Механические колебания и волны

Колебания и волны

Колебание	процесс изменения состояний системы, повторяющийся в той или иной степени во времени
Волна	процесс распространения колебаний в среде
	явление распространения возмущения физической величины в пространстве с течением времени

Колебательные явления различной физической природы подчиняются общим закономерностям ⇒ описываются одинаковыми уравнениям

Механические колебания — движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени

Закон движения тела, совершающего колебания

$x = f(t)$

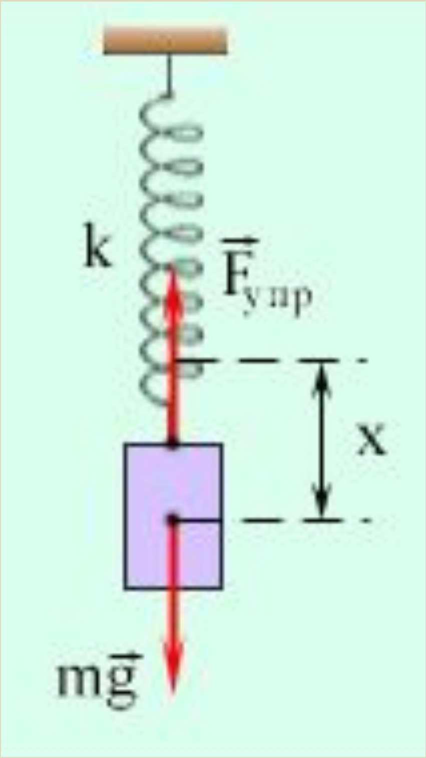
некоторая периодическая функция времени

Графическое изображение этой функции

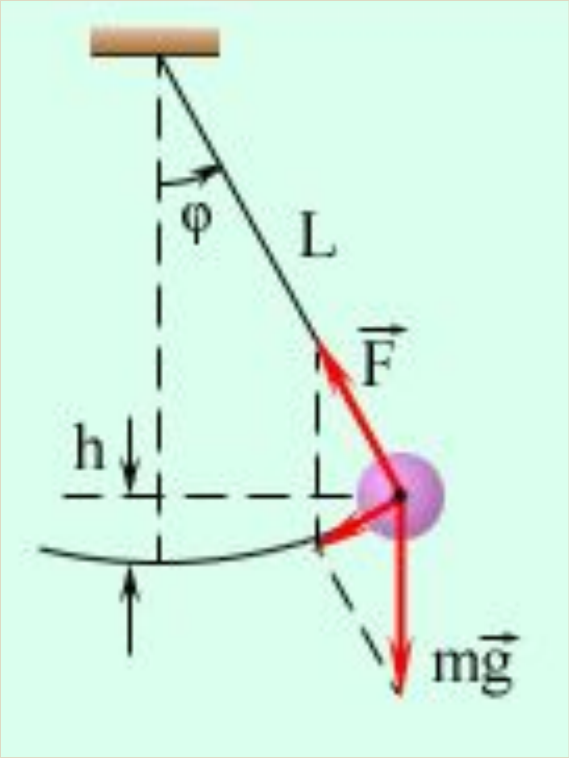
наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени

Механические колебательные системы

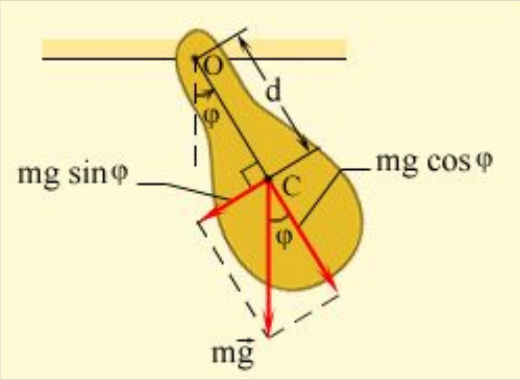
Примеры простых механических колебательных систем



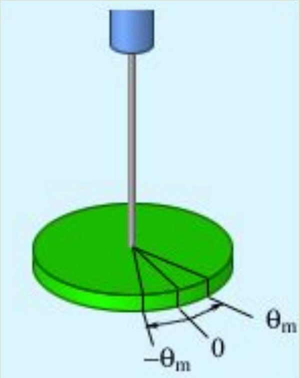
**Пружинный маятник –
груз на пружине**



Математический маятник – груз на нерастяжимой нити



Физический маятник



Крутильный маятник

Типология колебания

Физическая природа колебаний

- **Механические**
  - **упругие** (например, **звуковые**)
  - **поверхностные (под действием $F_{тяж}$ и поверхностного натяжения)**
- **Электромагнитные**
- **…**

Свободные

Вынужденные

Автоколебания

происходят под действием

внутренних сил системы, после того, как она была выведена из состояния равновесия

внешних периодически изменяющихся сил

- **колебательная система**
- **источник энергии**
- **устройство обратной связи между колебательной системой и источником**

Затухающие

Незатухающие

Гармонические

по закону sin (cos)

Гармонические колебания

Колебания, совершающиеся по закону sin или cos

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

фаза колебаний $\varphi = \omega t + \varphi_0$

смещение тела от положения равновесия в момент времени ***t***

амплитуда колебаний (max смещение тела от положения равновесия)

циклическая (круговая) частота колебаний

время

начальная фаза колебаний (при t=0)

Рассмотрение гармонических колебаний важно т.к.:

1. **колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому**
2. **различные периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний**

Характеристики колебательного движения

x Смещение тела от положения равновесия

x_m A **Амплитуда колебаний** максимальное смещение тела от положения равновесия

ω Циклическая (круговая) частота колебаний

t Время колебаний

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ **Фаза колебаний** $\omega(t+T)+\varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi$

φ_0 Начальная фаза колебаний (при t=0)

T **Период колебаний** **время**, в течение которого происходит **одно полное колебание**

фаза колебания получает приращение 2п

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

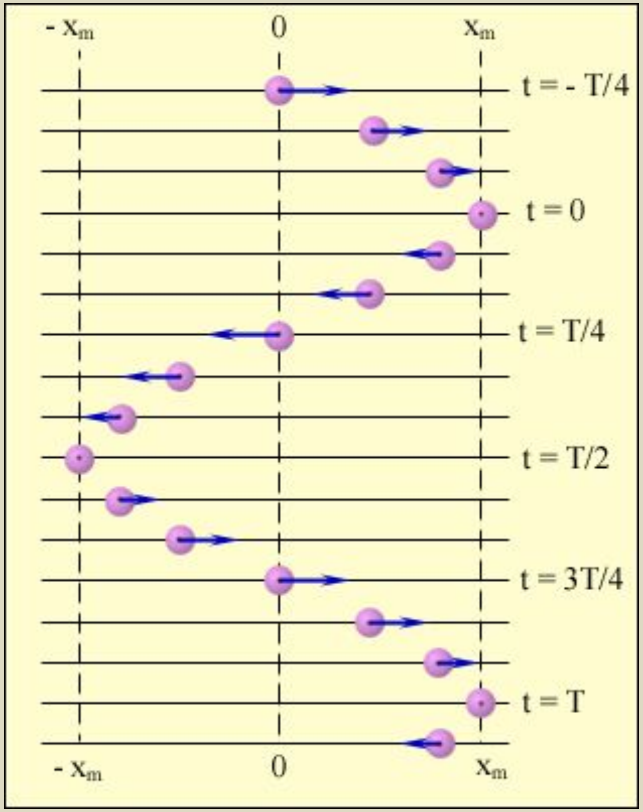
[T]=c [ν]=c^{-1}=Гц

ν **Частота колебаний** количество колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

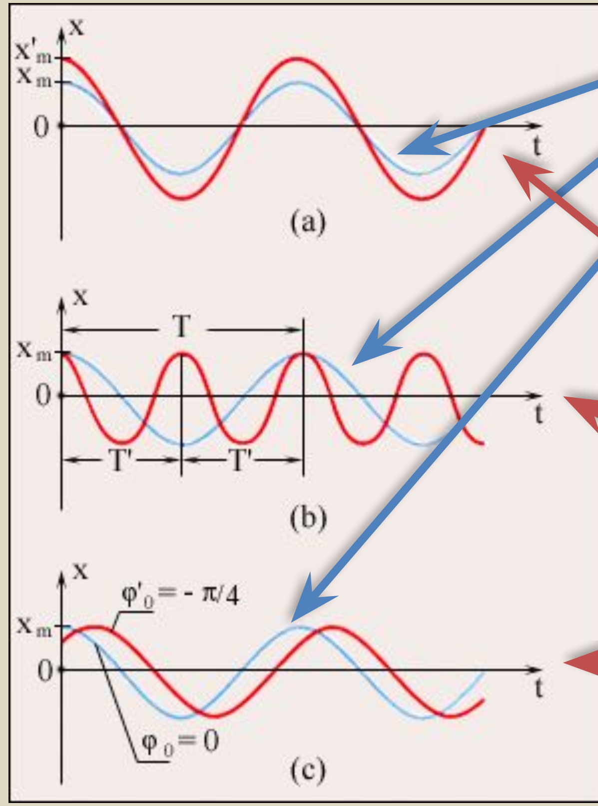
$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

График гармонического колебания



Стробоскопическое изображение гармонических колебаний

Интервал времени между последовательными положениями тела $\tau = T / 12$



$\varphi_0 = 0$

Графики отличаются:

амплитудой

периодом

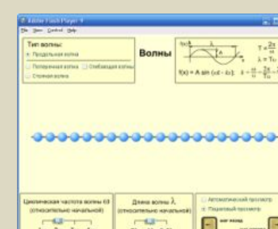
начальной фазой

Вектор скорости направлен всегда вдоль OX

$$\vec{\upsilon}$$

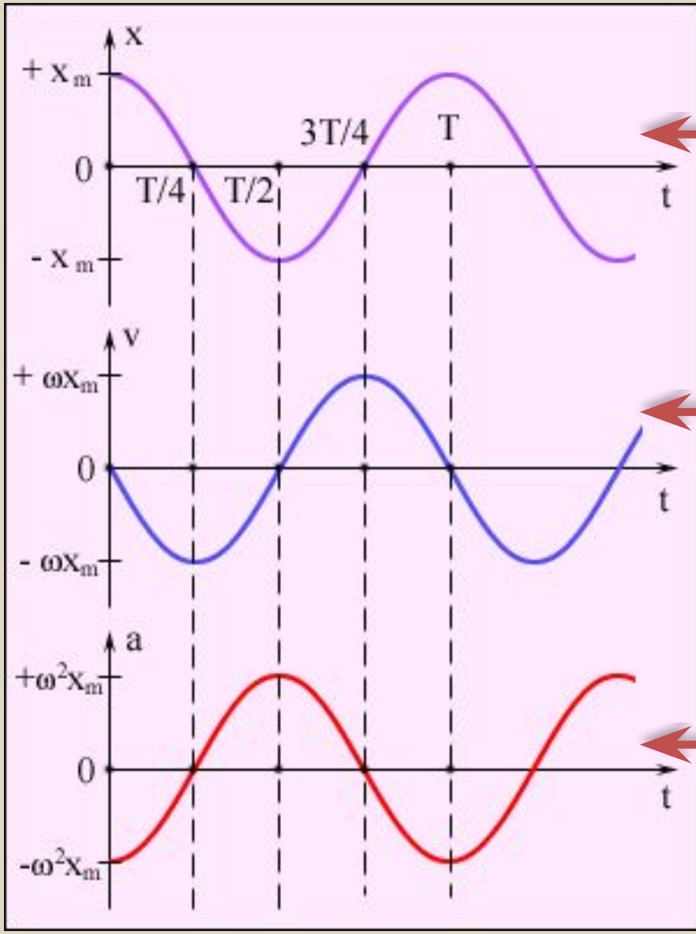
$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta t \to 0$$



Графики гармонического колебания

Графики для тела, совершающего гармонические колебания



координаты x(t)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

скорости u(t) **u(t)= x′(t)**

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

ускорения a(t) **a(t)= u′(t)= x′′(t)**

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Знак «-»:

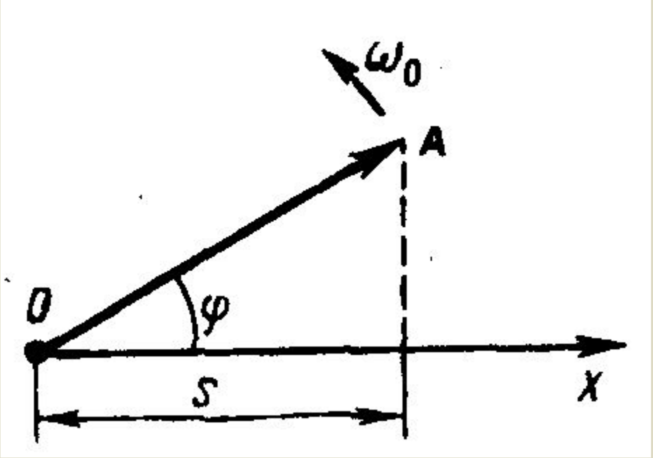
ускорение всегда имеет знак, ↑↓ знаку смещения x(t)

⇨

сила, заставляющая тело совершать гармонические колебания, **направлена всегда в сторону положения равновесия**

Метод векторных диаграмм

или **Метод вращающегося вектора амплитуды**



Из произвольной т. О, выбранной на оси *x*, под углом ϕ, = начальной фазе колебания, **откладывается вектор *A***

Если вектор *A* привести во вращение с угловой скоростью ω (= циклической частоте колебаний), **то проекция конца вектора *A* будет** перемещаться по оси *x* и **принимать значения от –A до +A, а колеблющаяся величина** будет изменяться со временем по закону **s=A cos (ωt+ϕ)**

⇒ **гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды A, отложенного из произвольной точки оси под углом ϕ, равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω вокруг этой точки**

Свободные колебания

Чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходима

сила F	**стремящаяся возвратить тело в положение равновесия**
	пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний
	направленная в сторону, ↑↓ смещению

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x$$

Таким свойством обладает **упругая сила в пределах применимости закона Гука**

$$F_{упр} = -kx$$

Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию

Квазиупругие

Энергия колебаний

Материальная точка, совершающая прямолинейные гармонические колебания, обладает энергией

Кинетическая энергия

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Pi = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

Полная энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega^2}{2} = const$$

Закон сохранения энергии

Гармонический осциллятор

Гармонический осциллятор	Система, совершающая колебания, описывающиеся уравнением вида

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = 0}$$

ω_0 – собственная частота колебаний

Колебания гармонического осциллятора –

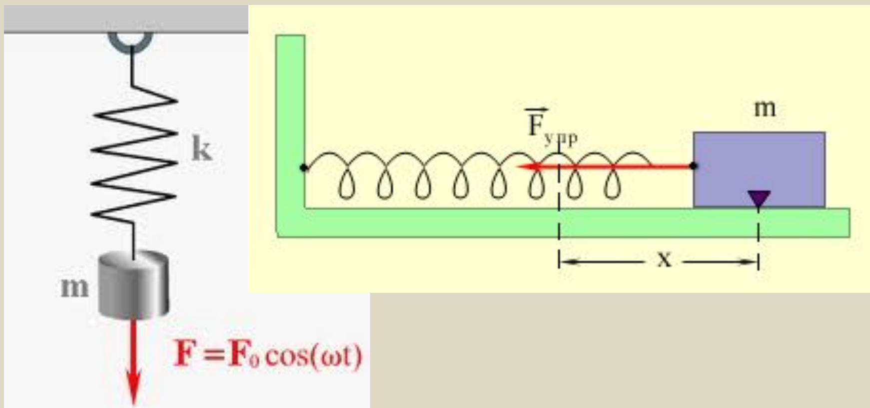
- **важный пример периодического движения**
- **служат** точной или приближенной **моделью во многих задачах классической и квантовой физики**

Примеры гармонического осциллятора:

- **пружинный маятник**
- **физический маятник**
- **математический маятник**
- **колебательный контур**
- **…**

Пружинный маятник

Груз массой m, прикрепленный **к пружине жесткости k**



При горизонтальном расположении (груз скользит по поверхности)

Колебания происходят под действием упругой силы

$$F_{упр} = ma = -kx = m\omega_0{}^2 x$$

Круговая частота ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$F_{тяж}$ компенсируется силой реакции опоры

При вертикальном расположении (груз висит на пружине)

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

$F_{тяж}$ направлена по линии движения груза

В положении равновесия пружина растянута на x_0

Период гармонических колебаний груза на пружине

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Границы применимости:

масса пружины мала по сравнению с массой тела

Потенциальная энергия

$$П = \frac{kx^2}{2}$$

Физический маятник

Твердое тело, совершающее под действием $F_{тяж}$ колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через т.О, НЕ совпадающую с центром масс С тела

по уравнению динамики вращательного движения твердого тела:

$$\boxed{M = J\varepsilon = J\alpha'' = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha}$$

Знак «-»:

направления Fт и α всегда ↑↓

M **– момент возвращающей силы**

J **– момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса**

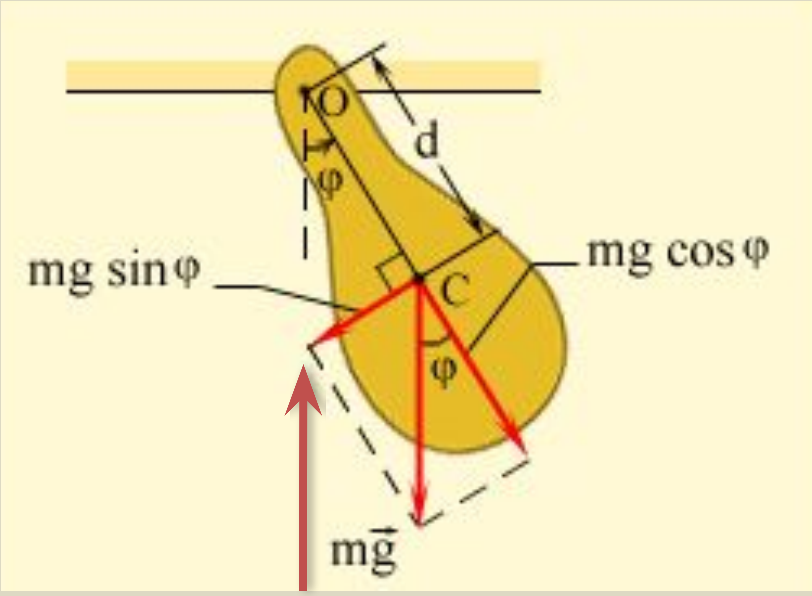
Для малых углов

$$\boxed{J\varphi'' + mgl\varphi = 0} \rightarrow \boxed{\varphi'' + \frac{mgl}{J}\varphi = 0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{mgl}{J}} \rightarrow \boxed{\alpha'' + \omega_0\alpha = 0}$$

решение:

$$\boxed{\alpha = \alpha_0\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$



возвращающая сила

Физический маятник

Круговая частота ω_0

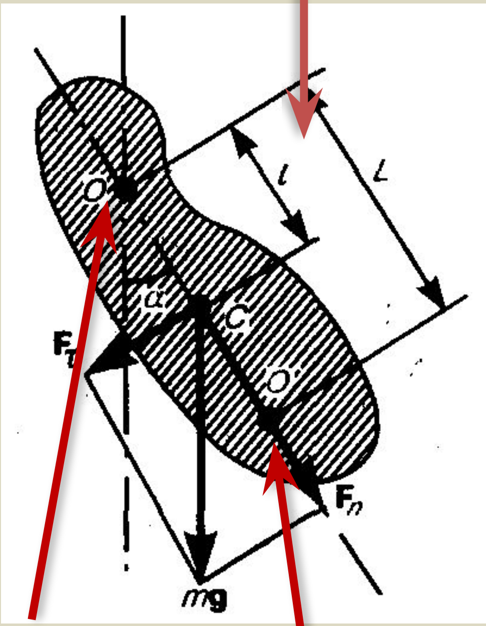
$$\omega_0 = \frac{mgl}{J}$$

$$L = \frac{J}{ml}$$

приведенная длина физического маятника

Период колебаний T

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



точка подвеса

центр качания

Центр качаний физического маятника

т.О' на продолжении прямой ОС, отстоящая **от т. О подвеса маятника на расстоянии приведенной длины *L***

по теореме Штейнера:

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = l + \frac{J_C}{ml} > l \quad \Rightarrow \quad OO' > OC$$

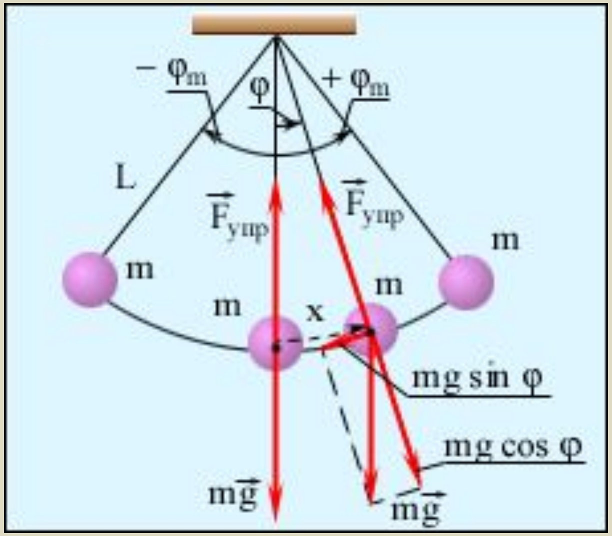
всегда

точка подвеса О и центр качаний О′ взаимозаменяемы:

если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка О подвеса станет новым центром качаний, и T=const

Математический маятник

Материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, колеблющаяся под действием $F_{тяж}$



Идеализированная система !

Момент инерции $J = mL^2$

В положении равновесия (маятник висит по отвесу), **сила тяжести** **уравновешивается силой натяжения нити**

$$\vec{F}_m = m\vec{g}$$

$$\vec{F}_{упр}$$

Линейное смещение маятника x

Угловое смещение маятника $\varphi = \frac{x}{l}$

При отклонении маятника из положения равновесия на φ появляется касательная составляющая F_m

$$F_m = -mg\sin\varphi$$

Знак «-»: касательная составляющая ↑↓ отклонению маятника

По II з-ну Ньютона:

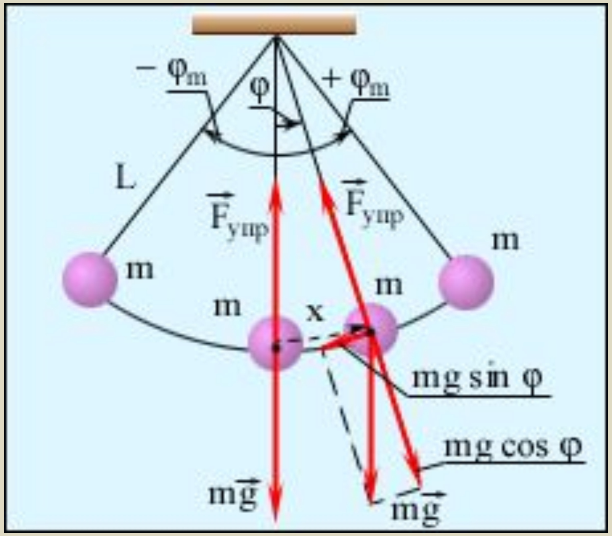
для проекций векторов ***a*** и ***F*** на направление касательной

$$ma_\tau = F_\tau = -mg\sin\frac{x}{l}$$

математический маятник представляет собой сложную нелинейную систему

Математический маятник

Колебания математического маятника при больших амплитудах НЕ являются гармоническими **!**



для малых колебаний II з-н Ньютона

$$ma_\tau = -m\frac{g}{l}x$$

Круговая частота ω_0

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период колебаний T

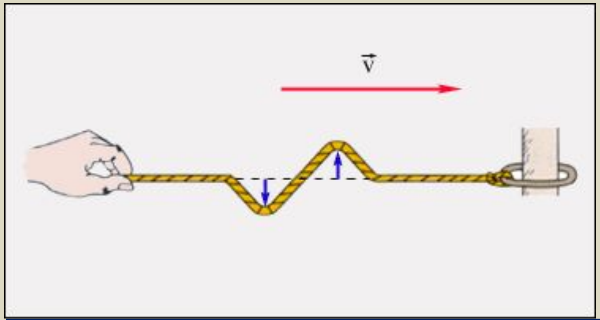
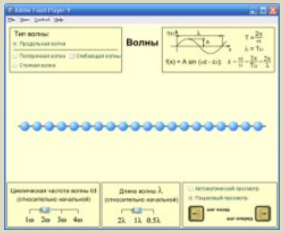
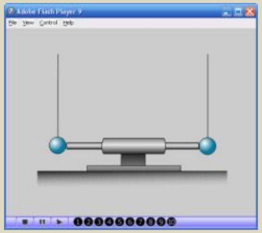
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Волны

Волна	процесс распространение колебаний в среде
	всякие возмущения состояния вещества или поля, распространяющиеся в пространстве с течением времени

Основное свойство волны: перенос энергии без переноса вещества

Поперечные волны	Продольные
смещение частиц среды – ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО распространению волны	смещение частиц среды – ПО НАПРАВЛЕНИЮ распространения волны


сопровождается изменением плотности

Механические	Электромагнитные
распространяются в средах – Т, Ж, Г	распространяются в средах – Т, Ж, Г + В

Волны в среде

Волновая поверхность	**геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе**
Волновой фронт (фронт волны)	**геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени**
Луч	**линия, ⊥ волновой поверхности. Показывает направление распространения волны (переноса энергии**

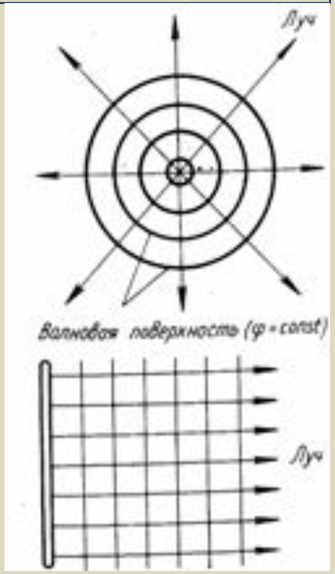
По виду волновой поверхности волны бывают

сферические

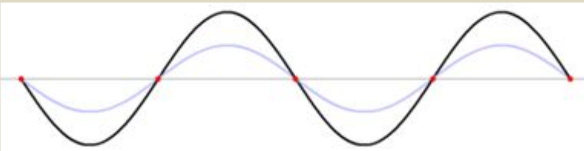
источник БЛИЗКО

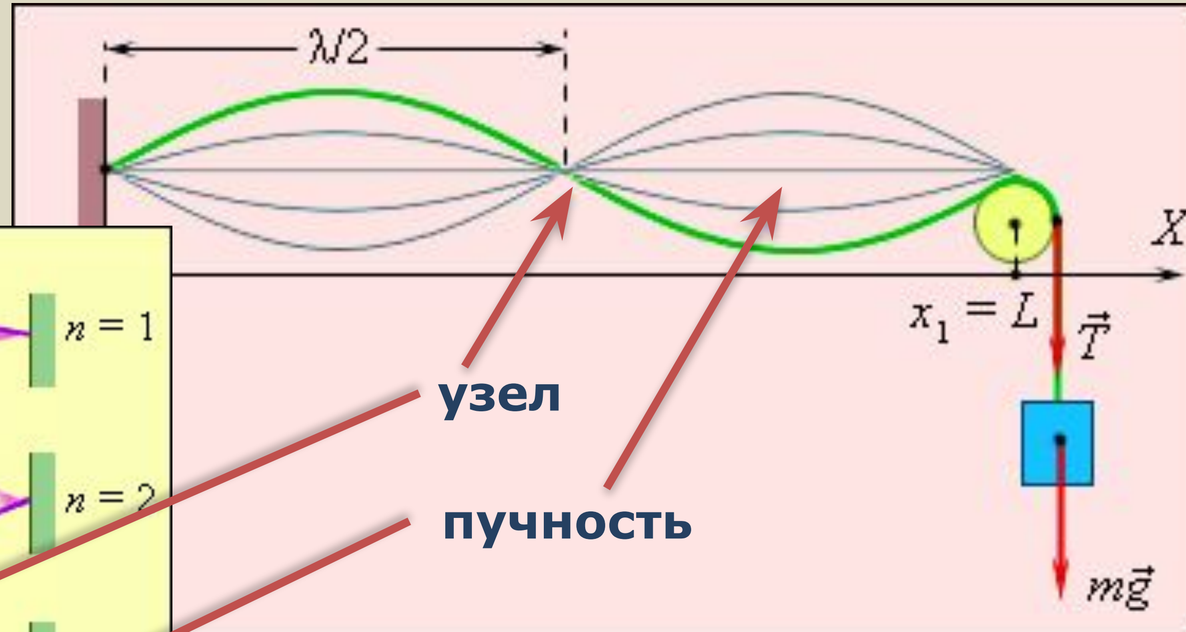
плоские

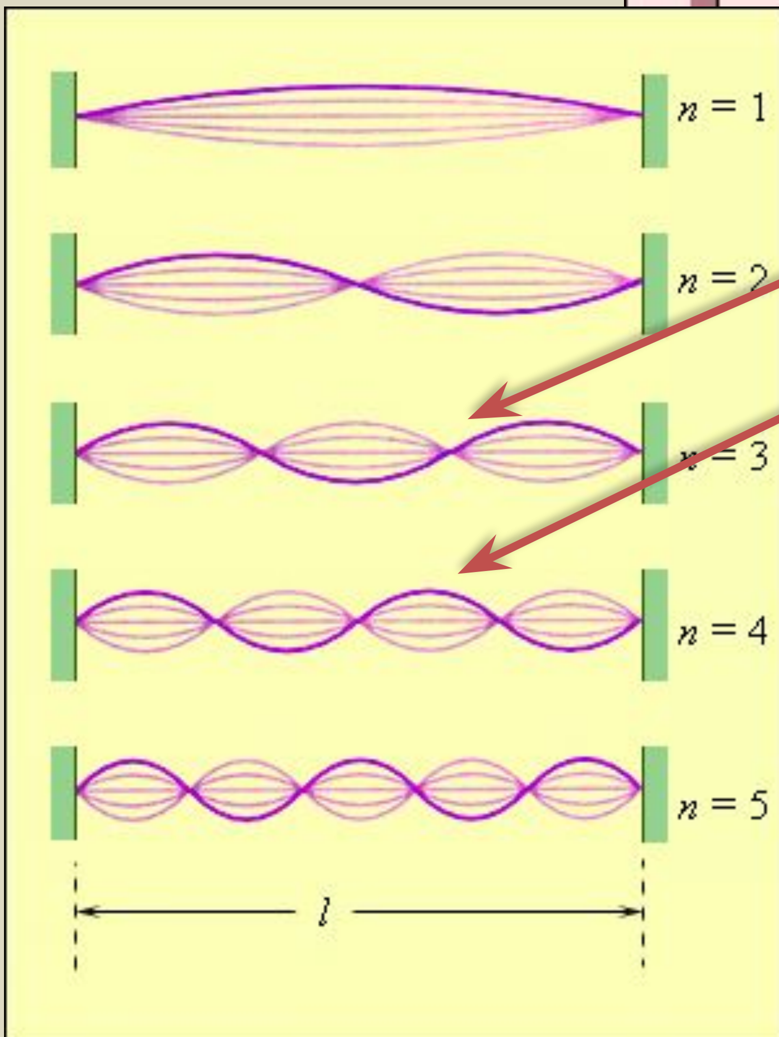
источник ДАЛЕКО



Стоячая волна







узел

пучность

- **возникает при отражениях от преград и неоднородностей в результате наложения отражённой волны на падающую**
- **важное значение в месте отражения имеют частота, фаза и коэффициент затухания волны**
- **характерное расположение чередующихся max (пучностей) и min (узлов) амплитуды**

Характеристики волн

- Для описания ряда волновых явлений, например интерференции и дифракции, используют специальную характеристику, называемую ***длиной волны***.
- ***Длиной волны*** называется расстояние, на которое перемещается ее фронт за время, равное периоду колебаний частиц среды:

$$\lambda = vT = v/f = 2\pi v/\omega$$

Здесь *v* - скорость волны,
T - период колебаний,
f - частота колебаний точек среды,
ω - циклическая частота.
Так как скорость распространения волны зависит от свойств среды, то длина волны **λ** при переходе из одной среды в другую изменяется, в то время как частота **f** остается прежней.