Электроемкость уединенного проводника

Потенциал φ уединенного заряженного проводника, на который не действуют внешние электростатические поля, пропорционален его заряду q:

$$\varphi = \frac{1}{C} q. \qquad (1)$$

Величину

$$C = \frac{q}{\varphi} \qquad (2)$$

называют электрической емкостью или электроемкостью уединенного проводника. Она равна заряду, изменяющему потенциал проводника на единицу. Электроемкость уединенного проводника характеризует его способность накапливать электрический заряд – чем больше электроемкость проводника, тем больший заряд удерживает проводник при заданном φ.

Электроемкость проводника зависит от его формы и линейных размеров. Геометрически подобные проводники имеют емкости, прямо пропорциональные их линейным размерам. Электроемкость не зависит от материала проводника, его агрегатного состояния и прямо пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды, в которой находится проводник.

Выражение (2) служит также для введения единицы измерения электроемкости. В системе СИ за единицу электроемкости принимается емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении проводнику заряда в 1 Кл. Эта единица называется фарадом.

Из выражения (2) видно, что **для вычисления емкости уединенного проводника достаточно заряд проводника разделить на его потенциал, выраженный через заряд**. Например, потенциал изолированной заряженной сферы радиуса R, помещенной в однородный безграничный диэлектрик, равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среда; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Тогда из (2) следует, что электрическая емкость сферы равна

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \qquad (3)$$

Конденсатор. Емкость сферического и цилиндрического конденсаторов

Конденсатором называют систему двух проводников, разноименно заряженных равными по модулю зарядами и имеющих такую форму и расположение друг относительно друга, что поле создаваемое такой системой сосредоточено в ограниченной области пространства.

Сами проводники называют **обкладками конденсатора**. Часто между обкладками помещают диэлектрик. Конденсаторы являются накопителями электрических зарядов.

Электроемкость конденсатора является **взаимной электроемкостью** его обкладок и численно равна заряду q, который нужно перенести с одного проводника на другой для того, чтобы изменить разность потенциалов между ними $\varphi_1 - \varphi_2$ на единицу

$$\frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C. \qquad (4)$$

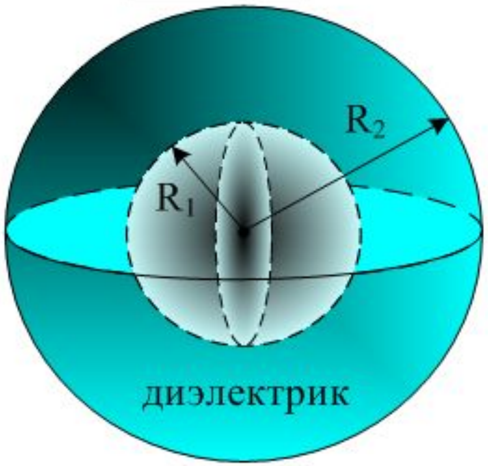

Рис. 1

Емкость сферического конденсатора (рис. 1) определяется формулой

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \qquad (5)$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок.

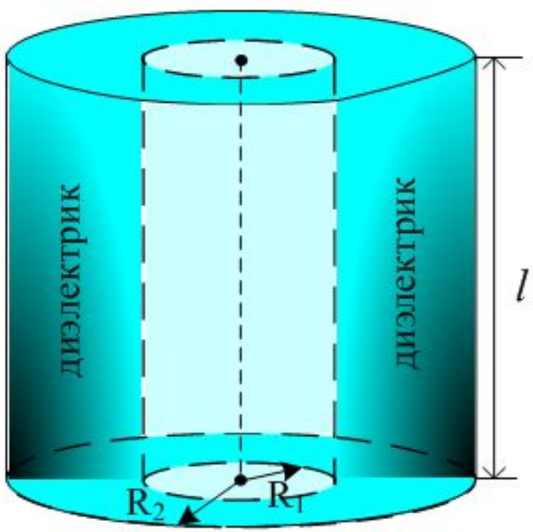

Рис. 2

Если пренебречь рассеянием поля вблизи краев обкладок, то емкость цилиндрического конденсатора (рис. 2) можно рассчитать по формуле

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}, \qquad (6)$$

где l – длина конденсатора, R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок. Эта формула определяет емкость реального конденсатора с тем большей точностью, чем меньше зазор между обкладками $d=R_2-R_1$ по сравнению с l и R_1.

Емкость плоского конденсатора

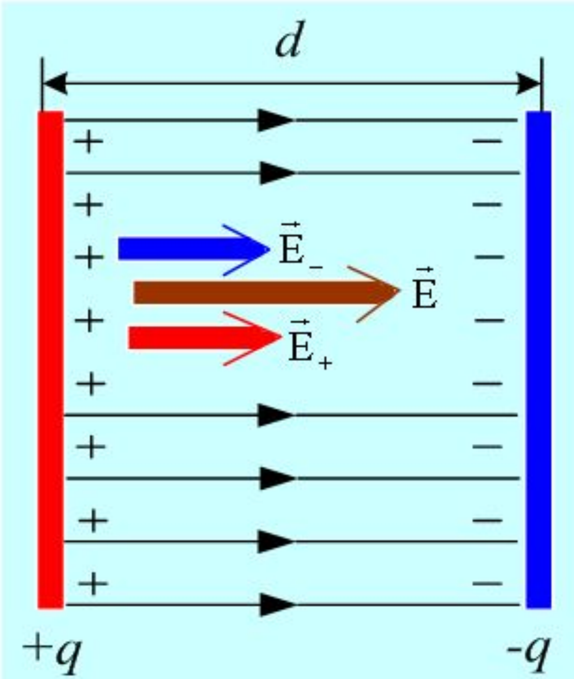

Рис. 3

Плоский конденсатор (рис. 3) **состоит из двух пластин площадью *S*, расположенных на небольшом расстоянии *d* друг от друга** (расстояние между пластинами *d* много меньше линейных размеров пластин), **заряды на пластинах +*q* и −*q*.** Определим электроемкость плоского конденсатора.

В общем случае, если пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью *ε*, то напряженность электростатического поля между пластинами равна сумме (по принципу суперпозиции) напряженностей полей, создаваемых каждой из пластин:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\sigma = {}^{q}\!/_{S}$ – поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора. Если пренебречь краевыми эффектами, электростатического поле внутри конденсатора будет однородным.

Используя связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля, получим

$$|\Delta\varphi| = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

откуда, согласно (2), для электроемкости плоского конденсатора получим формулу

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что электроемкость конденсатора зависит от площади пластин, расстояния между ними и диэлектрической проницаемости вещества, заполняющего пространство между пластинами конденсатора, и не зависит от заряда и разности потенциалов, приложенных к пластинам.

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением U_{max}, которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. Для всех типов конденсаторов существует **пробивное напряжение** – разность потенциалов между обкладками, при которой происходит электрический разряд через слой диэлектрика, при этом разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

Последовательное соединение конденсаторов

В электрических цепях конденсаторы могут включаться в батареи, состоящие из нескольких параллельно или последовательно соединенных конденсаторов. Возможно также комбинирование этих двух типов соединений конденсаторов.

На рис. 4 представлено последовательное соединение трех конденсаторов.

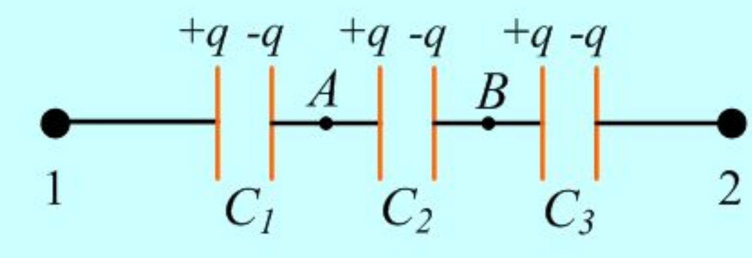

Рис. 4

При последовательном соединении конденсаторов они соединяются разноименно заряженными обкладками.

Если батарею последовательно соединенных конденсаторов подключить к источнику напряжения, то на левую пластину конденсатора C_1 перейдет заряд $+q$, на правую пластину конденсатора C_3 – заряд $-q$. Вследствие электризации через влияние правая пластина конденсатора C_1 будет иметь заряд $-q$, а левая пластина конденсатора C_3 будет иметь заряд $+q$. Пластины конденсаторов C_1 и C_3 соединены с пластинами конденсатора C_2, поэтому вследствие закона сохранения заряда, заряд левой пластины конденсатора C_2 будет равен $+q$, правой $-q$.

На всех пластинах конденсаторов при последовательном соединении будет одинаковый по модулю заряд, а общее напряжение распределяется между конденсаторами и равно сумме напряжений на каждом из них $U = \sum_{i} U_i$.

Найти эквивалентную электроемкость – это найти конденсатор такой электроемкости, который при той же разности потенциалов будет накапливать тот же заряд *q*, что и батарея конденсаторов.

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2 ($A = \varphi_1 - \varphi_2$) складывается из суммы разностей потенциалов между пластинами каждого из конденсаторов

$$A = \varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_A) + (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_2). \quad (8)$$

Воспользовавшись формулой (4), выражение (8) перепишем в виде

$$\frac{q}{C_{экв}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3},$$

откуда

$$\frac{1}{C_{экв}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

и в общем случае имеем

$$\frac{1}{C_{экв}} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \quad (9)$$

Таким образом, **эквивалентная электроемкость батареи последовательно соединенных конденсаторов всегда меньше электроемкости любого конденсатора, входящего в соединение.**

Параллельное соединение конденсаторов

Для увеличения электроемкости применяют параллельное соединение конденсаторов одноименно заряженными обкладками.

Параллельное соединение конденсаторов – соединение, при котором все конденсаторы подключены между одной и той же парой точек (узлами).

На рис. 5 изображена батарея параллельно соединенных конденсаторов. Разность потенциалов между пластинами всех конденсаторов одинакова и равна $\varphi_1 - \varphi_2$. Заряды на пластинах

$$q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2),$$
$$q_2 = C_2(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (10)$$
$$q_3 = C_3(\varphi_1 - \varphi_2).$$

На эквивалентном конденсаторе емкостью $C_{экв}$ заряд на пластинах при той же разности потенциалов равен

$$q = q_1 + q_2 + q_3. \qquad (11)$$

Согласно формуле (2),

$$C_{экв}(\varphi_1 - \varphi_2) = C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_1 - \varphi_2) + C_3(\varphi_1 - \varphi_2),$$

следовательно, $C_{экв} = C_1 + C_2 + C_3$, и в общем случае

$$C_{экв} = \sum_i C_i. \qquad (12)$$

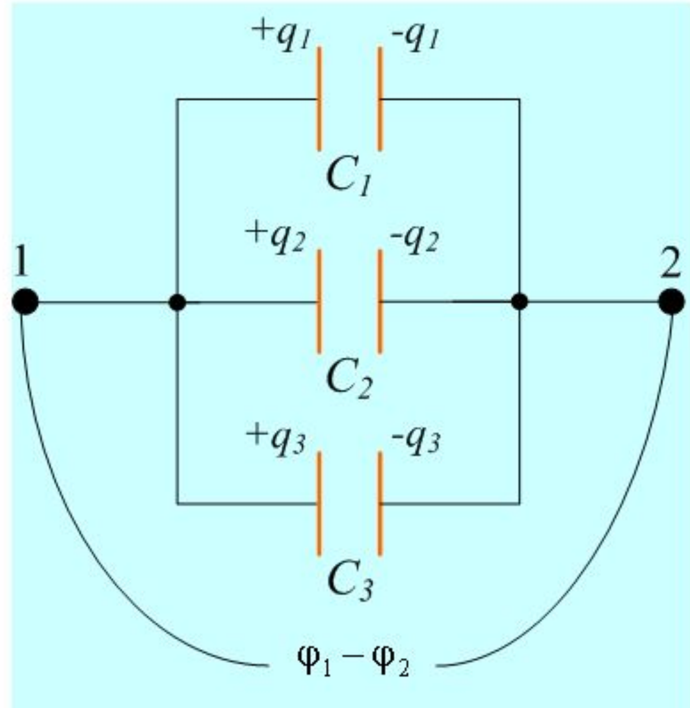

Рис. 5

Электроемкость батареи параллельно соединенных конденсаторов всегда больше электроемкости любого из конденсаторов, входящих в соединение.

Смешанное соединение конденсаторов – соединение, сводящееся к последовательному и параллельному соединению конденсаторов.

Энергия электростатического поля конденсатора

Пластины плоского конденсатора, заряженные разноименно, притягиваются друг к другу. Рассмотрим пластину 2 в поле пластины 1 (рис. 6).

Напряженность электростатического поля пластины 1 с поверхностной плотностью заряда σ равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\sigma = \frac{q}{S}$, q – заряд пластины, S – ее площадь.

Поле считаем однородным, искажением силовых линий на краях конденсатора пренебрегаем. В этом случае сила, действующая на пластину 2, равна

$$F_э = qE = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

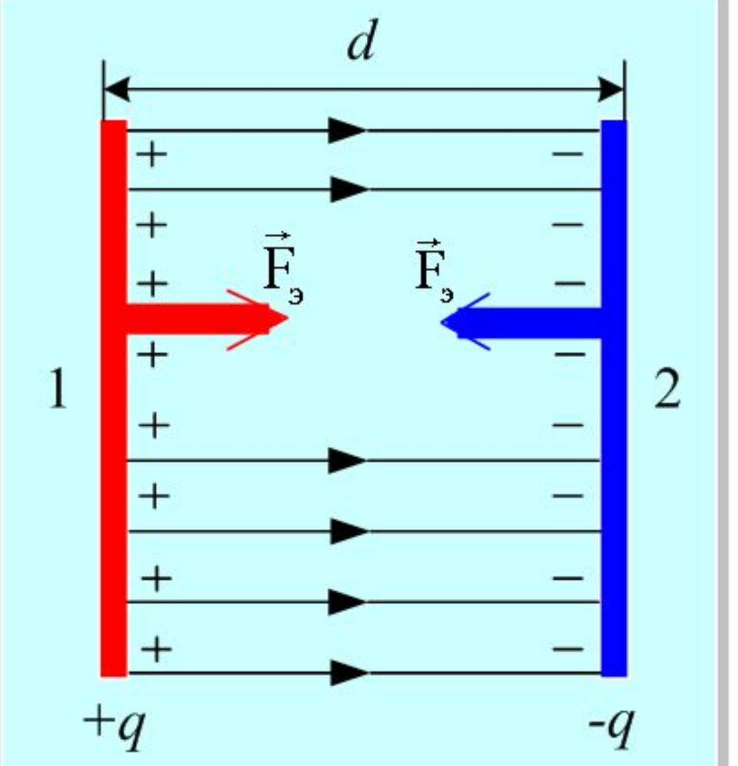

Рис. 6

Для того чтобы увеличить расстояние между пластинами d, например от d_1 до d_2, внешняя сила $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}$, должна совершить работу

$$A = F\Delta d = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\Delta d, \quad \Delta d = d_2 - d_1.$$

При этом работа электростатической силы отрицательна

$$A_э = -A.$$

Учитывая, что при расстоянии между пластинами d_1 электроемкость конденсатора равна $C_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}$, а при d_2 $C_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}$, перепишем выражение для работы

$$A = \frac{qq}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}(d_2 - d_1) = \frac{q^2 d_2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 d_1}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}.$$

Если консервативная сила совершает отрицательную работу, то потенциальная энергия системы увеличивается, в данном случае мы говорим об энергии электростатического поля.

Итак,

$$\Delta W_э = -A_э = -\frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}, \quad W_{э2} - W_{э1} = A = -A_э = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}. \quad (13)$$

Мы определили изменение энергии, а не само значение ***W*э.** Предположим, что энергия электрического поля конденсатора равна нулю, когда пластины не заряжены. Отсюда получаем выражение для энергии поля конденсатора

$$W_э = \frac{q^2}{2C}, \tag{14}$$

или, учитывая, что $q = CU$

$$W_э = \frac{CU^2}{2}. \tag{15}$$

Объемная плотность энергии электростатического поля

Концентрация энергии электростатического поля в пространстве характеризуется объемной плотностью энергии.

Объемная плотность энергии электростатического поля (энергия единицы объема) – физическая величина, равная отношению энергии электростатического поля, сосредоточенной в объеме, к этому объему:

$$\omega = \frac{W_э}{V}. \tag{16}$$

Единица объемной плотности – джоуль на кубический метр (Дж/м^3).

Джоуль на кубический метр равен объемной плотности энергии однородного электростатического поля, в 1 м^3 которого содержится энергия 1Дж.

Подставив в выражение (16)

$$W_э = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\frac{U^2}{2},$$

где $U = Ed$ и объем $V = Sd$, получим

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d^2}{2dSd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Зная трехмерную функцию напряженности электростатического поля $E(x,y,z)$, можно определить плотность энергии электростатического поля пространства. Если заряд на пластинах конденсатора остается постоянным, то, увеличивая расстояние между пластинами, мы увеличиваем объем той части пространства, где существует электростатическое поле, напряженность при этом остается постоянной, а, следовательно, плотность энергии $W_э = \omega V$ увеличивается.