

Законы логики

Название закона	для конъюнкции	для дизъюнкции	для инверсии
Равносильности	$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
	$A \wedge \overline{A} = 0$	$A \vee \overline{A} = 1$	$\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
Исключения констант	$A \wedge 1 = A$	$A \vee 1 = 1$	<p>Отрицание конъюнкции: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$</p> <p>Отрицание дизъюнкции: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$</p>
Переместительный	$A \wedge 0 = 0$	$A \vee 0 = A$	
ый	$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$	
Сочетательный	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	
Распределительный	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	

Название	Для конъюнкции	Для дизъюнкции
Правило поглощения	$A \wedge (B \vee A) = A$	$A \vee (B \wedge A) = A$
Правило свёртки	$A \wedge (B \vee \bar{A}) = A \wedge B$	$A \vee (B \wedge \bar{A}) = A \vee B$
Правило склеивания	$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$
Правило расширения	$\frac{(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee C)}{(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C)} = \bar{B \vee C}$	$\frac{(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge C)} = \bar{B \wedge C}$

Минимизация логических выражений (функций)

Упражнения

1. Найдите значения выражений:

$$A) (1 \vee 1) \vee (1 \vee 0) = 1$$

$$Б) (A \vee 1) \vee (b \vee 0) = 1$$

$$B) (0 \& 1) \& 1 = 0$$

$$Г) ((1 \& A) \vee (B \& 0)) \vee 1 = 1$$

2. Вычислите:

$$A) 1 \vee x \& 0 = 1$$

$$Б) x \& x \& 1 = x$$

$$B) 0 \& x \vee 0 = 0$$

$$Г) 0 \vee x \& x = x$$

- **Минимизация** – это приведение логического выражения к кратчайшей форме, когда количество переменных и логических операций в выражении становится минимальным.

3. Найдите x, если

$$\overline{(x \vee a)} \vee \overline{(x \vee \overline{a})} = b$$

$$x = \overline{b}$$

4. Путём преобразований докажите равносильность следующих высказываний:

$$A) \overline{(a \& \overline{b})} \vee \overline{(b \& \overline{c})} \quad \text{и} \quad \overline{(a \& \overline{b})} \vee \overline{(\overline{a} \& c)} \vee (b \& c)$$

$$B) (a \& b) \vee \overline{(\overline{a} \& c)} \quad \text{и} \quad (a \& b) \vee a \vee \overline{c}$$

Решение примеров на минимизацию логических выражений и функций

$$1. (A + \neg B)(\neg A + B) A B = A B$$

$$2. A + A (B + \neg(A \neg(BC))) \neg(A C) = A$$

$$3. (\neg(A B) + \neg B C) (\neg A C + A + \neg C) = \neg(A B)$$

$$4. \neg(x \vee a) \vee \neg(x \vee \neg a) = \neg x$$

$$5. (ab \neg c) \vee abc \vee ab = ab$$

$$6. \neg(\neg x \vee \neg y) \vee \neg x \neg(x \vee \neg(\neg x \vee y)) = \neg x + y$$

Логическое следование(импликация)

Логическое следование(импликация) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «**если..., то...**».

Пример: P = Если число делится на 9, то оно делится на 3

Обозначение импликации: $A \rightarrow B$; $A \Rightarrow B$

Говорят: если A, то B; A имплицирует B; A влечет B; B следует из A

Таблица истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное (когда истинная предпосылка ведет к ложному выводу).

Операцию импликации можно заменить базовыми логическими операциями:

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

ЕГЭ 2006

A9

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание:

$$(X > 4) \vee ((X > 1) \Rightarrow X > 4)?$$

1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg (\neg A \vee B) \vee \neg C?$$

1) $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$ 2) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 3) $A \vee \neg B \vee \neg C$
4) $(\neg A \wedge B) \vee \neg C$

A11

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z .

Дан фрагмент таблицы истинности :

Какое выражение соответствует F ?

1) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$ 2) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ 3) $X \vee Y \vee Z$
4) $X \wedge Y \wedge Z$

X	Y	Z	F
0	0	0	0
1	1	0	1
1	0	0	1

ЕГЭ 2007

A9

Для какого числа X истинно высказывание

$$((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению $\neg (A \wedge B) \wedge \neg C$?

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$ 3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$ 4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

A11

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z .

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F :

Какое выражение соответствует F ?

1) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$ 2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$ 3) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$ 4) $X \vee \neg Y \vee Z$

X	Y	Z	F
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0

Решение логических задач

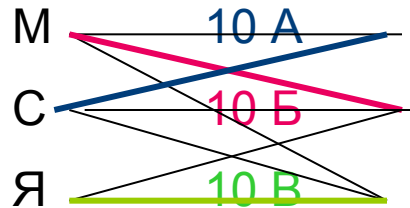
1. с помощью графов

Задача 1. В шашечном турнире каждый из ребят – Миша, Серёжа и Яша – защищал честь своего класса. Один из них учится в 10 А, другой – в 10 Б, третий - в 10 В классе. Первую партию играл Миша и ученик 10 А класса. Вторую – Серёжа с учеником 10 В класса, а Миша отдыхал. Кто за какой класс играл?

Дано:

Миша (М)
Серёжа (С)
Яша (Я)
Классы
10 А
10 Б
10 В

Рассуждения:



Ответ: Серёжа играл за 10 А класс,

Миша – за 10 Б класс,

Яша – за 10 В класс.

Надо:

Кто за какой класс играл?

Задача 2. Перед началом Турнира Четырёх болельщики высказали следующие предположения по поводу своих кумиров:

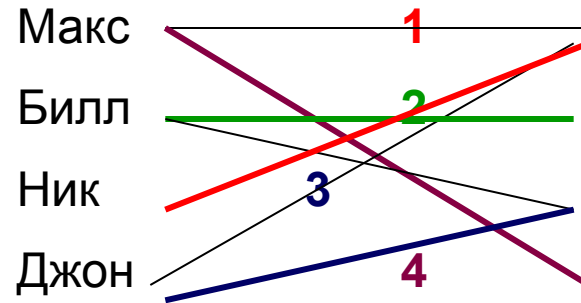
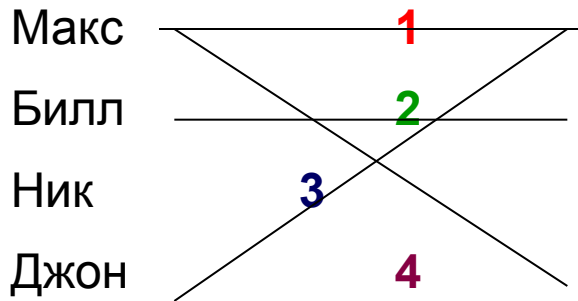
- А) Макс победит, Билл – второй;
- В) Билл – третий, Ник – первый;
- С) Макс – последний, а первый – Джон.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов.

Какое место на турнире заняли Джон, Ник, Билл, Макс?

(В ответе перечислите подряд без пробелов места участников в указанном порядке имён.)

Решение:



Противоречие!

Макс – 4

Билл – 2

Ник – 1

Джон - 3

Ответ:

3 1 2 4

Задача 3. В начале лета школьники организовали сельскохозяйственную бригаду и избрали бригадира, заместителя бригадира и звеньевых первого, второго и третьего звеньев. Их имена: Аня, Боря, Вася, Гриша и Дина. Звеньевая первого звена решила подружиться со звеньевой второго звена. Дина удивилась, узнав, что бригадир и звеньевая второго звена – брат и сестра. Гриша дружит с бригадиром и его заместителем. У Васи нет сестёр. Назовите должности каждого из ребят.

Ответ: Аня – звеньевая 2 звена

Боря - бригадир

Вася – заместитель бригадира

Гриша - звеньевой 3 звена

Дина - звеньевая 1 звена

2. с помощью таблиц

Задача 4. Корнеев, Докшин, Мареев и Скобелев – жители нашего города. Их профессии – пекарь, врач, инженер и милиционер.

Известно, что:

1. Корнеев и Докшин – соседи и всегда на работу ездят вместе;
2. Докшин старше Мареева;
3. Корнеев регулярно обыгрывает Скобелева в настольный теннис;
4. Пекарь на работу всегда ходит пешком;
5. Милиционер живёт не рядом с врачом;
6. Инженер и милиционер встречались один раз, когда милиционер оштрафовал инженера за нарушение правил уличного движения;
7. Милиционер старше врача и инженера.

Определите, кто чем занимается.

Профессия	Фамилия			
	Корнеев	Докшин	Мареев	Скобелев
Пекарь	-	-	+	-
Врач	+	-	-	-
Инженер	-	+	-	-
Милиционер	-	-	-	+

Задача 5. Дина, Соня, Коля, Рома и Маша учатся в институте. Их фамилии: Бойченко, Карпенко, Лысенко, Савченко и Шевченко.

Известно, что:

1. У Ромы нет матери.
 2. Родители Дины никогда не видели родителей Коли.
 3. Студенту Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде.
 4. Услышав, что родители Карпенко собираются за город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле.
 5. Родители Лысенко – хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо очень довольны, что их дети собираются пожениться.
- Установите имя и фамилию каждого из студентов.

Ответ: Дина Шевченко, Соня Бойченко, Коля Лысенко, Рома Савченко, Миша Карпенко.