Электростатика

1. Электрический заряд и его свойства

Электрический заряд является неотъемлемым свойством элементарных частиц – электронов и протонов. Заряд этих частиц одинаков по абсолютной величине, противоположен по знаку и называется **элементарным зарядом.** Электрон имеет отрицательный заряд $-e$, протон – положительный заряд $+e$; элементарная частица нейтрон не имеет электрического заряда. Из этих частиц построены атомы и молекулы любого вещества. Каждый атом любого тела имеет одинаковое число электронов и протонов, поэтому любой элементарный объем тела и тело в целом будут электрически нейтральными, алгебраическая сумма зарядов в каждом случае будет равна нулю.

Если каким-либо образом создать в теле избыток частиц одного знака, тело окажется заряженным. Заряд в системе СИ измеряется в кулонах (Кл), 1 Кл – это заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за 1 секунду при силе тока в 1 A (ампер). Поскольку всякий заряд q образуется совокупностью элементарных зарядов, он является кратным e:

$$q = \pm Ne \tag{1.1}$$

Это означает, что величина заряда любого тела может принимать только **дискретные** значения. Однако элементарный заряд настолько мал (e = 1.602 · 10 $^{-19}$ Кл в системе СИ), что возможную величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно.

Для зарядов выполняется один из фундаментальных законов природы – **закон сохранения заряда**, который формулируется следующим образом: «**В электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная**».

Закон Кулона установлен экспериментально в 1785 году. Согласно этому закону сила взаимодействия зарядов пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Векторная запись закона Кулона для точечных зарядов в вакууме имеет вид (см. рис. 1.1):

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} \tag{1.2}$$

Одинаковый для обоих зарядов модуль силы взаимодействия можно представить в виде:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{k}$ – коэффициент пропорциональности, в системе СИ $\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м (фарада на метр) – электрическая постоянная, $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$ – величины взаимодействующих зарядов, $\boldsymbol{r_{12}}$ – расстояние между зарядами.

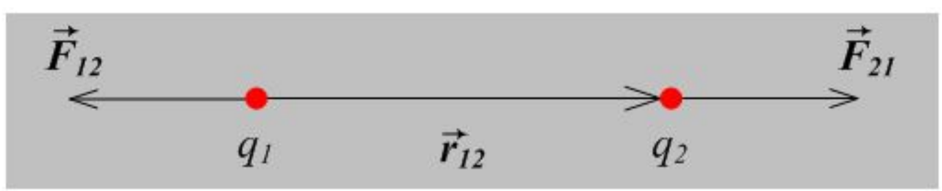


Рис. 1.1.

Сила взаимодействия направлена по прямой, соединяющей заряды (центральная сила). Рисунок соответствует случаю зарядов одного знака, $(q_1 \cdot q_2) > 0$, при этом между зарядами возникают силы отталкивания. Если точечные заряды имеют разные знаки, $(q_1 \cdot q_2) < 0$, между ними возникают силы притяжения.

Закон Кулона в виде (1.2) и (1.3) справедлив в следующих случаях:

1) для точечных зарядов, то есть в том случае, когда размеры заряженных тел много меньше расстояния между ними;

2) для тел сферической формы, когда заряды равномерно распределены по поверхности или по объему этих тел, тогда $\boldsymbol{r}$ – расстояние между центрами сфер.

Так, например, для металлических шаров закон Кулона неприменим, если они находятся на небольшом расстоянии друг от друга, так как заряды будут распределяться на них несимметрично вследствие взаимодействия.

2 Электростатическое поле. Напряженность поля.

Силовое поле – пространственно-протяженный объект, в каждой точке которого действуют силы на помещенные туда пробные тела.

Электростатическое поле – это поле, созданное покоящимися электрическими зарядами. Если заряды движутся относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, то в этой системе отсчета поле уже не является электростатическим.

Таким образом, взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется посредством силового, электростатического поля.

Пробным телом для электростатического поля является электрический заряд, так называемый «пробный заряд». В качестве «пробного заряда» принято брать точечный положительный единичный заряд, то есть $q_{пр}$ = +1Кл.

Количественной характеристикой электростатического поля является **напряженность.** Напряженность данной точки электростатического поля равна отношению силы, действующей со стороны поля на помещенный в эту точку точечный заряд, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \qquad (1.4)$$

По этой причине напряженность не зависит от величины вносимого в поле заряда и является силовой характеристикой электростатического поля, векторной величиной. Условились считать, что ее направление совпадает с силой, действующей на положительный заряд.

Физический смысл напряженности заключается в следующем: напряженность данной точки поля по величине и направлению совпадает с силой, действующей на пробный заряд +1 Кл, помещенный в данную точку поля. Рассмотрим поле точечного заряда. Возьмем точечный заряд Q и найдем напряженность поля этого заряда в произвольной точке A (см. рис 1.2). Для этого поместим в точку A пробный заряд q. На основании закона Кулона имеем:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1.5)$$

В векторном виде $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}$.

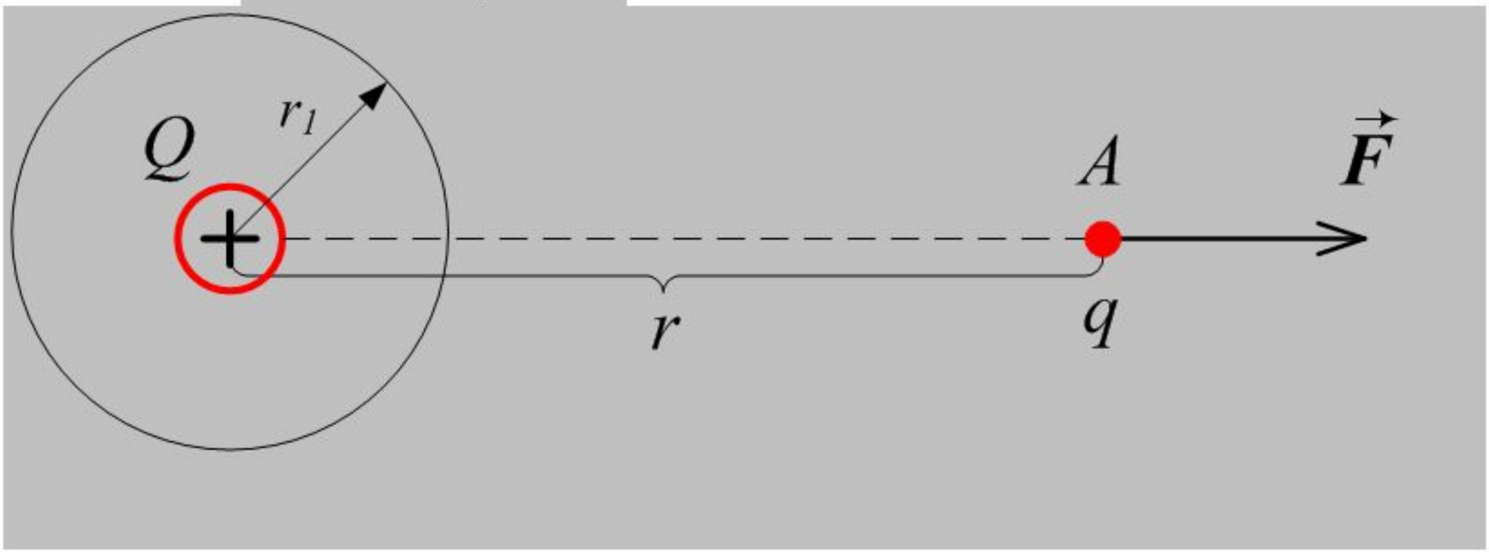


Рис. 1.2.

Если мы построим сферу радиуса $\boldsymbol{r_1}$ с центром вокруг заряда $\boldsymbol{Q}$, то напряженность поля во всех точках этой сферы будет одинакова и равна

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}.$$

Таким образом, поле точечного заряда обладает сферической симметрией.

Электростатическое поле можно описать, указав для каждой его точки величину и направление вектора напряженности $\vec{E}$. Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности.

Электростатическое поле можно представить очень наглядно с помощью **линий напряженности**, которые называют линиями вектора Е или **силовыми линиями.**

Силовой линией называется такая линия, касательная к каждой точке которой совпадает по направлению с вектором напряженности $\vec{E}$ в данной точке (рис.1.3). Силовые линии выходят из положительных зарядов и заканчиваются на отрицательных (рис.1.4).

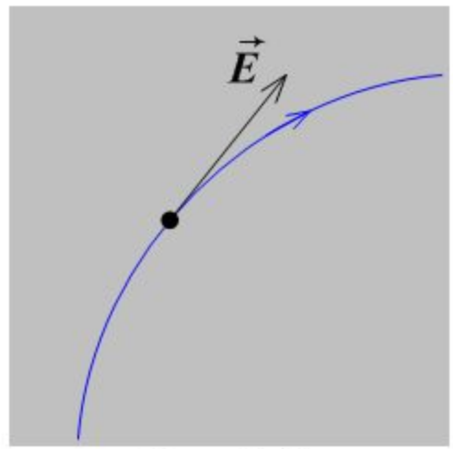


Рис. 1.3.

При графическом изображении электростатического поля с помощью силовых линий принято, чтобы количество линий, пересекающих единичную площадку, расположенную перпендикулярно линиям в окрестности данной точки, было равно (или пропорционально) величине напряженности в данной точке:

$$E = k\frac{\Delta N}{\Delta S},$$

где k – коэффициент пропорциональности.

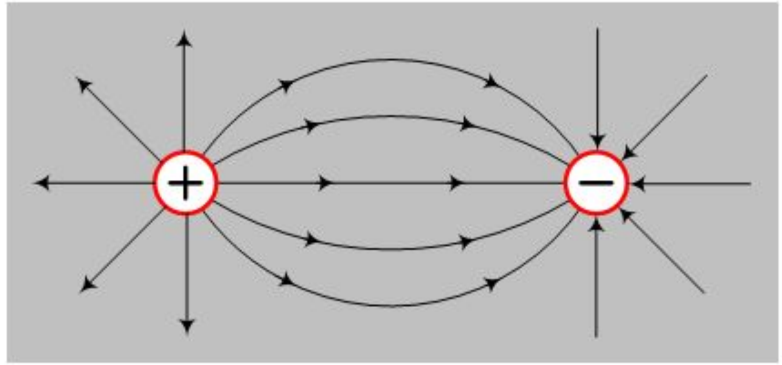


Рис. 1.4.

Простейшие случаи электростатических полей – это поле **точечного заряда** и **однородное поле.**

В однородном поле напряженность в каждой точке одинакова по величине и направлению, поэтому оно изображается системой параллельных силовых линий, равномерно распределенных в пространстве. Такое поле может создаваться бесконечной равномерно заряженной плоскостью или системой параллельных разноименно заряженных плоскостей (см. рис. 1.5).

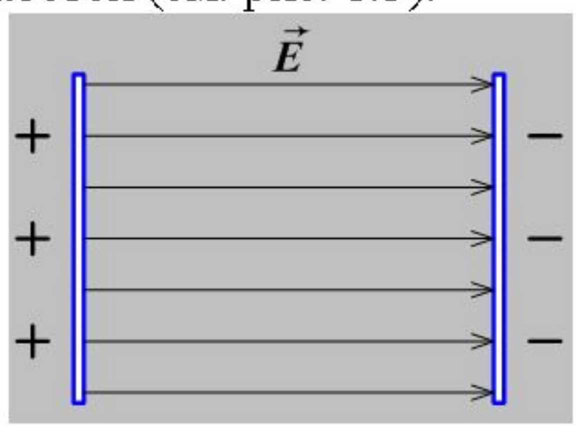


Рис. 1.5.

3 Принцип суперпозиции электростатических полей

Пусть имеется система точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_n$ и нужно узнать напряженность электростатического поля в некоторой произвольной точке. Поместим в эту точку пробный заряд q_{np}. Тогда согласно (1.5)

$$\vec{F} = q_{np}\vec{E} \tag{1.6}$$

Действие электростатического поля на заряд не зависит от наличия в этой области пространства других полей или зарядов, поэтому и сила взаимодействия любого заряда q_i с пробным зарядом не зависит от присутствия других зарядов:

$$F_i = q_{np}E_i,$$

где E_i – напряженность поля, создаваемого i-м зарядом в той точке, где нужно узнать напряженность поля системы зарядов.

Вследствие этого результирующая сила равна:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{1.7}$$

Сравнивая равенства (1.6) и (1.7), получим:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i \tag{1.8}$$

Последнее равенство и представляет собой математическое выражение **принципа суперпозиции** для напряженности электростатического поля.

Формулируется этот принцип следующим образом: «**Напряженность электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в произвольной его точке равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности**».

Рассмотрим пример применения принципа суперпозиции для системы двух точечных зарядов разного знака (рис.1.6). Имеются заряды разных знаков: $+q_1$ и $-q_2$. В точке A нужно найти напряженность поля этих зарядов. В точку A мысленно помещаем пробный заряд и строим векторы сил, действующих на него со стороны зарядов q_1 и q_2. Поскольку, напоминаем, $q_{пр}$ = + 1Кл, векторы этих сил по величине и направлению будут совпадать с векторами напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ этих зарядов (см. рис. 1.6).

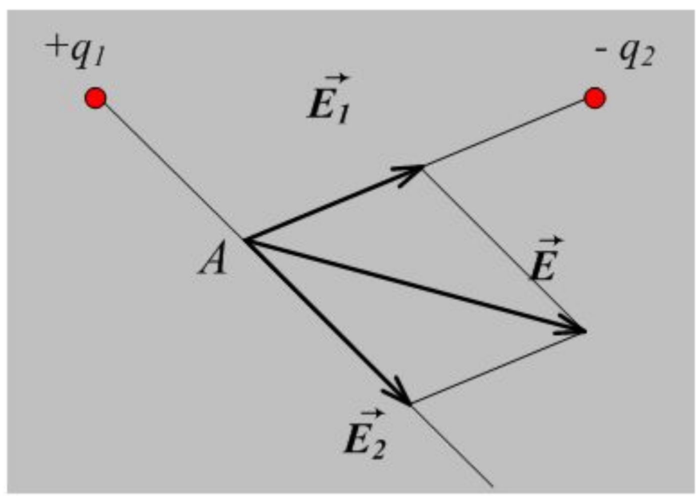


Рис. 1.6.

Складываем векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ по правилу сложения векторов (правило параллелограмма) и получаем результирующий вектор напряженности поля двух зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Для нахождения абсолютной величины вектора $\vec{E}$ в общем случае необходимо применить теорему косинусов:

$$\vec{E} = \sqrt{\left|\vec{E}_1\right|^2 + \left|\vec{E}_2\right|^2 + 2\left|\vec{E}_1\right| \cdot \left|\vec{E}_2\right| \cos(\alpha)}$$

4 Поток вектора напряженности электростатического поля

Рассмотрим произвольную поверхность S, расположенную в электростатическом поле. Пусть в каждой точке поверхности нам известны значение вектора напряженности $\vec{E}$ и его направление (рис 1.7). Выделим элементарную площадку dS на этой поверхности и построим единичный вектор нормали к ней $\vec{n}$ ($|\vec{n}|=1$).

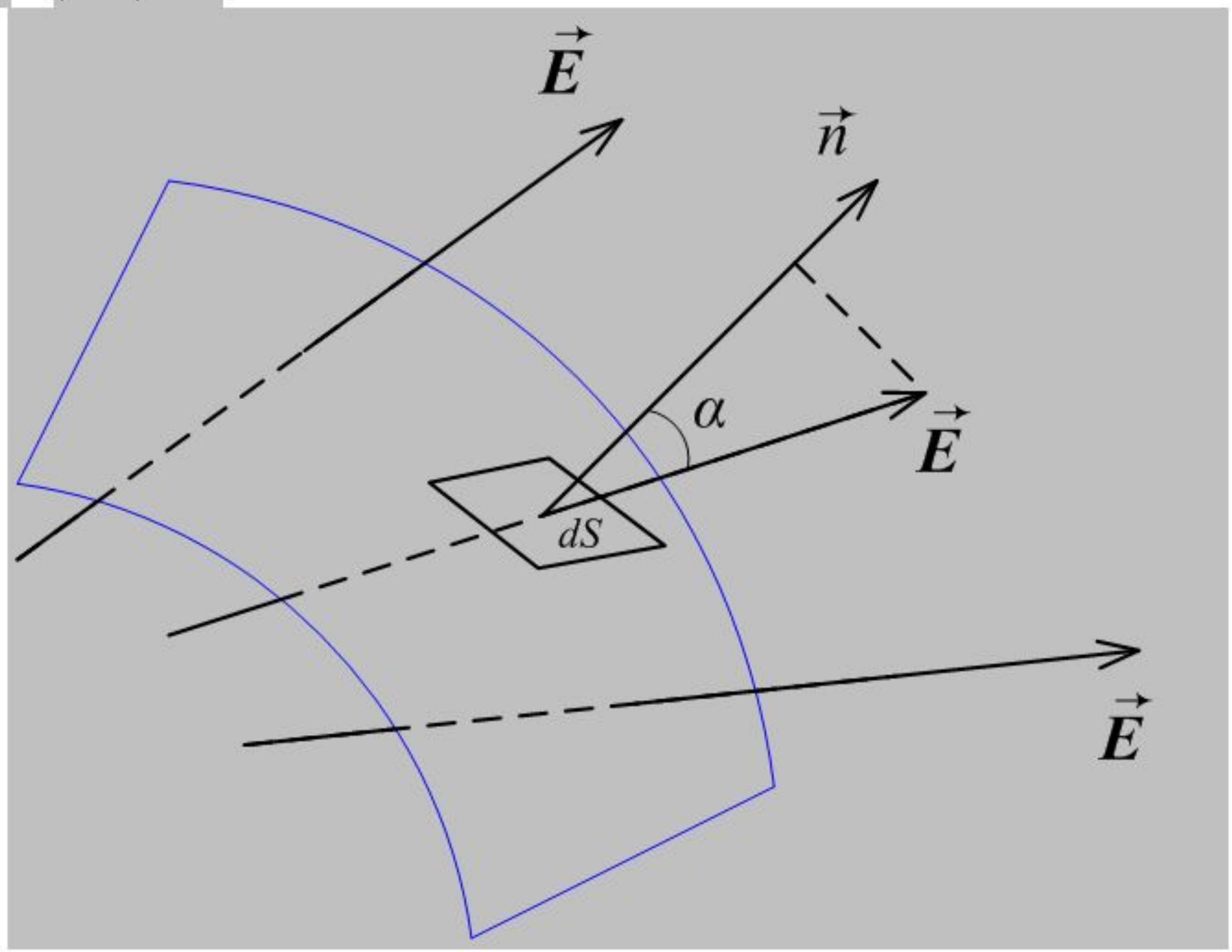


Рис. 1.7.

Потоком вектора $\vec{E}$ через всю поверхность S называется интеграл:

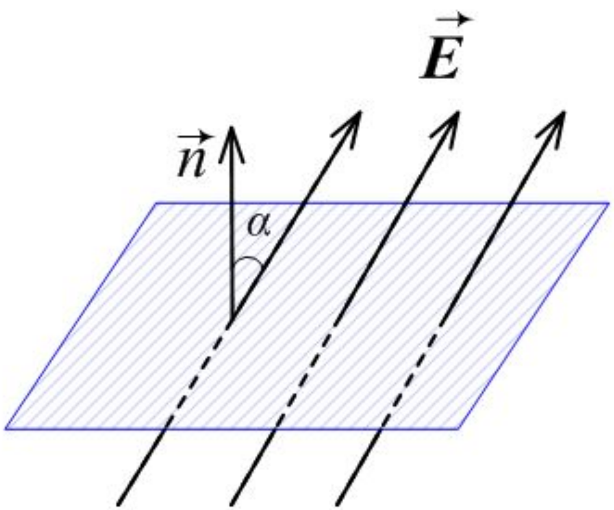
$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) \qquad (1.9)$$

Согласно свойствам скалярного произведения векторов интеграл (1.9) можно записать по-другому:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S E dS \cos\alpha = \oint_S E_n dS,$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$, а E_n есть проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к площадке dS.

Поток – величина скалярная, он может быть как положительным, так и отрицательным; знак потока зависит от выбора направления вектора нормали к площадке.



В простейшем случае, если величина вектора $\vec{E}$ одинакова на всей поверхности и угол, под которым вектор $\vec{E}$ «пронизывает» поверхность везде одинаков, поток $\Phi_E = ES\cos\alpha$.

Поток создается нормальной составляющей вектора $\vec{E}$. Если вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к поверхности, не «пронизывает» ее, то поток в этом случае равен нулю.

5 Теорема Остроградского- Гаусса для вектора $\vec{E}$.

Эта теорема - основная в электростатике, так как устанавливает связь поля с его источниками, то есть зарядами.

Формулировка ее следующая: **«Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на** ε_0».

Проверим справедливость этой теоремы для случая точечного заряда. Построим вокруг положительного точечного заряда величиной q сферу произвольного радиуса r с центром в той точке, где находится заряд (рис.1.9). Поле заряда имеет сферическую симметрию, так как согласно формуле напряженности поля точечного заряда (1.5) напряженность имеет одинаковое значение во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от заряда.

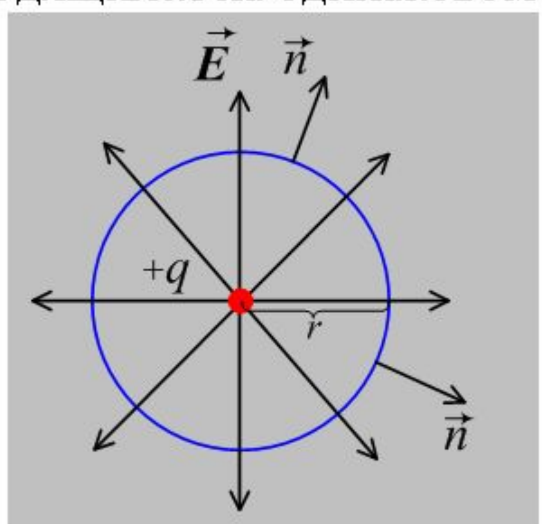


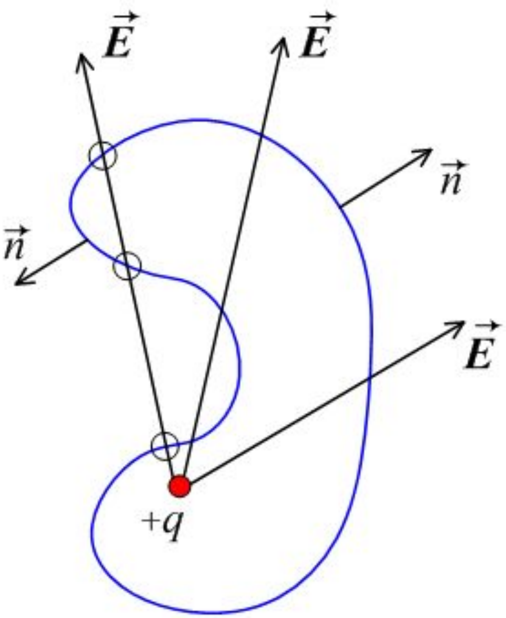
Рис. 1.9.

В любой точке построенной сферической поверхности напряженность поля одинакова и равна

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Вектор $\vec{E}$ направлен везде перпендикулярно поверхности сферы, во всех ее точках, так как он направлен от заряда по направлению силовой линии вдоль радиуса сферы. Пользуясь определением потока (1.9), посчитаем поток через замкнутую поверхность построенной сферы:

$$\Phi_E = ES\cos 90^o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 \cdot 1 = \frac{q}{\varepsilon_o}.$$



Как видно, теорема оказалась справедлива для случая точечного заряда. Очевидно, что поток не изменится, если изменить радиус сферы, сместить ее центр, деформировать сферу, сделать складки на ее поверхности (см. рис.).

Складки на поверхности не изменяют потока, так как поверхность протыкается 3 раза: два раза наружу и один раз внутрь. При том условии, что нормаль строится к наружной стороне поверхности, протыкание извне внутрь поверхности дает отрицательный поток (вектор $\vec{E}$ направлен противоположно вектору $\vec{n}$), протыкание наружу дает положительный поток. В результате потоки суммируются алгебраически и результат не изменяется, теорема снова выполняется.

Величина потока вектора напряженности через замкнутую поверхность полностью определяется величиной и знаком находящихся внутри поверхности зарядов. Если заряды расположены вне замкнутой поверхности, они не создают потока вектора напряженности через эту поверхность (линии напряженности два раза пересекают поверхность). Мы рассмотрели интегральную форму теоремы Остроградского-Гаусса, теперь получим ее **дифференциальную** форму.

Если заряд распределен равномерно внутри замкнутой поверхности объемом ΔV, можно выразить этот заряд через объемную плотность заряда ρ:

$$q = \rho \Delta V.$$

Тогда поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность согласно теореме О.-Г.

$$\Phi_E = \frac{\rho \Delta V}{\varepsilon_0}.$$

Теперь разделим обе части равенства на ΔV и будем уменьшать этот объем в точку. Тогда предел $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Phi_E}{\Delta V} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Выражение слева называется **дивергенцией вектора** $\vec{E}$ **(**слово «дивергенция » означает расходимость):

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_E}{\Delta V} = div\vec{E}.$$

Дивергенция вычисляется по формуле:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = (\nabla \cdot \vec{E}).$$

Таким образом, дивергенция есть скалярное произведение векторного оператора ∇ («набла»), уже известного из предыдущих разделов, и вектора $\boldsymbol{E}$.

Итак, в дифференциальной форме теорема О.-Г. для вектора $\vec{E}$ имеет вид:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.10)$$

В интегральной форме полная математическая запись этой теоремы выглядит следующим образом:

$$\oint_S (\vec{E}d\vec{S}) = \int_V div\vec{E}dV, \qquad (1.11)$$

то есть показывает связь потока вектора с его дивергенцией.

Общий смысл теоремы О.-Г. в том, что электростатическое поле имеет источники - электрические заряды. Силовые линии выходят из положительных зарядов и заканчиваются на отрицательных. Кроме электростатического поля, порождаемого неподвижными зарядами, в пространстве может существовать еще и вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты. Это поле может возникать в пространстве при изменении магнитного поля. Поток вектора напряженности такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. Поэтому теорема О.-Г. справедлива для любых электрических полей.

6 Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.

Используя Теорему О.-Г., можно определить напряженность поля различных заряженных тел. Рассмотрим простейшие случаи.

1. Заряженная равномерно по поверхности сфера.

Задача состоит в следующем. Дана сферическая поверхность радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ. Нужно найти зависимость величины напряженности поля сферы от расстояния до ее центра $E(r)$.

Здесь $\sigma = \dfrac{Q}{S} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$, где Q – заряд сферической поверхности, $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности сферы.

Определим поле **внутри сферы, когда** $r > R$. Из-за сферической симметрии распределения заряда по сфере, если поле внутри сферы существует, его напряженность в любой точке внутри сферы должна быть направлена радиально и во всех точках, равноудаленных от центра сферы должна иметь одинаковую величину. Теперь построим внутри сферы концентрическую с ней воображаемую сферическую поверхность радиуса r_1 (так называемую «гауссову» поверхность, см. рис.). Поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность

$$\Phi_E = ES = E4\pi \cdot r_1^{\,2}\ .$$

Поскольку внутри поверхности радиуса r_1 заряды отсутствуют, на основании теоремы О.-Г. Φ_E должен быть равен нулю. Следовательно, и напряженность поля внутри заряженной по поверхности сферы будет равна нулю (см. график $E(r)$ на рис.). Далее проводим подобные рассуждения **для внешней области, когда** $r \geq R$. Строим вспомогательную сферу радиуса r_2 и определяем поток через ее поверхность:

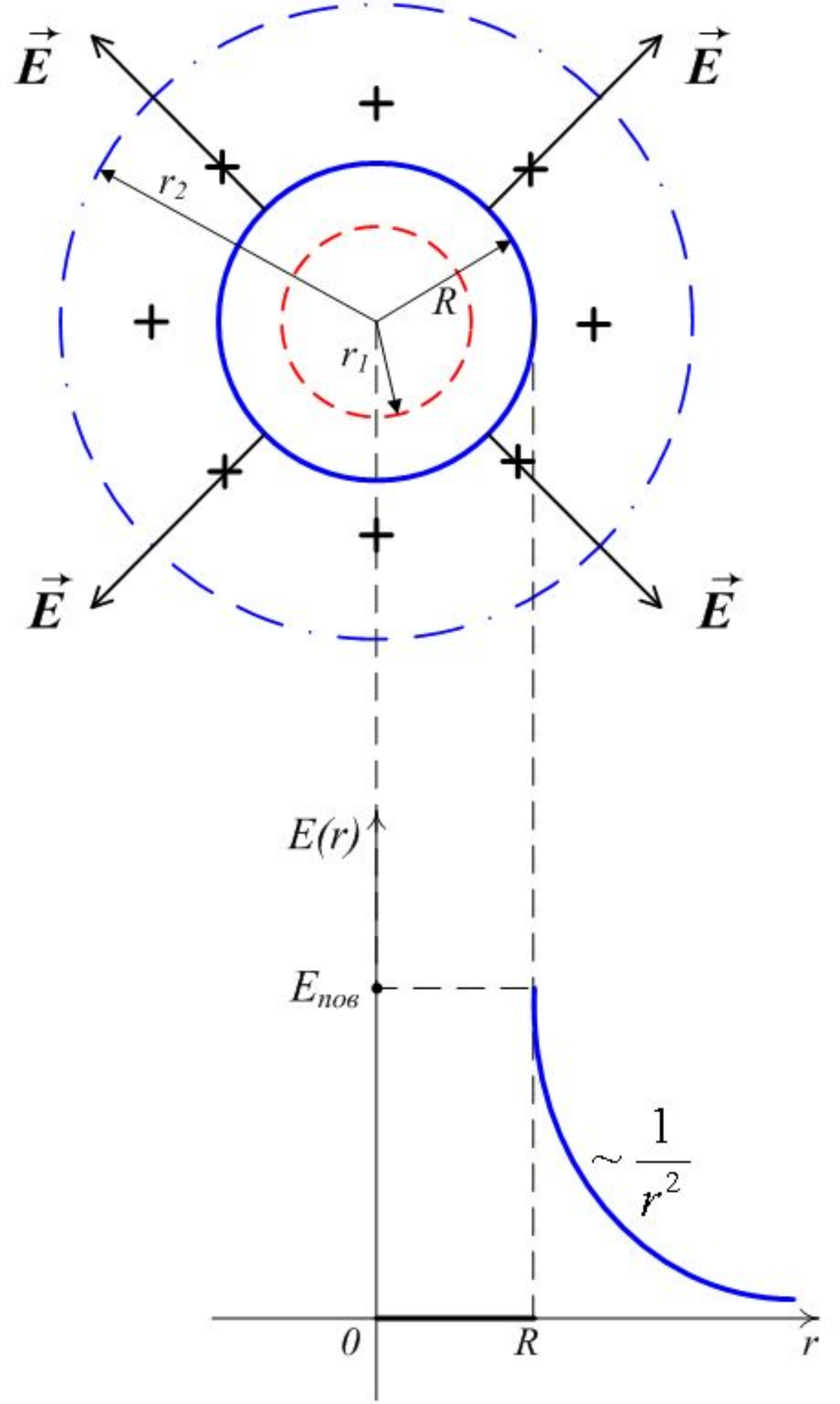
$$\Phi_E = ES = E4\pi \cdot r_2^{\,2},$$

согласно теореме О.-Г. он будет равен:

$$\Phi_E = ES = E4\pi \cdot r_2^{\,2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда получаем:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\,2}} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\,2}} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r_2^{\,2}}. \quad (1.12)$$



Таким образом, **поле внутри сферы отсутствует, а вне сферы совпадает с полем точечного заряда, равного заряду сферы и помещенного в ее центре**.

На поверхности сферы, при $r = R$, напряженность поля равна:

$$E_{пов} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

2. Заряженная равномерно бесконечно протяженная плоскость.

Известна поверхностная плотность заряда σ. Нужно найти напряженность поля этой плоскости. Пусть для определенности плоскость заряжена положительно $(\sigma > 0)$. Поскольку заряд на плоскости распределен равномерно, все точки плоскости, расположенные на одинаковом расстоянии от нее, совершенно равноправны, следовательно, вектор $\vec{E}$ везде перпендикулярен плоскости. На рис 1.12 изображен участок поверхности, центральная вертикальная линия OO' – след пересечения плоскости с плоскостью чертежа.

Выделим на плоскости произвольную площадку ΔS в виде круга и построим на этой площадке вспомогательную «гауссову» поверхность в виде цилиндра произвольной длины, основания которого параллельны поверхности и симметрично расположены относительно нее, а боковая поверхность перпендикулярна плоскости. Построив единичные векторы нормали к поверхности цилиндра, мы видим, что поток через его боковую поверхность равен нулю, силовые линии скользят вдоль поверхности, не протыкая ее.

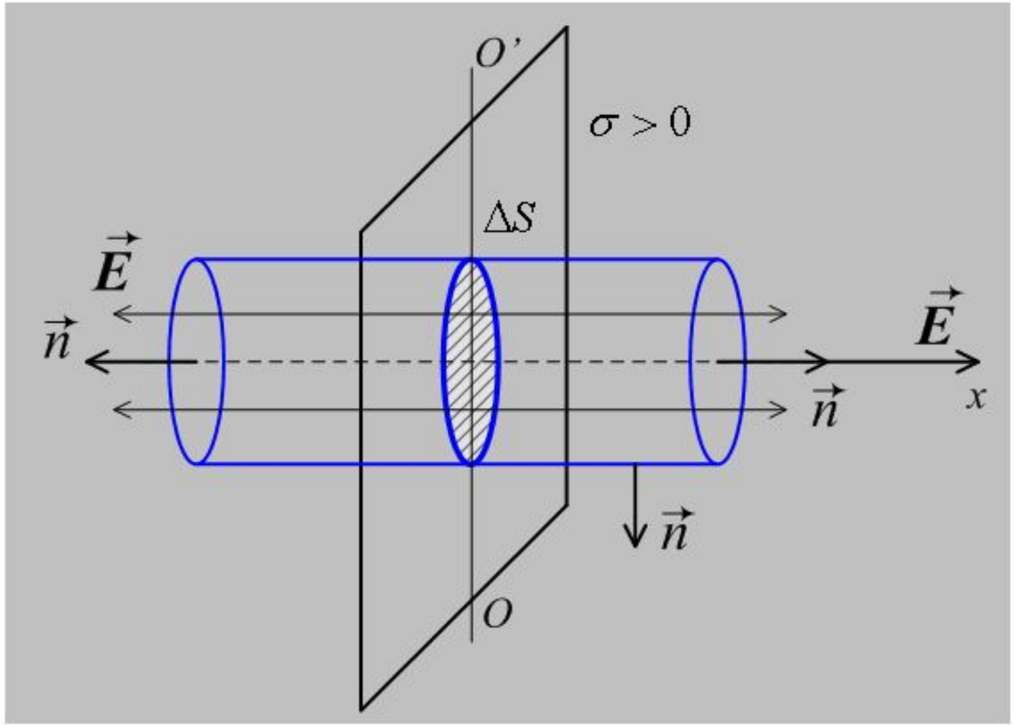


Рис. 1.12.

Тогда весь поток вектора $\vec{E}$ через поверхность цилиндра будет равен сумме потоков через основания цилиндра, причем эти потоки равны между собой в силу симметричного расположения оснований.

$$\Phi_E = \Phi_{бок} + \Phi_{осн} = 2E\Delta S.$$

С другой стороны, на основании теоремы О.-Г. этот поток равен заряду, находящемуся внутри цилиндра, деленному на ε_0:

$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

откуда получим: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Причем $|\vec{E}| = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ при $x > 0$ и $|\vec{E}| = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ при $x < 0$. (1.13)

Итак, мы получили, что модуль вектора напряженности $\vec{E}$ поля плоскости имеет одно и тоже значение во всех точках пространства, то есть **поле, создаваемое бесконечно протяженной заряженной равномерно плоскостью однородно**. Эти выводы справедливы как для положительно, так и для отрицательно заряженной плоскости.

3. Две параллельные бесконечно протяженные плоскости, заряженные равномерно. Для рассмотрения поля такой системы плоскостей используем выводы, полученные в предыдущем случае и принцип суперпозиции для вектора $\vec{E}$. Рассмотрим простейший случай, когда плоскости заряжены разноименными зарядами и значения поверхностных плотностей заряда одинаковы ($|+\sigma| = |-\sigma| = \sigma$).

Система заряженных параллельных плоскостей образует в пространстве три области I, П, Ш (см рис 1.13), в каждой из них $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности поля заряженных плоскостей в отдельности. Используя выражения (1.13), получим для каждой области:

I (x < 0) $$E_I = -\frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = 0;$$

II (0 < x < d) $$E_{II} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

III (x > 0) $$E_{III} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = 0.$$

Таким образом, **электростатическое поле системы заряженных разноименно бесконечно протяженных плоскостей в нашем случае за пределами плоскостей отсутствует.**

Все поле сосредоточено между плоскостями, оно является однородным и его напряженность равна:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Эти выводы наглядно представлены в виде графика $E(x)$ на рис. 1.13.

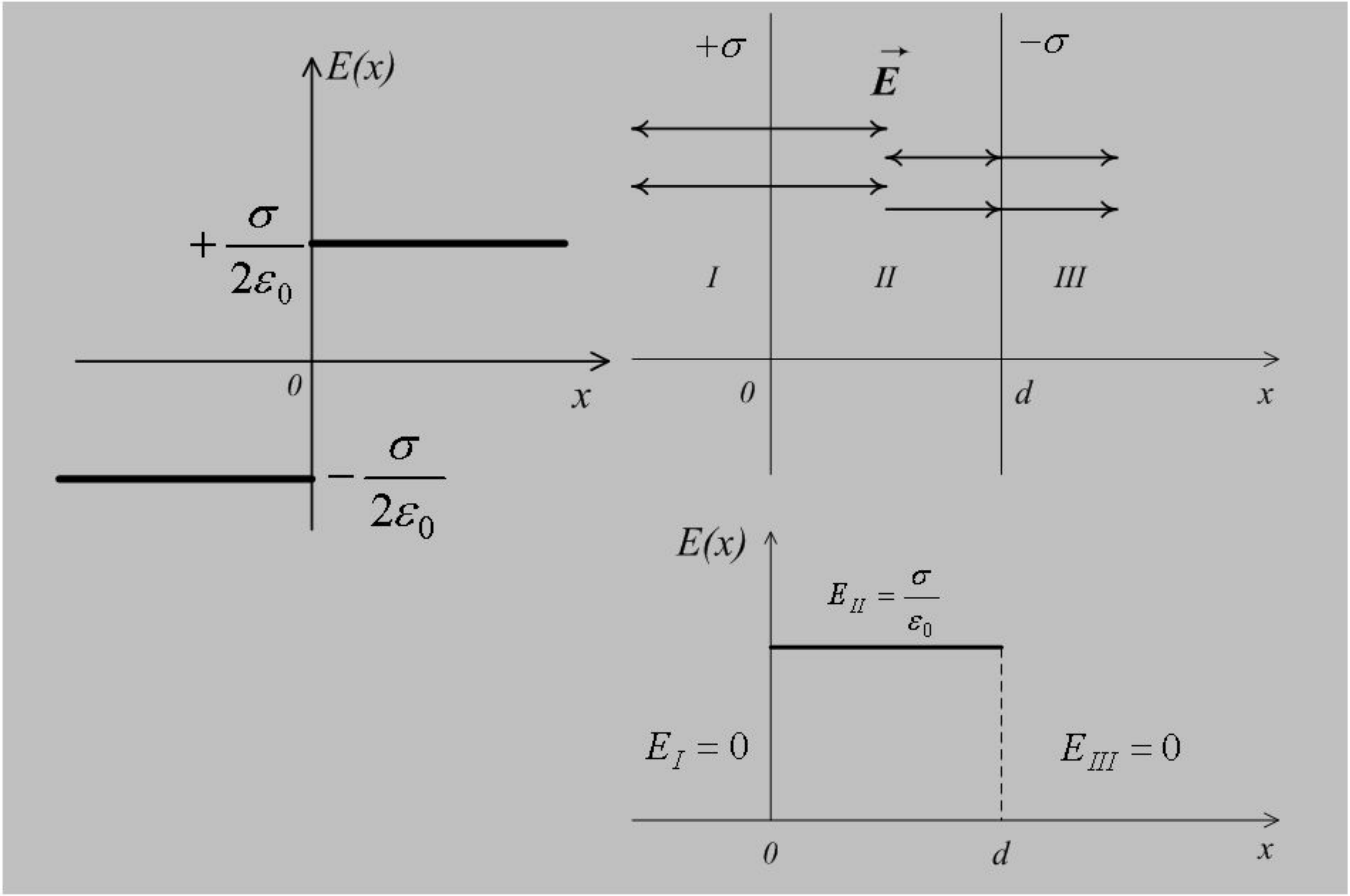

E(x)
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
0
x
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$+\sigma$
$\vec{E}$
$-\sigma$
I
II
III
0
d
x
E(x)
$E_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
$E_I = 0$
$E_{III} = 0$
0
d
x

Рис. 1.13.

4. Заряженный равномерно по объему шар.

Дан шар радиуса R, заряженный по объему равномерно с объемной плотностью

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4/3 \cdot \pi \cdot R^3}.$$

Нужно найти напряженность поля шара как внутри шара, так и вне его. Построим вспомогательную поверхность в виде сферы радиуса r_1 $(r_1 < R)$ (рис.1.14). Поскольку поле шара обладает сферической симметрией, линии напряженности поля и внутри и вне шара направлены радиально, перпендикулярно сферическим поверхностям и значение вектора $\vec{E}$ во всех точках сферических поверхностей будет одинаково и равно E_1 этому поток через поверхность сферы радиуса r_1 согласно теореме О.Г.

$$\Phi_E = E_1 4\pi \cdot r_1^{\,2} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot r_1^{\,3} \rho}{\varepsilon_0},$$

где Q_1 – заряд, распределенный внутри сферы радиуса r_1.

Отсюда для внутренней области шара получаем:

$$E_1 = \frac{r_1 \rho}{3\varepsilon_0} = \frac{Q \cdot r_1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}. \qquad (1.15)$$

Далее строим еще одну вспомогательную сферу радиуса r_2 $(r_2 > R)$

(см. рис.1.14) и также применяем теорему О.-Г. Поток вектора $\vec{E}$ через поверхность радиуса r_2

$$\Phi_E = E_2 4\pi \cdot r_2{}^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

откуда для области вне сферы получаем: $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_2{}^2}$.

Эти результаты наглядно представлены на рис 1.14 в виде графика $E(r)$. Итак, можно сделать вывод, что **напряженность поля заряженного равномерно по объему шара внутри шара растет по линейному закону, а вне шара совпадает с полем точечного заряда, равного заряду сферы и сосредоточенного в ее центре.**

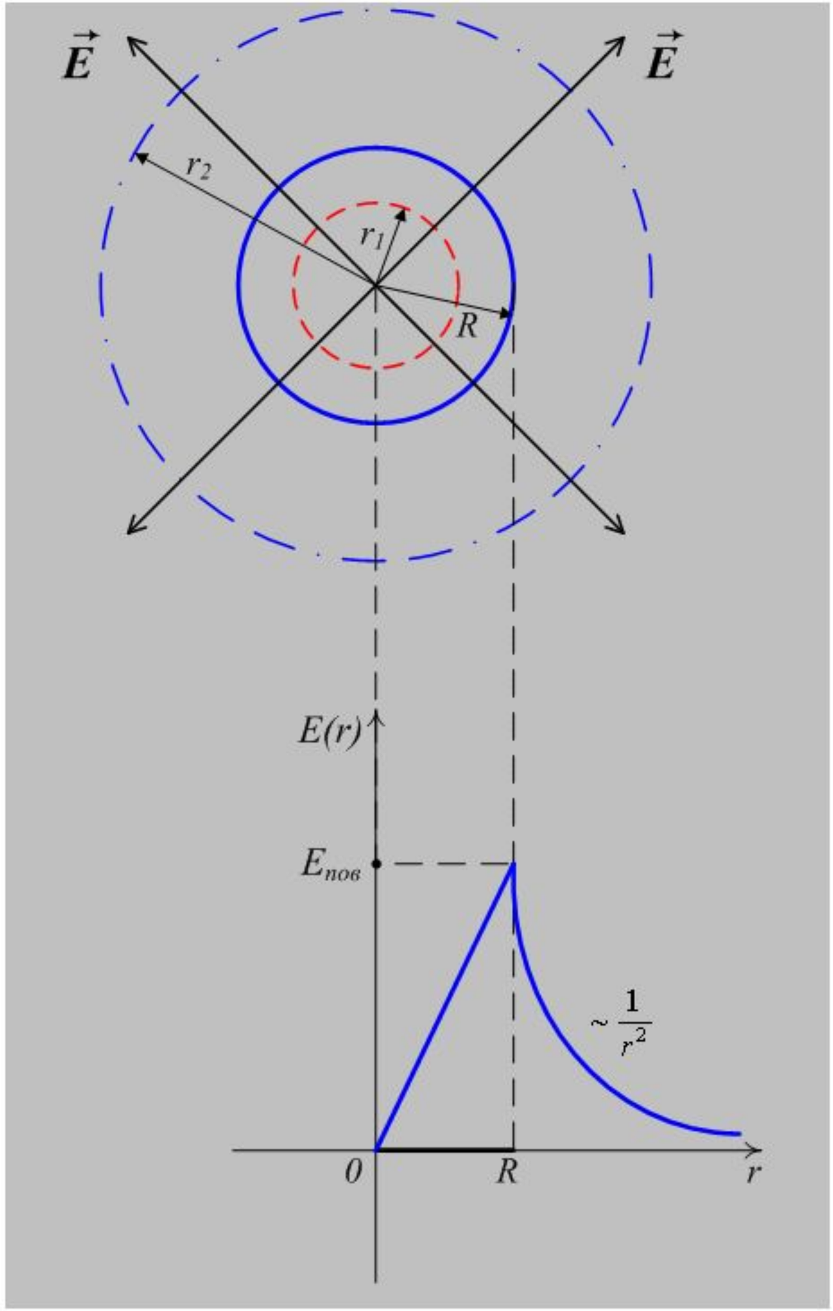


Рис. 1.14.

5. Заряженная равномерно бесконечная нить

Дана линейная плотность заряда на нити τ. Силовые линии поля заряженной нити направлены от нити во все стороны радиально. Поле нити обладает цилиндрической симметрией и значение вектора напряженности $\vec{E}$ зависит только от расстояния до нити. В качестве вспомогательной «гауссовой» поверхности построим цилиндр произвольной длины l и радиуса r, ось которого совпадает с нитью (рис. 1.15,а). Поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность цилиндра можно представить как сумму потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность: $\Phi_E = \Phi_{E\,бок} + \Phi_{E\,осн1} + \Phi_{E\,осн2}$.

Построив векторы нормали к поверхностям цилиндра, мы наглядно видим, что потоки через основания цилиндра равны нулю, а поток через его боковую поверхность

$$\Phi_{E\,бок} = ES_{бок} = E2\pi \cdot rl.$$

Применив теорему О.-Г., получим:

$$E2\pi \cdot rl = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}$$

(здесь $Q = \tau \cdot l$ – заряд отрезка нити, расположенного внутри цилиндра), откуда:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad . \qquad (1.16)$$

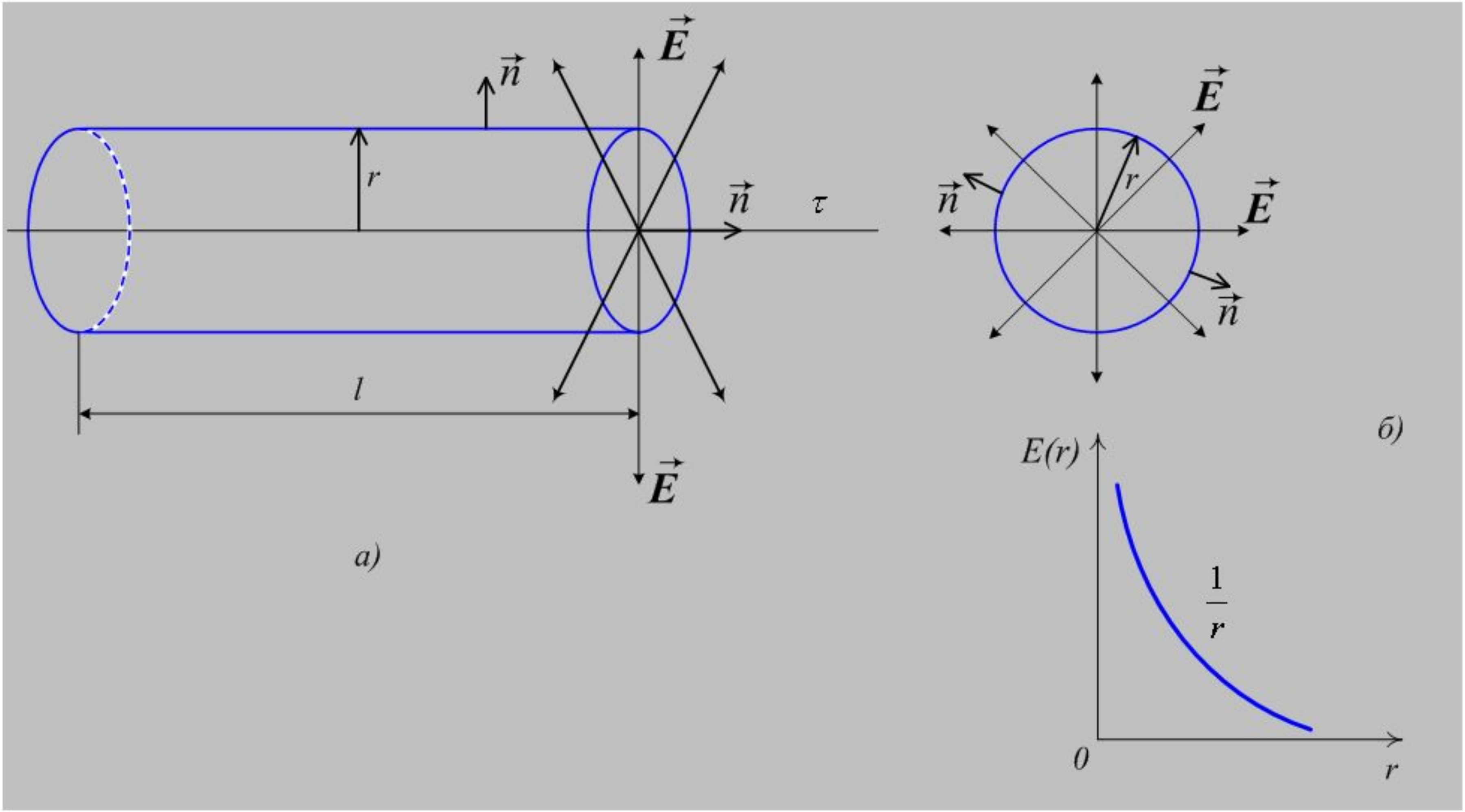


Рис. 1.15.

Как видно, **напряженность поля бесконечной заряженной равномерно нити убывает обратно пропорционально расстоянию до нити** (см. рис.1.15,б)