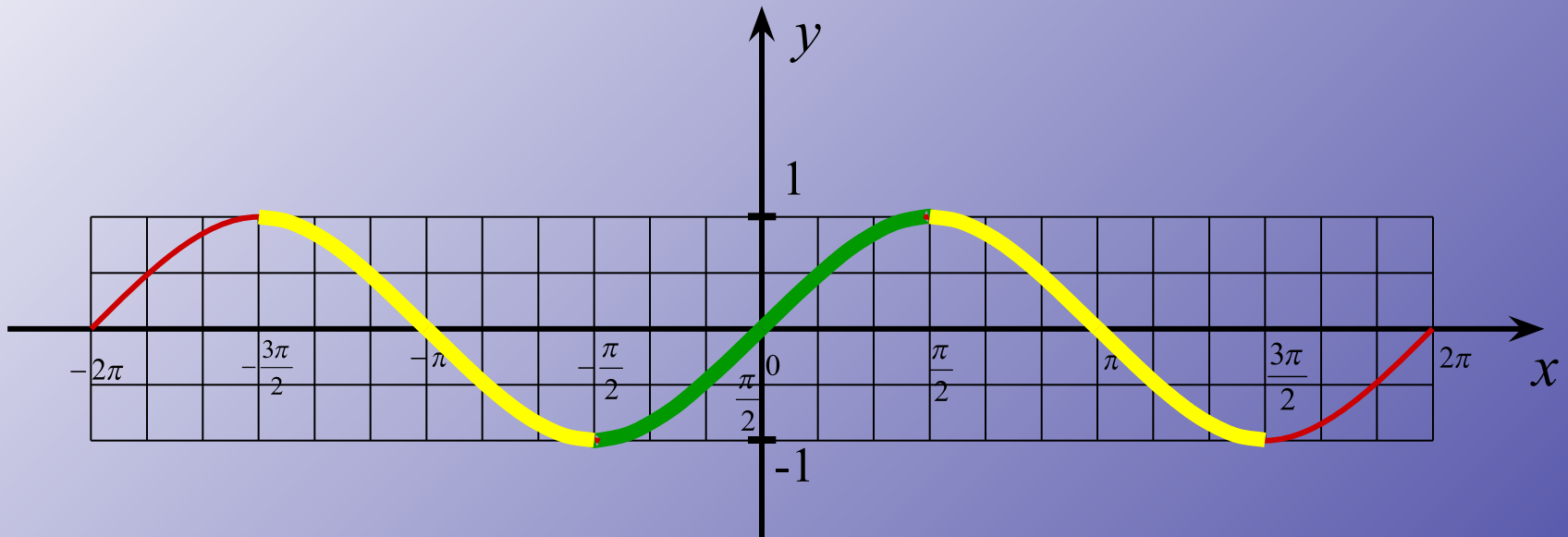


Проміжки знакосталості:

$\sin x > 0$, якщо $x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$

$\sin x < 0$, якщо $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Властивості функції $y = \sin x$



Проміжки монотонності:

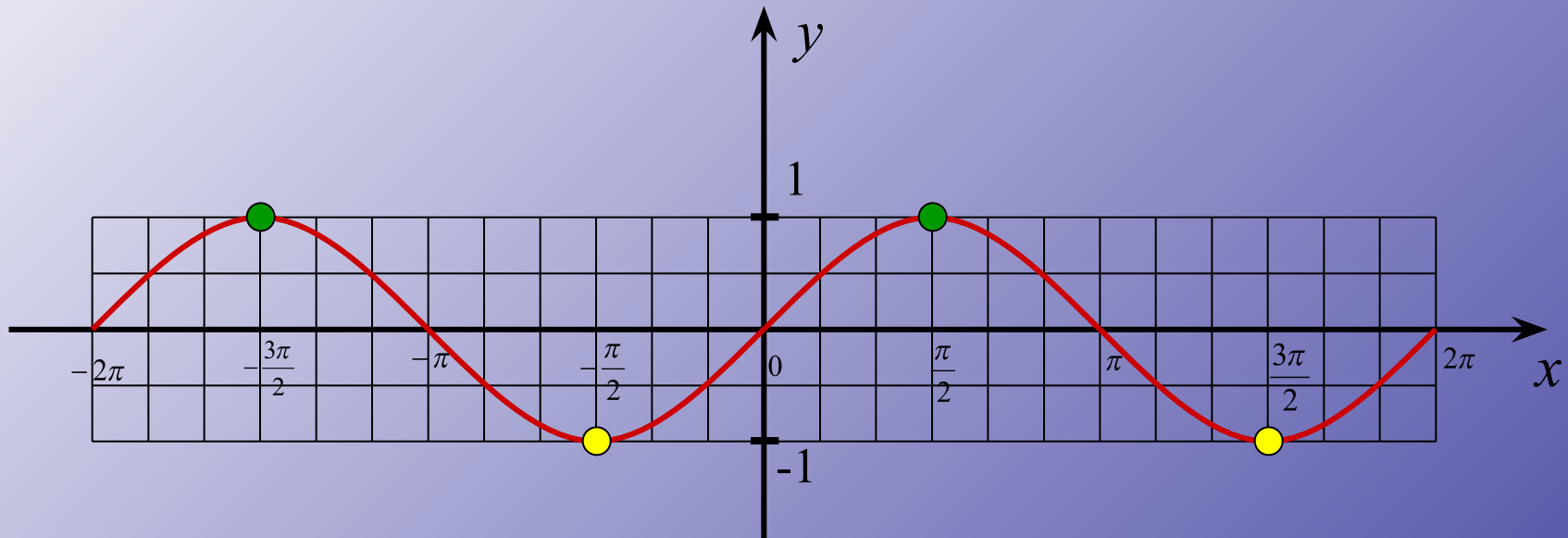
а) функція зростає в кожному з проміжків:

$$x \in [-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

б) функція спадає в кожному з проміжків:

$$x \in [\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

Властивості функції $y = \sin x$



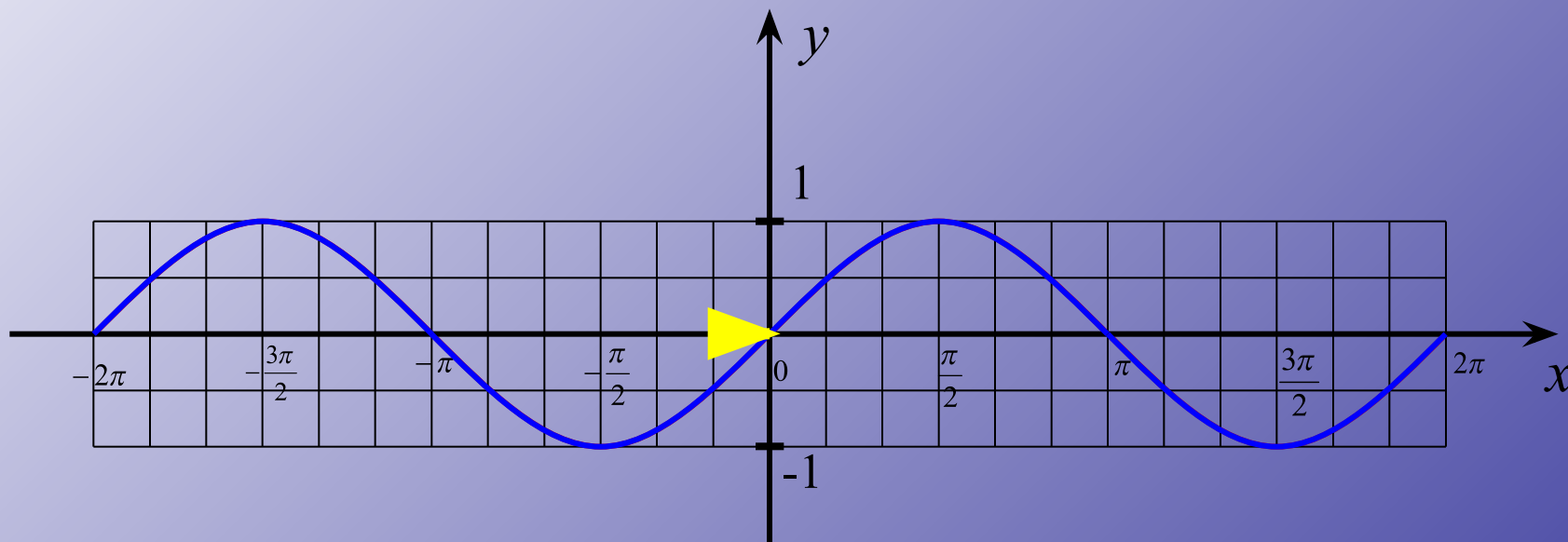
Екстремуми функції:

$$X_{\max} = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, Y_{\max} = 1$$

$$X_{\min} = -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, Y_{\min} = -1$$

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

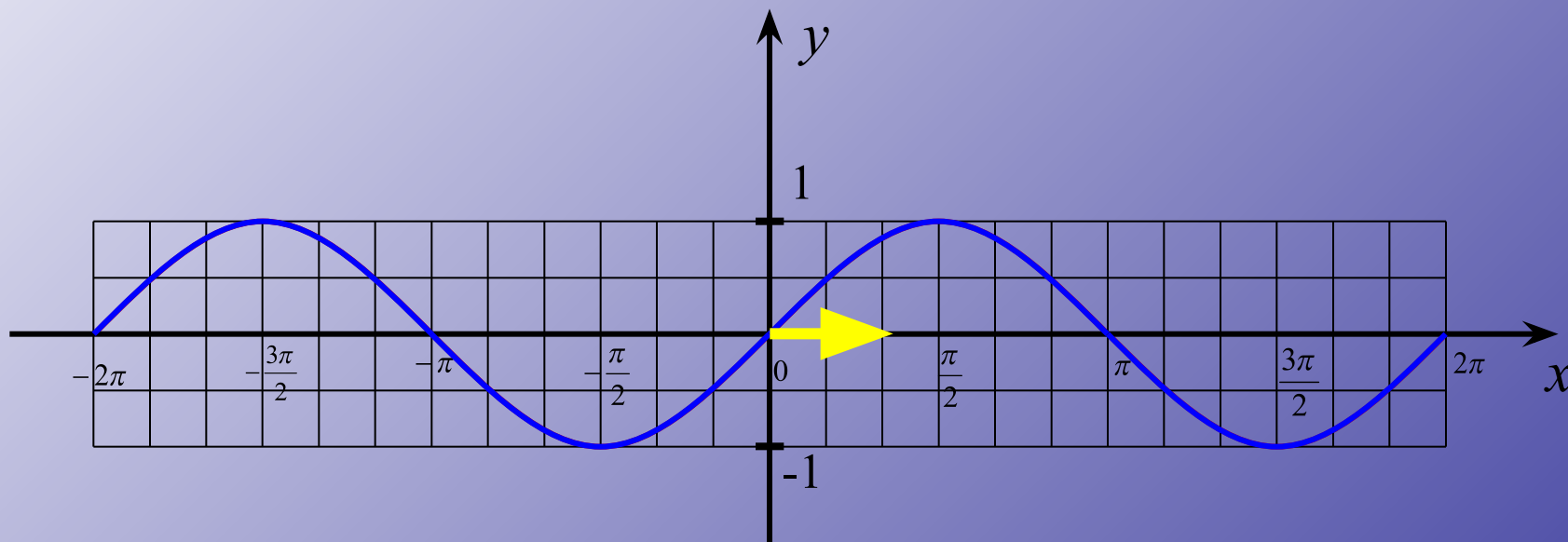
Побудувати графік функції $y = \sin(x + \pi/6)$



Для побудови графіка функції $y = \sin(x + a)$
необхідно графік функції $y = \sin x$ здвинути вздовж осі Ox на a
одиниць вліво

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

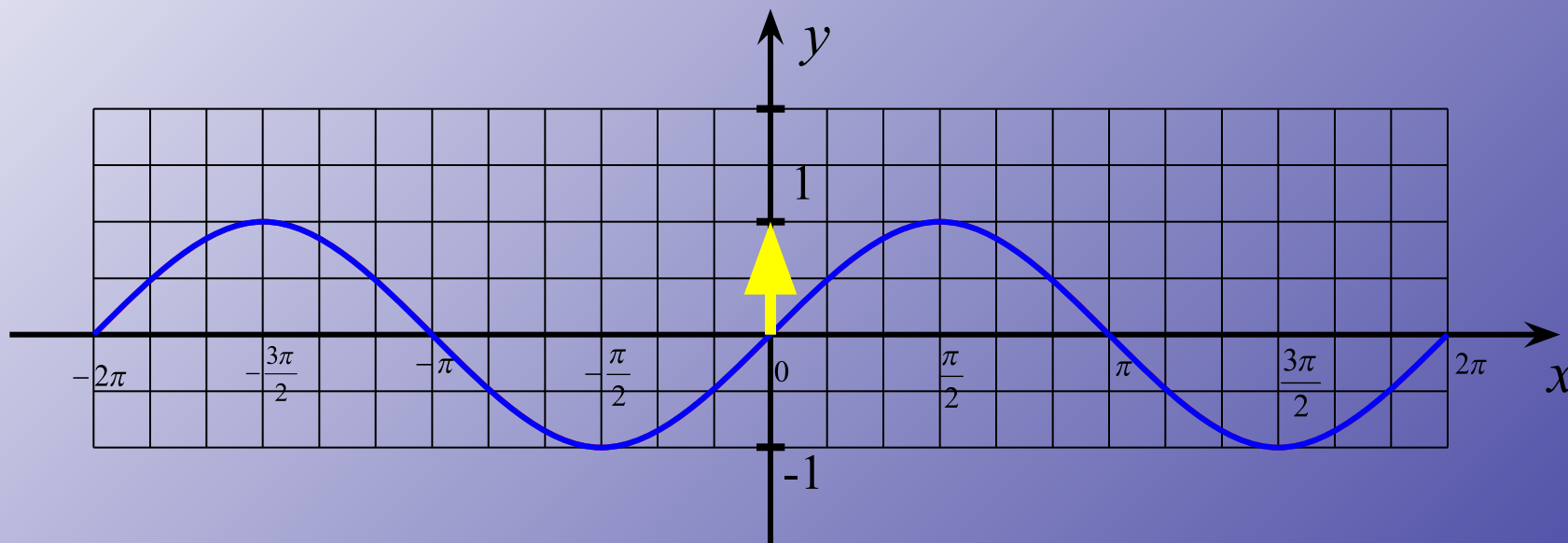
Побудувати графік функції $y = \sin(x - \pi/6)$



Для побудови графіка функції $y = \sin(x - a)$
необхідно графік функції $y = \sin x$ здвинути вздовж осі Ox на a
одиниць вправо

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

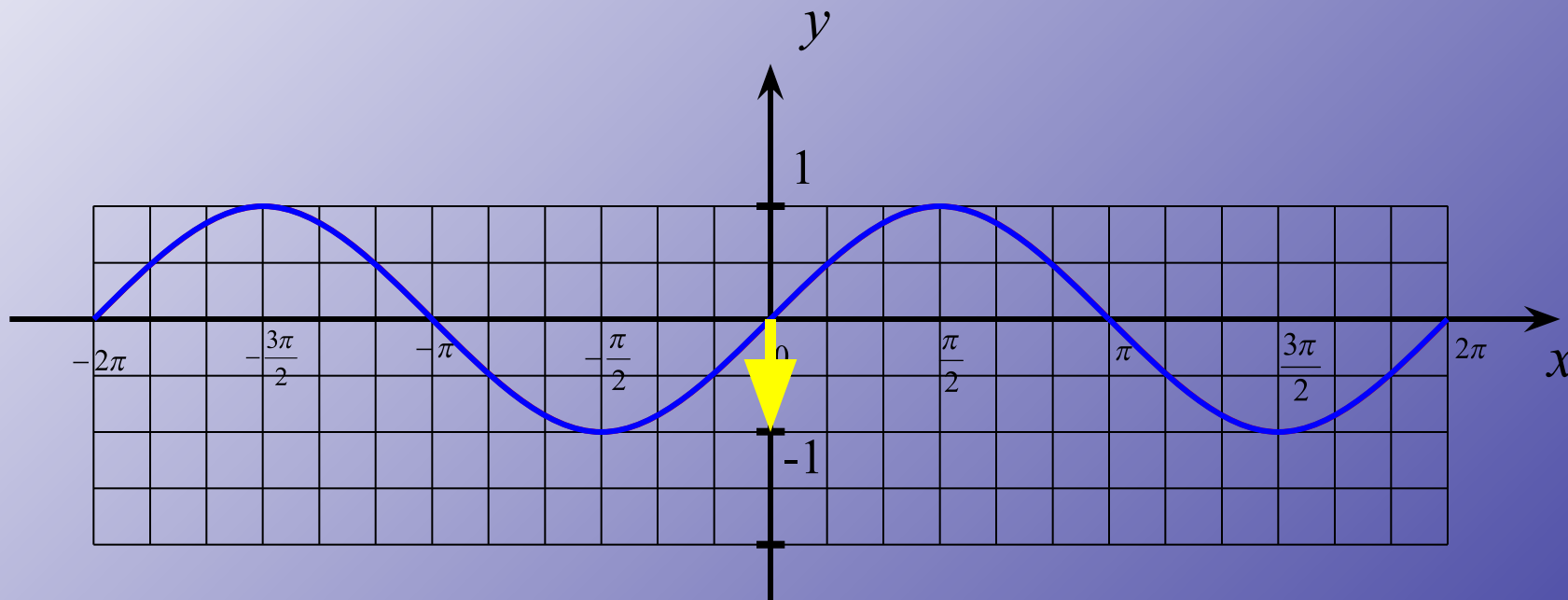
Побудувати графік функції $y = \sin x + 1$



Для побудови графіка функції $y = \sin x + a$
необхідно графік функції $y = \sin x$ здвинути вздовж осі OY на a
одиниць вгору

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

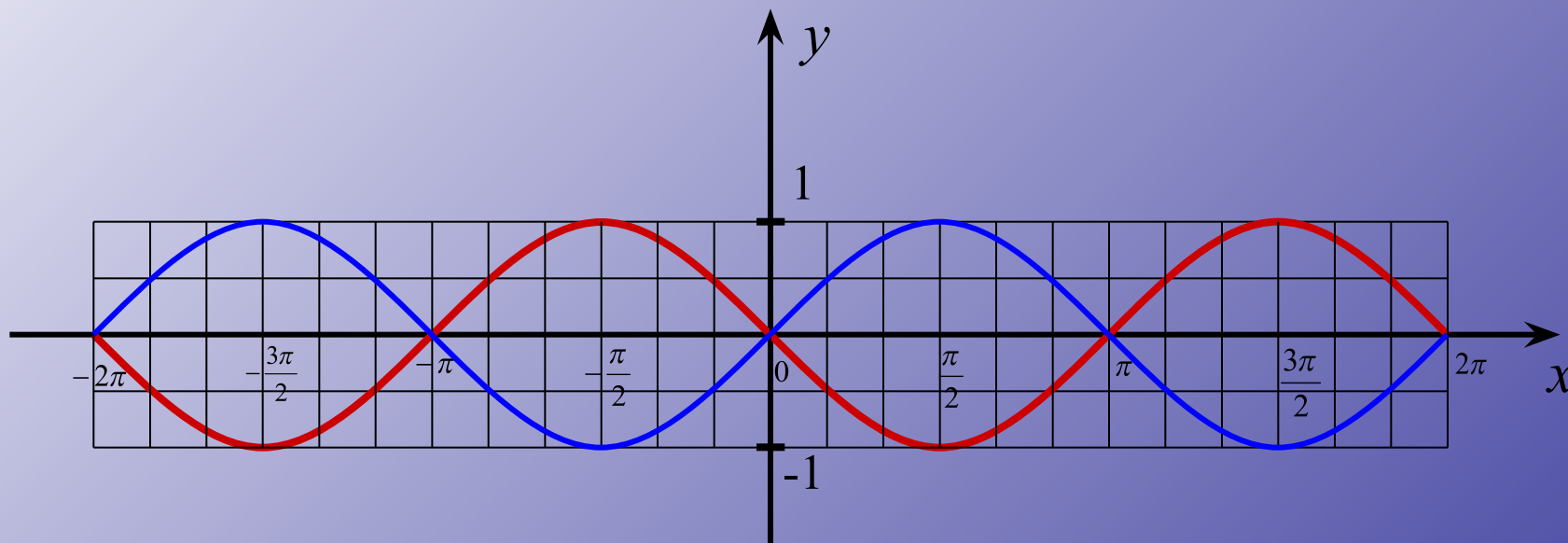
Побудувати графік функції $y = \sin x - 1$



Для побудови графіка функції $y = \sin x - a$
необхідно графік функції $y = \sin x$ здвинути вздовж осі OY на a
одиниць вниз

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

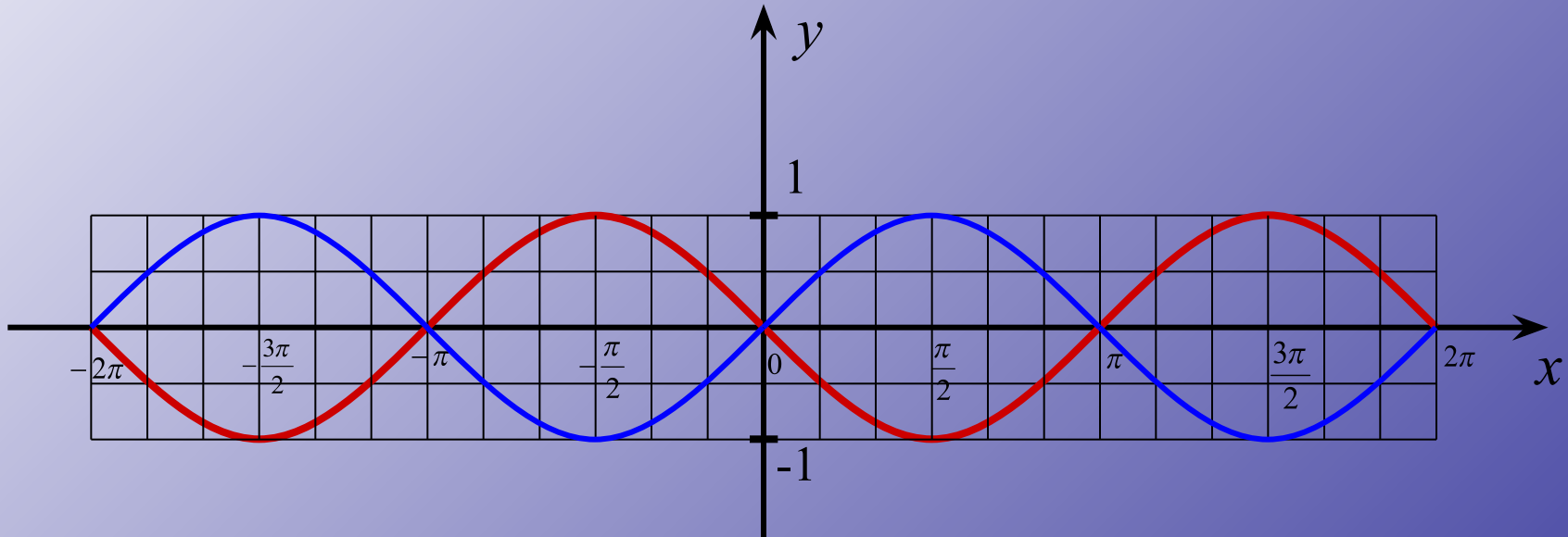
Побудувати графік функції $y = -\sin x$



Для побудови графіка функції $y = -\sin x$
необхідно графік функції $y = \sin x$ відобразити симетрично
відносно осі Ox

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

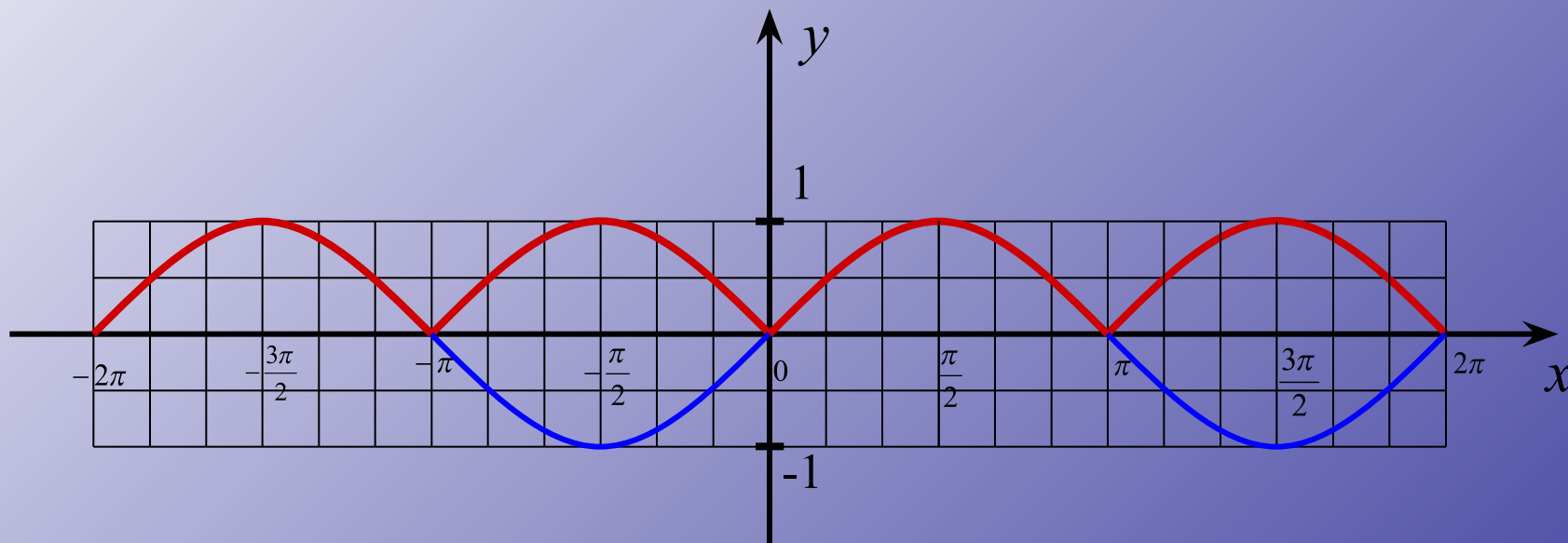
Побудувати графік функції $y = \sin(-x)$



Для побудови графіка функції $y = \sin(-x)$
необхідно графік функції $y = \sin x$ відобразити симетрично
відносно осі OY

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

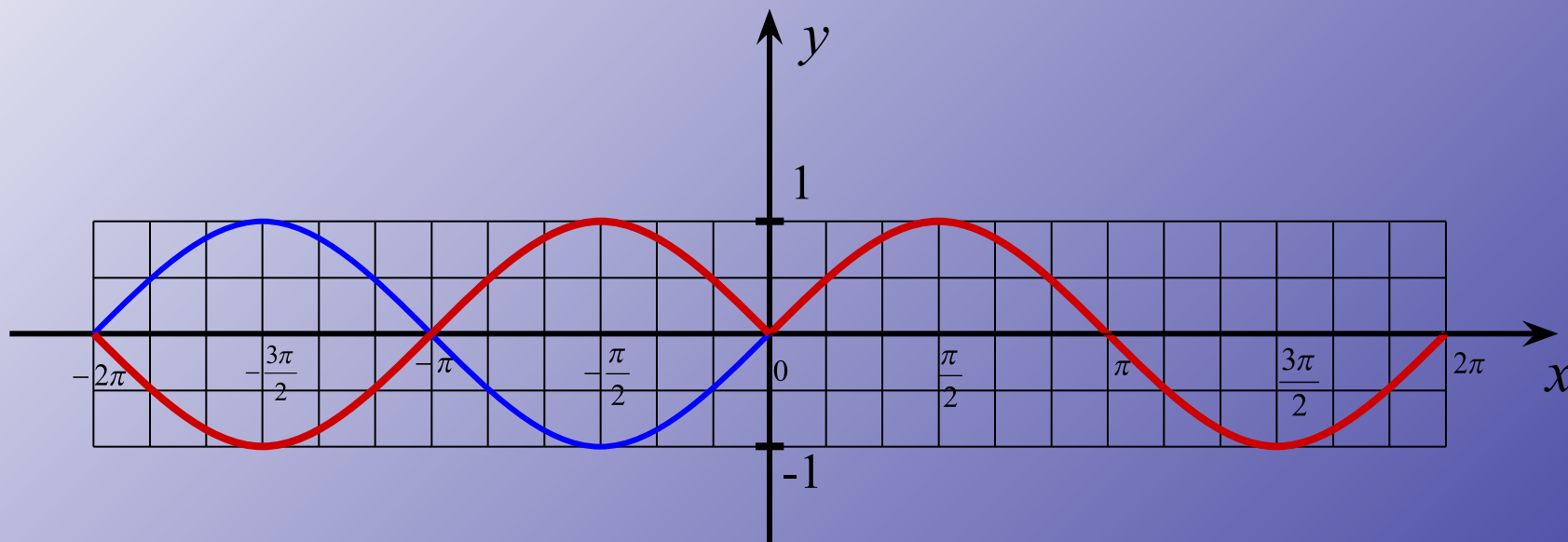
Побудувати графік функції $y = |\sin x|$



Для побудови графіка функції $y = |\sin x|$
необхідно додатну частину графіка функції $y = \sin x$ залишити
незмінною, а від'ємну частину відобразити симетрично відносно
осі **OX**

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

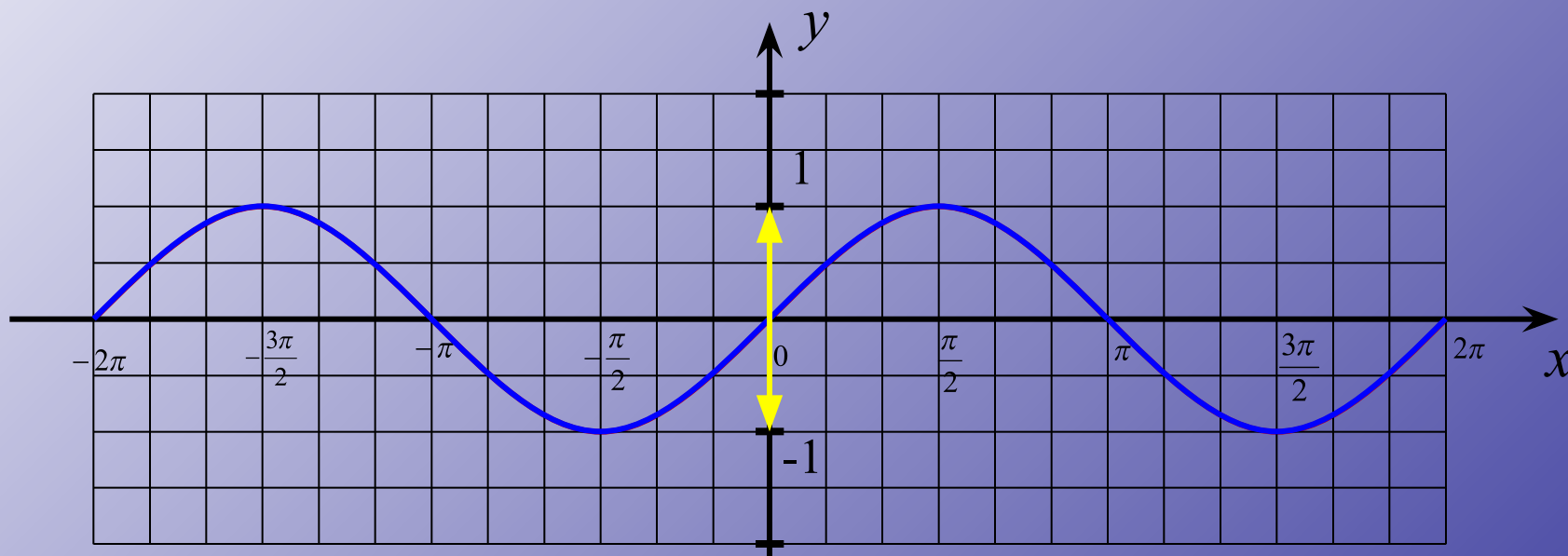
Побудувати графік функції $y = \sin |x|$



Для побудови графіка функції $y = \sin |x|$
необхідно побудувати графік функції $y = \sin x$ при $x \geq 0$, а для $x < 0$
побудувати графік, який буде симетричний для вже побудованого
графіка відносно осі OY

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

Побудувати графік функції $y = 2 \sin x$

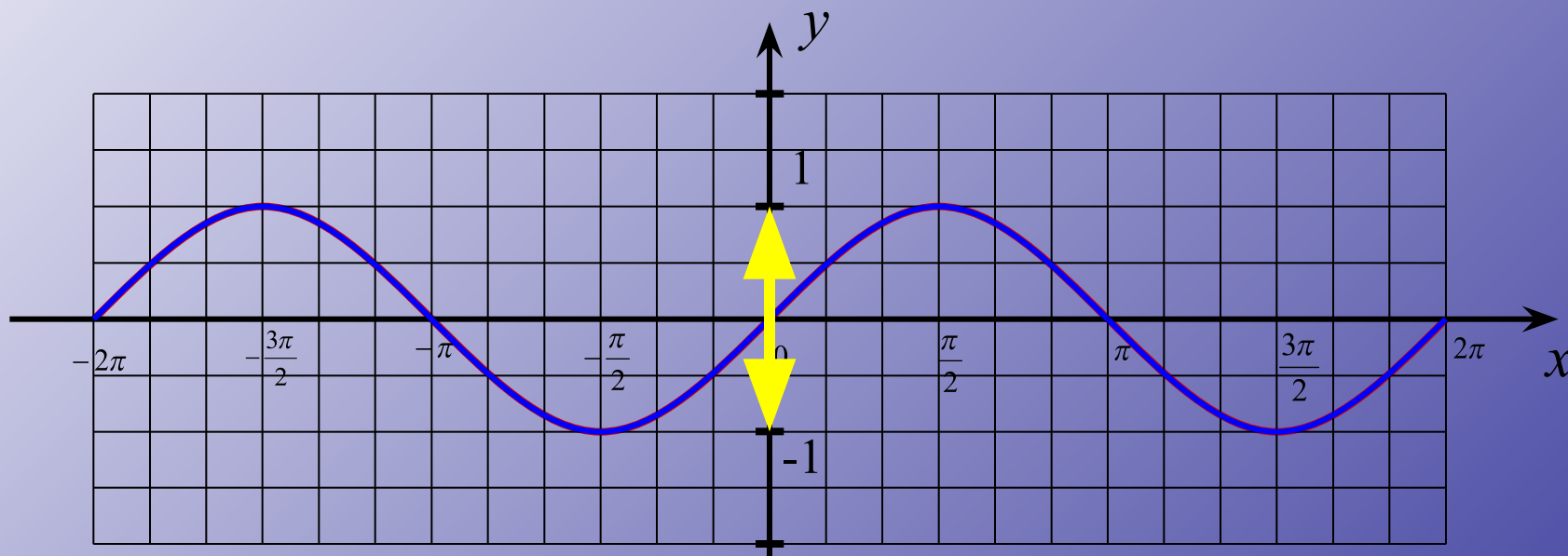


Графік функції $y = k \sin x$

можна дістати з графіка функції $y = \sin x$ за допомогою розтягу його в k разів від осі Ox , якщо $k > 1$, і за допомогою стиснення в k разів до осі Ox , якщо $0 < k < 1$

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

Побудувати графік функції $y = 1/2 \sin x$

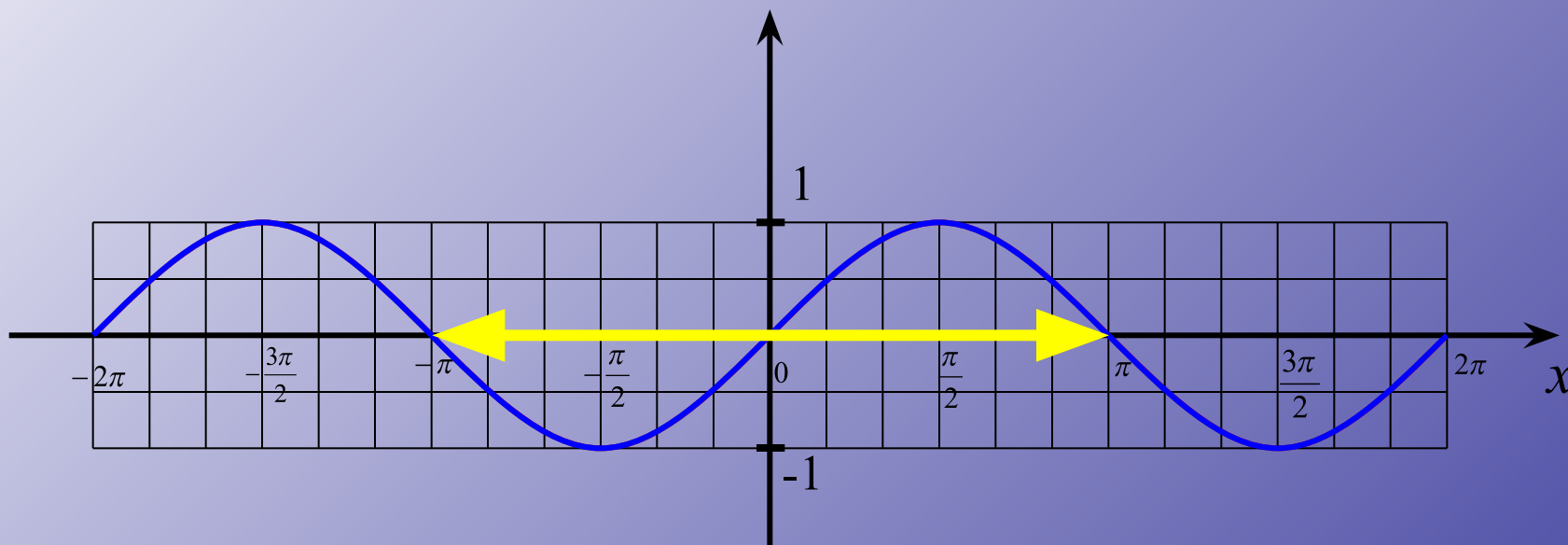


Графік функції $y = k \sin x$

можна дістати з графіка функції $y = \sin x$ за допомогою розтягу його в k разів від осі Ox , якщо $k > 1$, і за допомогою стиснення в k разів до осі Ox , якщо $0 < k < 1$

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

Побудувати графік функції $y = \sin 2x$

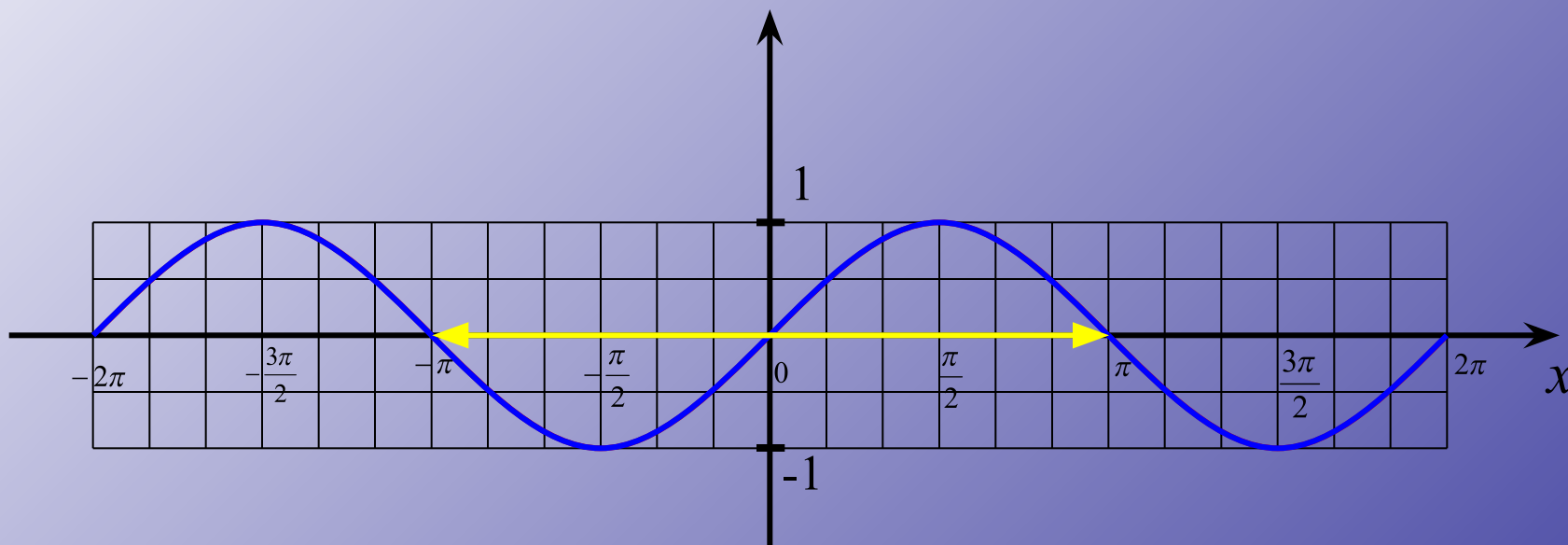


Графік функції $y = \sin kx$

можна дістати з графіка функції $y = \sin x$ за допомогою стиснення його в k разів до осі OY , якщо $k > 1$, і за допомогою розтягу в k разів від осі OY , якщо $0 < k < 1$

Перетворення графіків функції $y = \sin x$

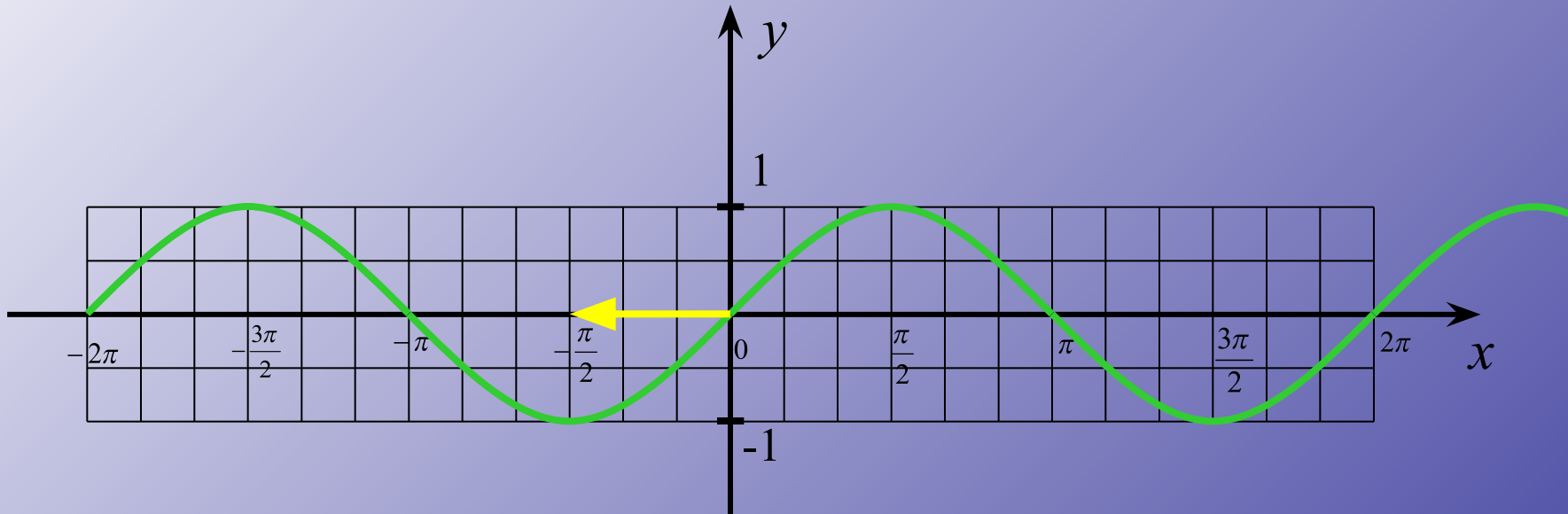
Побудувати графік функції $y = \sin 1/2x$



Графік функції $y = \sin kx$

можна дістати з графіка функції $y = \sin x$ за допомогою стиснення його в k разів до осі OY , якщо $k > 1$, і за допомогою розтягу в k разів від осі OY , якщо $0 < k < 1$

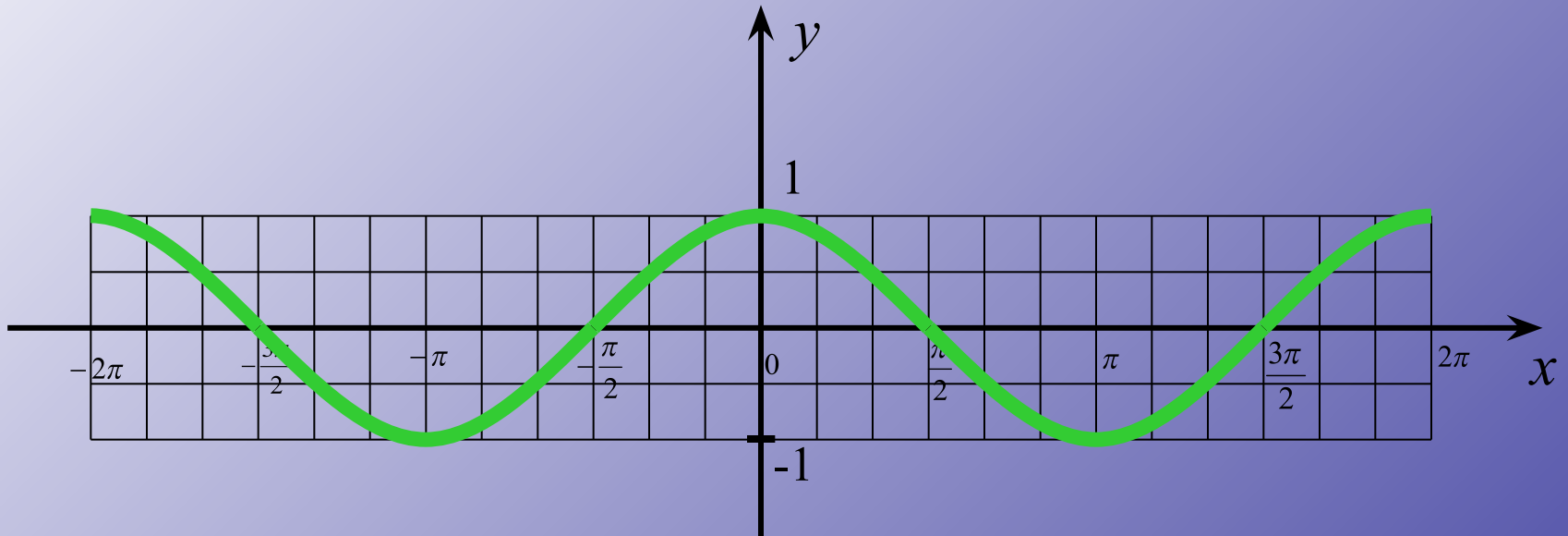
Побудова графіка функції $y = \cos x$



Графік функції $y = \cos x$ одержується перенесенням графіка функції $y = \sin x$ вліво на $\pi/2$.

$$\sin(x + \pi/2) = \sin x \cos \pi/2 + \sin \pi/2 \cos x = \cos x$$

Графік функції $y = \cos x$

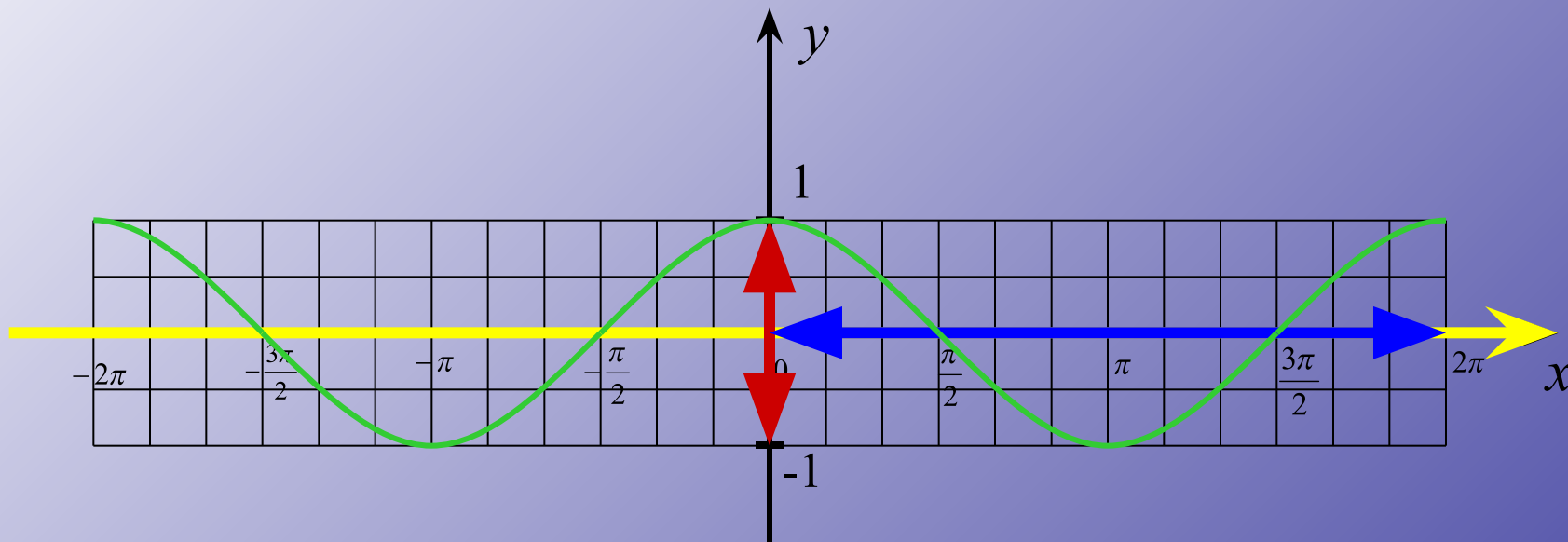


Графіком функції $y = \cos x$

є крива, яка називається

КОСИНУСОЇДА

Властивості функції $y = \cos x$



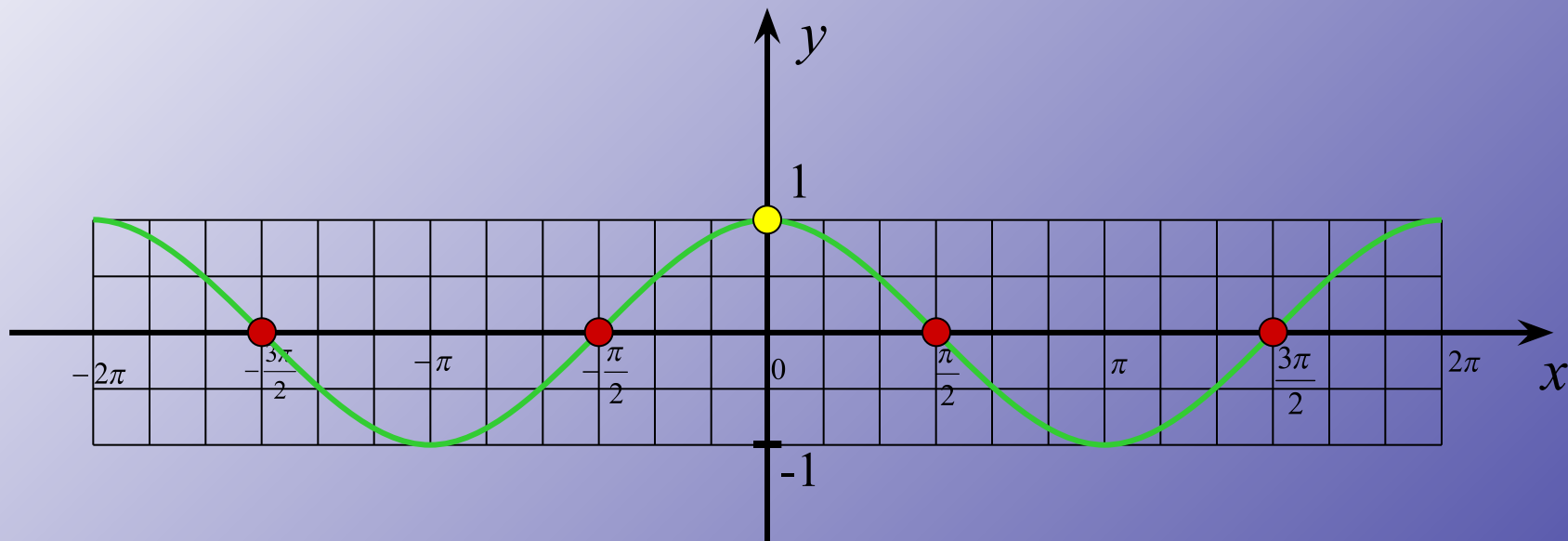
Область визначення $D(\cos x) = \mathbb{R}$

Множина значень $E(\cos x) = [-1; 1]$

Парність або непарність: функція $y = \cos x$ парна $\cos(-x) = \cos x$
(графік функції симетричний відносно осі OY)

Періодичність: функція $y = \cos x$ періодична з найменшим додатнім періодом $T = 2\pi$
 $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Властивості функції $y = \cos x$

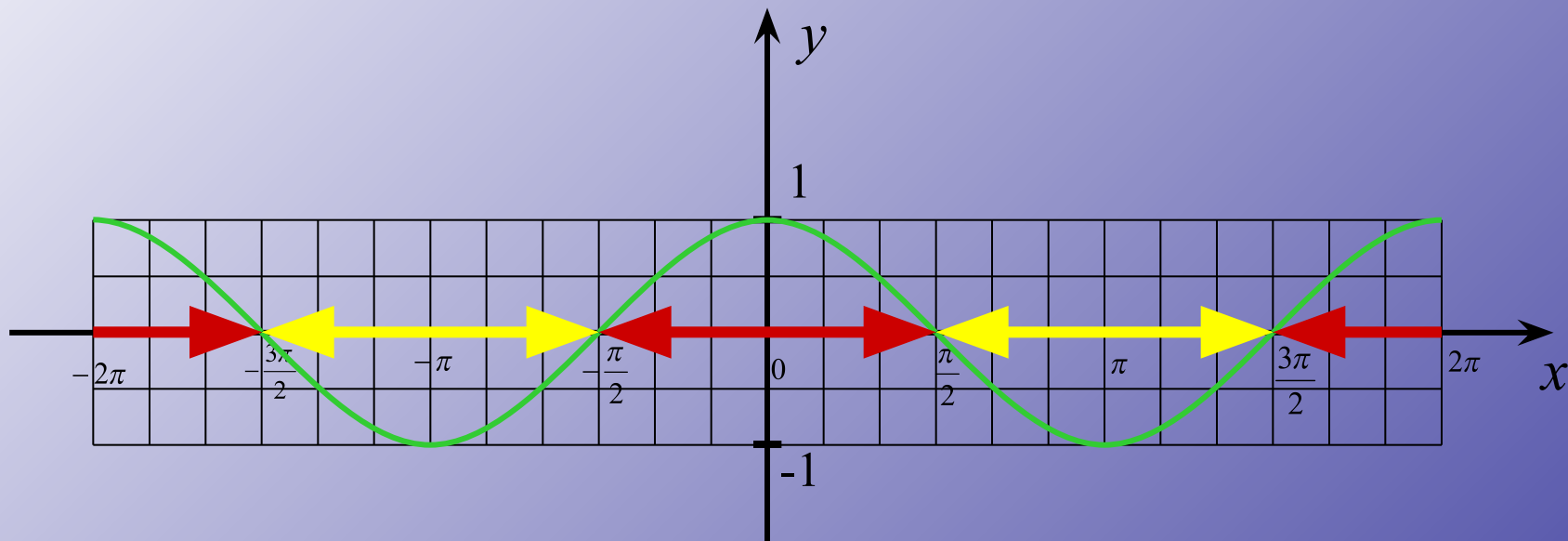


Точки перетину графіка функції $y = \cos x$ з осями координат:

а) з віссю **OX** (нулі функції) $y = 0$, $\cos x = 0$, якщо $x = \pi/2 + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$

б) з віссю **OY** : $f(0) = \cos 0 = 1$ (точка $(0; 1)$)

Властивості функції $y = \cos x$

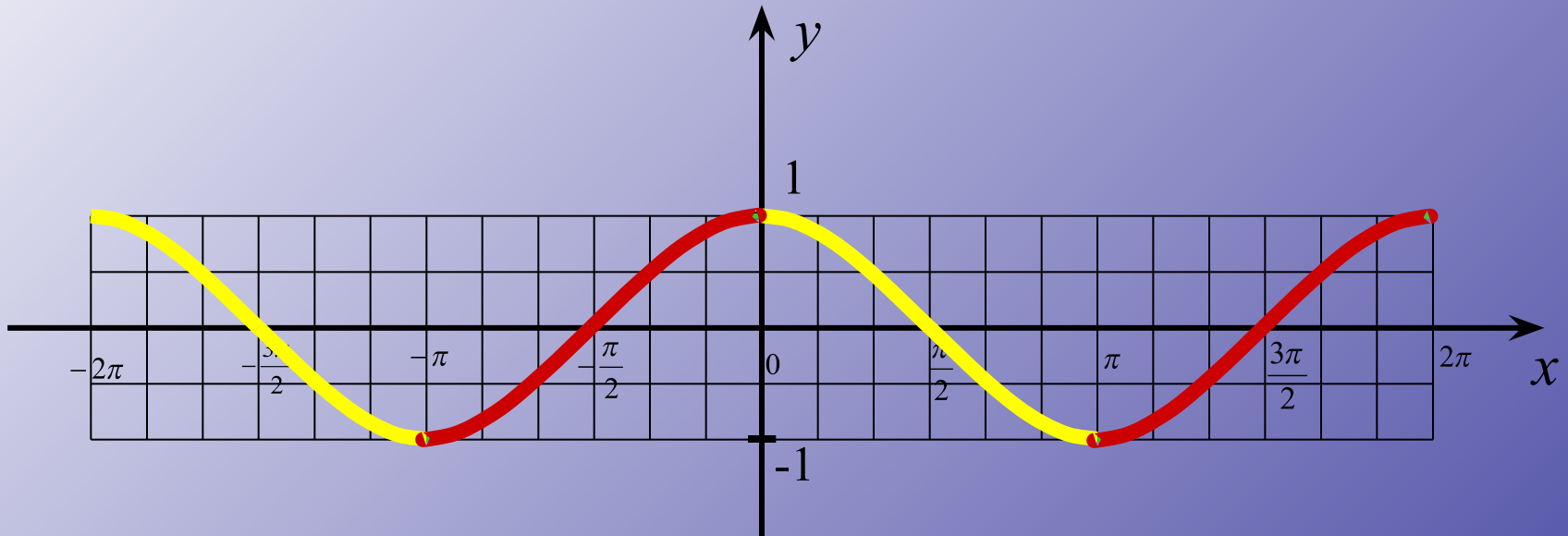


Проміжки знакосталості:

$\cos x > 0$, якщо $x \in (-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$

$\cos x < 0$, якщо $x \in (\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Властивості функції $y = \cos x$



Проміжки монотонності:

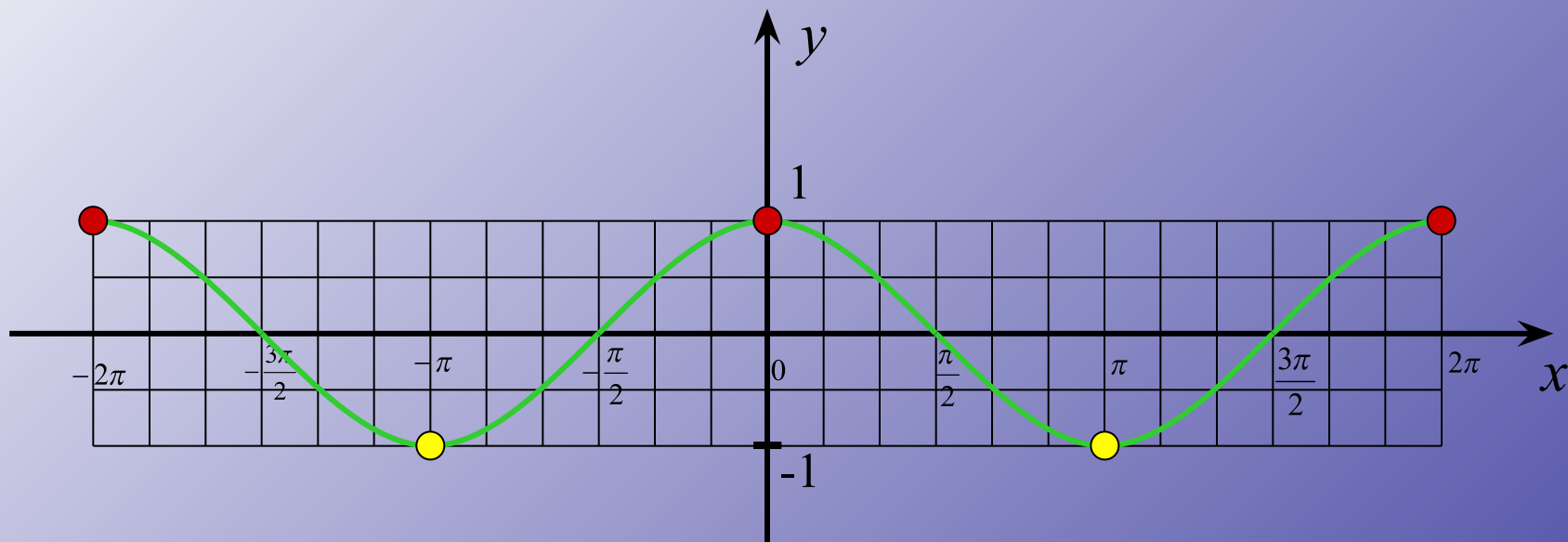
а) функція зростає в кожному з проміжків:

$$x \in [-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

б) функція спадає в кожному з проміжків:

$$x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

Властивості функції $y = \cos x$



Екстремуми функції:

$$X_{\max} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, Y_{\max} = 1$$

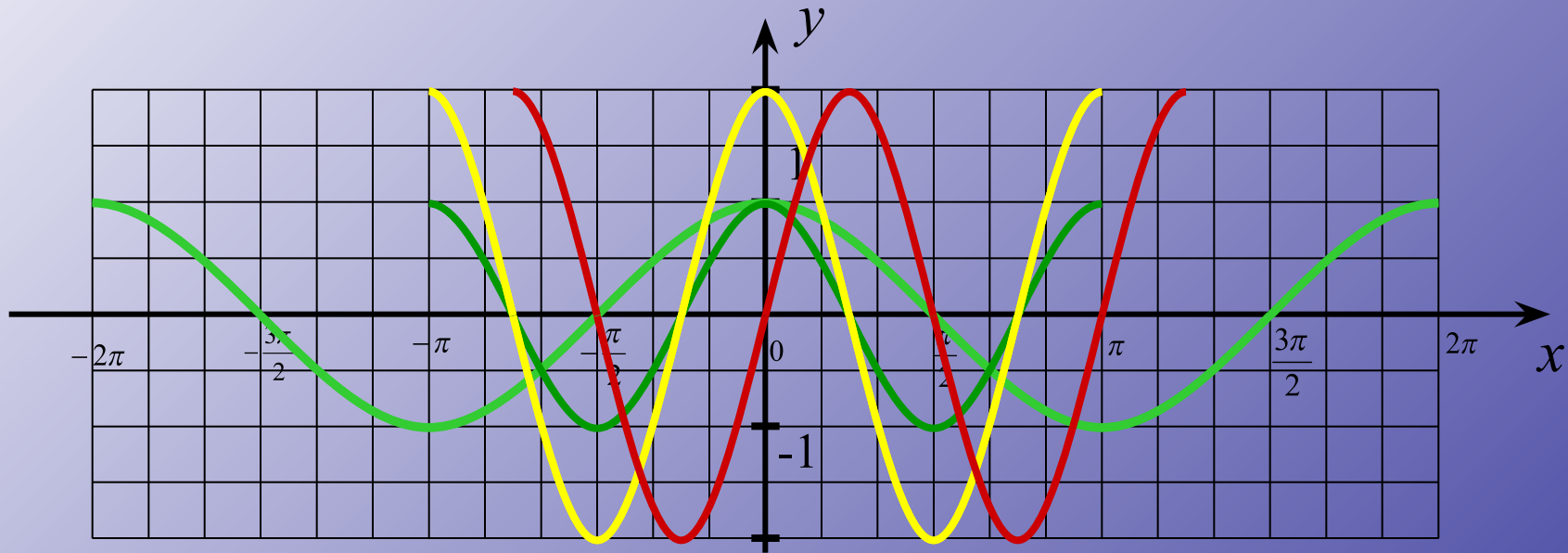
$$X_{\min} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, Y_{\min} = -1$$

Перетворення графіків функції $y = \cos x$

Перетворення графіків функції $y = \cos x$
*відбувається аналогічно перетворенню
графіків функції $y = \sin x$*

Побудувати графік функції $y = 2 \cos (2x - \pi/2)$

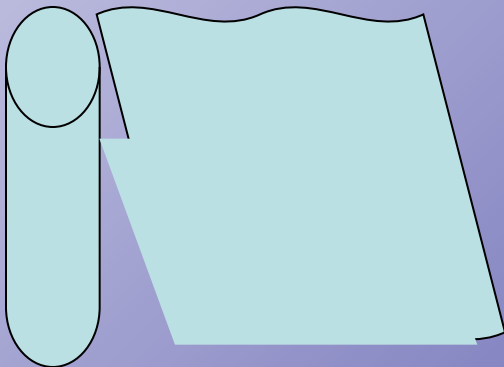
Подамо вираз даної функції у вигляді $y = 2 \cos 2 (x - \pi/4)$



- 1) будуємо графік функції $y = \cos x$
- 2) будуємо графік функції $y = \cos 2x$, стискаючи графік функції $y = \cos x$ у 2 рази до вісі OY
- 3) будуємо графік функції $y = 2 \cos 2x$, розтягуючи графік функції $y = \cos 2x$ у 2 рази від осі OX
- 4) будуємо шуканий графік функції $y = 2 \cos 2 (x - \pi/4)$, паралельно переносячи графік функції $y = 2 \cos 2x$ вправо вздовж осі OX на відстань $\pi/4$

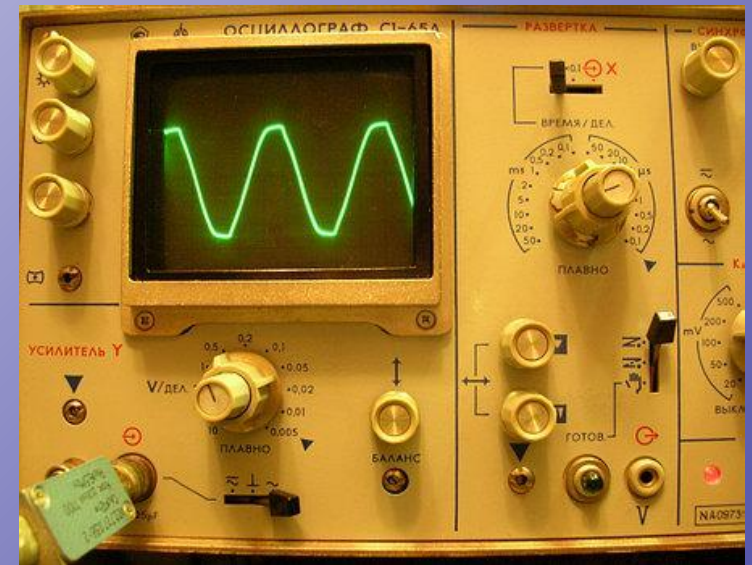
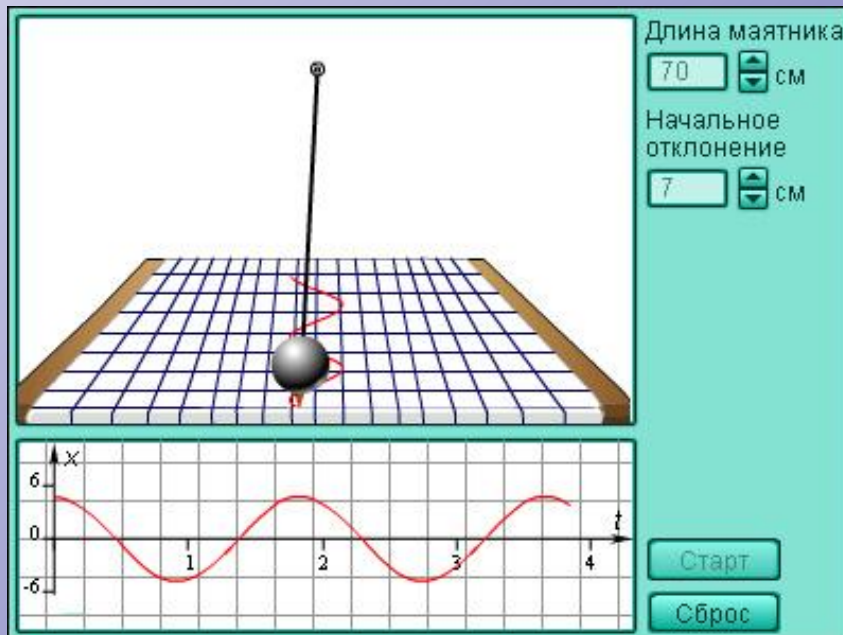
Практичне застосування тригонометричних функцій

Синусоїда – хвилеподібна плоска крива, яка є графіком тригонометричної функції $y = \sin x$ в прямокутній системі координат. Якщо рулон паперу розрізати навскоси і розвернути його, то край паперу виявиться розрізаним по синусоїді. Цікаво, що проекція на площину гвинтової лінії свердла також буде синусоїдою.



Практичне застосування тригонометричних функцій

- Зміна будь-якої величини за законом синуса називається гармонійним коливанням. Приклади таких коливань: коливання маятника, коливання напруги в електричній мережі, зміна струму і напруги в коливальному контурі та ін.



- Ще один приклад синусоїдальних коливань — звук (гармонійне коливання повітря), що відповідає коливанню $y = A \cdot \sin \omega t$