

1 Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Потенциальная энергия

Электростатическое поле является консервативным. Работу консервативной силы A_{12} можно представить в виде убыли потенциальных энергий тела в исходной W_{p1} и конечной W_{p2} точках перемещения:

$$\delta A = -dW_p \text{ или } A_{12} = -(W_{p2} - W_{p1}) = -\Delta W_p. \quad (1.5)$$

Потенциальная энергия пробного заряда q_{np} в поле заряда Q :

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{np}Q}{r} + C, \quad (1.6)$$

где C – произвольная постоянная.

Условимся считать потенциальную энергию пробного точечного заряда q_{np} равной нулю на бесконечно большом расстоянии от заряда Q . Подставляя в уравнение (1.6) $r = \infty$ и $W_p = 0$ получаем, что $C = 0$.

Таким образом, **потенциальная энергия** пробного **точечного** заряда q_{np} , находящегося на расстоянии r от точечного заряда Q , равна

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{np}Q}{r}. \quad (1.7)$$

Если пробный заряд находится в поле других точечных зарядов, то его потенциальная энергия определяется выражением:

$$W_p = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{пр} Q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^N W_{pi}, \quad (1.8)$$

т.е. потенциальная энергия W_p пробного заряда $q_{пр}$, находящегося в поле точечных зарядов Q_i , равна сумме потенциальных энергий W_{pi} этого заряда в полях, создаваемых каждым зарядом Q_i в отдельности.

В случае непрерывного распределения зарядов в пространстве потенциальная энергия пробного заряда определяется выражением:

$$W_p = \int_{(Q)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{пр} dQ}{r}. \quad (1.8)^*$$

2. Потенциал

Из соотношений (1.7) – (1.8) следует, что величина

$$\varphi = \frac{W}{q_{пр}} \quad (2.1)$$

от величины пробного заряда не зависит, а определяется только источниками электростатического поля Q и положением точки в данном поле \vec{r} .

Величину φ принимают в качестве энергетической характеристики поля, и называют потенциалом данной точки поля.

Согласно (2.1), потенциалом данной точки электростатического поля называется величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля.

В системе единиц СИ за единицу потенциала принимается 1В (вольт) – потенциал такой точки, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией в 1Дж, т.е. $1В=1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$.

Используя понятие потенциала (2.1), выражению (1.5) для работы сил электростатического поля по перемещению точечного заряда q из одной точки поля в другую можно придать вид

$$\delta A = -q d\varphi \Rightarrow A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.2)$$

Так как потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной (1.6), то и потенциал точки поля определяется с точностью до произвольной постоянной. **Физический смысл имеет не само понятие потенциала, а понятие разности потенциалов.** Конкретное значение потенциала для произвольной точки поля имеет смысл только при указании точки поля, в которой, условно, потенциал принят равным нулю.

Если электростатическое поле создается системой точечных зарядов, то из соотношений (1.8) и определения потенциала (2.1) следует, что:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i : \quad (2.3)$$

потенциал любой точки электростатического поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым из зарядов системы в отдельности (принцип суперпозиции).

Если же электростатическое поле создается непрерывно распределенным в пространстве зарядом, то из соотношений (1.8)* и (2.1) следует, что

$$\varphi = \int_{(Q)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \int_{(Q)} d\varphi. \quad (2.4)$$

3. Связь потенциала с напряженностью.

Электростатическое поле можно задать либо с помощью векторной величины $\vec{E}(x, y, z)$ – напряженность электростатического поля, являющейся силовой характеристикой поля, либо с помощью скалярной величины $\varphi(x, y, z)$ – потенциала, являющейся энергетической характеристикой поля. Очевидно, что между этими величинами существует определенная связь.

Для любого потенциального силового поля сила, действующая на частицу со стороны поля, и потенциальная энергия этой частицы в данной точке поля связаны соотношением:

$$\vec{F} = -grad W_p = -\nabla W_p. \quad (3.1)$$

На точечный заряд в электростатическом поле, со стороны поля действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Кроме того, точечный заряд в электростатическом поле обладает потенциальной энергией (2.1) $W_p = q\varphi$. Подставляя последние равенства в (3.1), получим взаимосвязь между \vec{E} и φ .

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \quad (3.2)$$

Вектор напряженности \vec{E} в данной точке электростатического поля равен градиенту потенциала в этой точке, взятому с противоположным знаком.

Градиент любой скалярной функции, это вектор, который по величине и направлению равен максимальной скорости возрастания скалярной функции по направлению. Следовательно, из (3.2) непосредственно следует, что вектор напряженности направлен в сторону наискорейшего **убывания** потенциала (знак минус) и по величине равен максимальной скорости убывания потенциала.

В декартовой системе координат равенство (3.2) имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \quad (3.3)$$

где

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = E_x; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = E_y; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_z. \quad (3.4)$$

проекции вектора напряженности на оси в декартовой системе координат.

Связь между \vec{E} и φ можно получить, рассматривая непосредственно выражение для работы сил поля при элементарном перемещении $d\vec{\ell}$ заряда q в поле:

$$\begin{aligned}\delta A &= (\vec{F}d\vec{\ell}) = q(\vec{E}d\vec{\ell}) = q[(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})(\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz)] = \\ &= q(E_x dx + E_y dy + E_z dz)\end{aligned}\quad (3.5)$$

С другой стороны

$$\delta A = -q d\varphi = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right),\quad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) и (3.6) получаем соотношение (3.4), а, следовательно (3.3).

Равенство (3.2) дает связь между \vec{E} и φ в дифференциальной форме. Интегральную форму их связи получим из сопоставления равенств (3.5) и (3.6):

$$-d\varphi = (\vec{E}d\vec{\ell}) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}d\vec{\ell}).\quad (3.7)$$

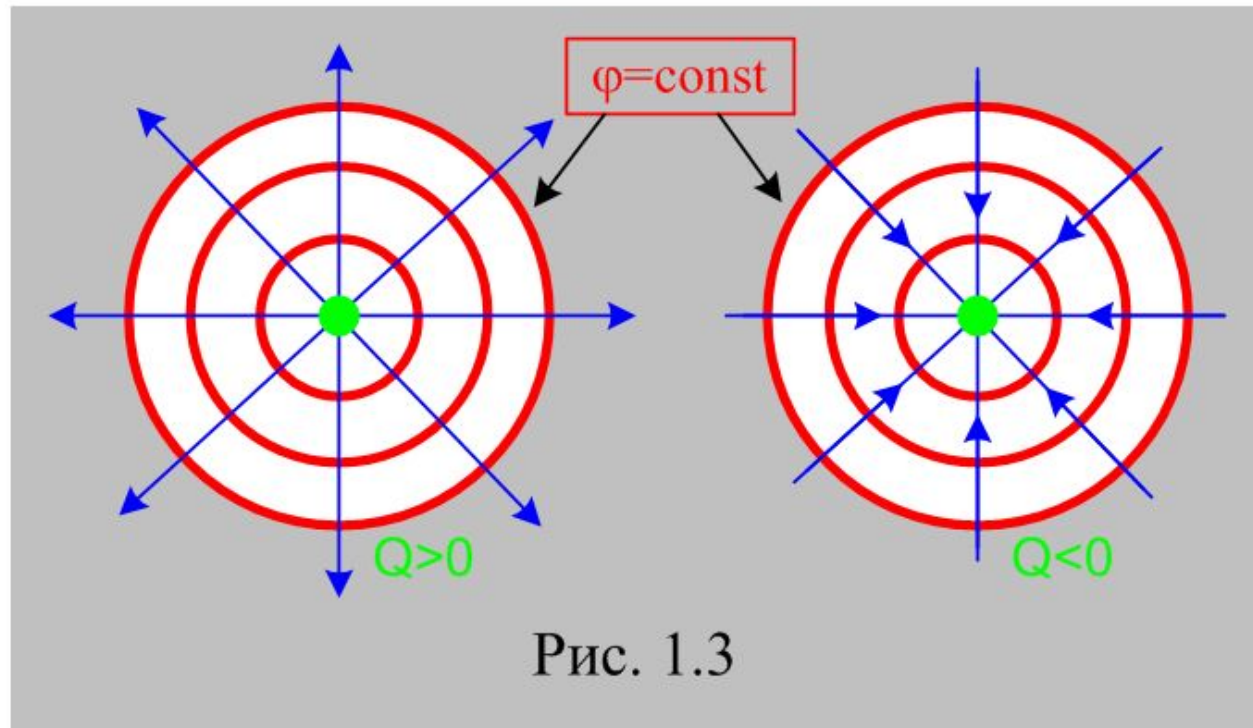
Для графического представления электростатического поля пользуются понятием силовых линий поля, а также понятием **эквипотенциальной поверхности**. **Эквипотенциальной поверхностью** называется геометрическое место точек пространства, потенциал в которых одинаков, т.е. $\varphi = \text{const}$.

Линии напряженности и эквипотенциальных поверхностей в любой точке электростатического поля взаимно перпендикулярны.

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом Q , в системе СИ равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Эквипотенциальные поверхности в этом случае являются **сферическими**, центры которых совпадают с положением точечного заряда Q , создающего поле, а силовые линии – радиально расходящиеся прямые, в случае $Q>0$, или сходящиеся, в случае $Q<0$.



4. Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля.

Из соотношения (3.7) следует, что если интегрирование производится по произвольному замкнутому контуру L , то $\varphi_1 = \varphi_2$, а, следовательно

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0 \quad (4.1)$$

Этот результат является следствием того, что электростатическое поле **потенциально**. В векторном анализе интеграл вида

$$\Gamma_a = \oint_L (\vec{a} d\vec{\ell}) = \oint_L a_\ell d\ell = \oint_L a d\ell \cos(\vec{a}, \hat{d\vec{\ell}}), \quad (4.2)$$

где $(d\vec{\ell})$ – векторный элемент контура L) называется **циркуляцией вектора \vec{a}** . Из определения (4.2) видно, что циркуляция Γ_a – величина алгебраическая, а ее знак определяется направлением обхода контура при интегрировании. При изменении направления обхода контура L на противоположное, циркуляция также изменяет свой знак.

Если для векторного поля \vec{a} циркуляция вектора \vec{a} по произвольному замкнутому контуру равна нулю, то такое поле называется **потенциальным**. В противном случае, поле называется **вихревым** или **соленоидальным**.

Это утверждение, устанавливающее важнейшее свойство любого векторного поля, а именно потенциальное оно или вихревое, называется **теоремой о циркуляции**.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.

5. Прямая и обратная задача электростатики. Уравнение Пуассона.

Прямой задачей электростатики называется такая, когда по известному распределению зарядов $\rho = \rho(x, y, z)$ в некоторой области пространства, необходимо определить напряженность $\vec{E}(\vec{r})$ и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ как функции положения точки поля. Эту задачу можно решить в общем случае двумя способами.

Первый способ. Пусть нам известно распределению зарядов в пространстве $\rho = \rho(x, y, z)$. Определим вектор напряженности электростатического поля \vec{E} , а затем из соотношения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) \quad (5.1)$$

определим разность потенциалов между любыми двумя точкам электростатического поля.

Согласно дифференциальной форме теореме Гаусса для напряженности электростатического поля

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\Delta \vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (5.2)$$

Продифференцируем это уравнение по x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Теперь поменяем порядок дифференцирования во втором и третьем слагаемых левой части получившегося уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5.3)$$

С другой стороны, уравнение (4.5) с учетом (4.10) представимо в виде:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (5.4)$$

Учитывая второе и третье слагаемое уравнения (5.4), из уравнения (5.3) получим дифференциальное уравнение для проекции вектора напряженности E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5.5)$$

Последовательное дифференцирование (5.2) по y и по z с использованием (5.4) дает, соответственно, уравнения для E_y и E_z :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (5.7)$$

Решая последовательно уравнения (5.5), (5.6) и (5.7) находим искомые компоненты $E_x = E_x(x, y, z)$, $E_y = E_y(x, y, z)$ и $E_z = E_z(x, y, z)$ напряженности электростатического поля, удовлетворяющие этим уравнениям и соответствующим граничным условиям. Тогда, разность потенциалов между любыми двумя точками в области существования электростатического поля находится с помощью равенства (5.1).

Дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Phi(x, y, z) \quad (5.8)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа в декартовой

системе координат, в математике называются **уравнениями Пуассона**.

Очевидно, что описанный способ решения электростатических задач, весьма громоздок и связан с большими вычислительными трудностями.

Второй способ. Более эффективен обратный подход к решению прямой задачи электростатики, когда по известному распределению зарядов определяют потенциал электростатического поля, как функцию точки $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Затем путем прямого дифференцирования этой функции по координатам с помощью равенств (1.16) можно легко найти проекции вектора \vec{E} на выбранные направления осей координат.

Вид уравнения, связывающего функцию $\varphi = \varphi(\vec{r})$ и $\rho = \rho(\vec{r})$, устанавливается весьма просто. Для этого равенство (3.2) умножим скалярно слева на оператор ∇ :

$$(\nabla \vec{E}) = -(\nabla(\nabla \varphi)). \quad (5.9)$$

Левая часть этого равенства (на основании теоремы Гаусса) равна ρ/ϵ_0 . Правая часть с учетом свойств скалярного произведения двух векторов может быть записана в символьной форме: $(\nabla(\nabla \varphi)) = \Delta \varphi$, где Δ – оператор Лапласа.

Таким образом, искомое уравнение, связывающее φ и ρ , в символьной форме имеет вид:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (5.10)$$

или в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \quad (5.11)$$

Выражения (5.10) или (5.11) называются **уравнениями Пуассона** для потенциала электростатического поля.

Таким образом, второй способ решения прямой задачи электростатики основан на решении только одного уравнения Пуассона для потенциала φ с соответствующими граничными условиями. Напряженность поля \vec{E} в этом случае определяется с помощью (3.4) и (3.3).

6. Расчет потенциала полей простейших симметрий.

6.1. Потенциал бесконечной заряженной плоскости.

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \text{const}$, равна:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x > 0, \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Зависимость (6.1) для случая $\sigma > 0$ изображена на рис. 1.5 б.

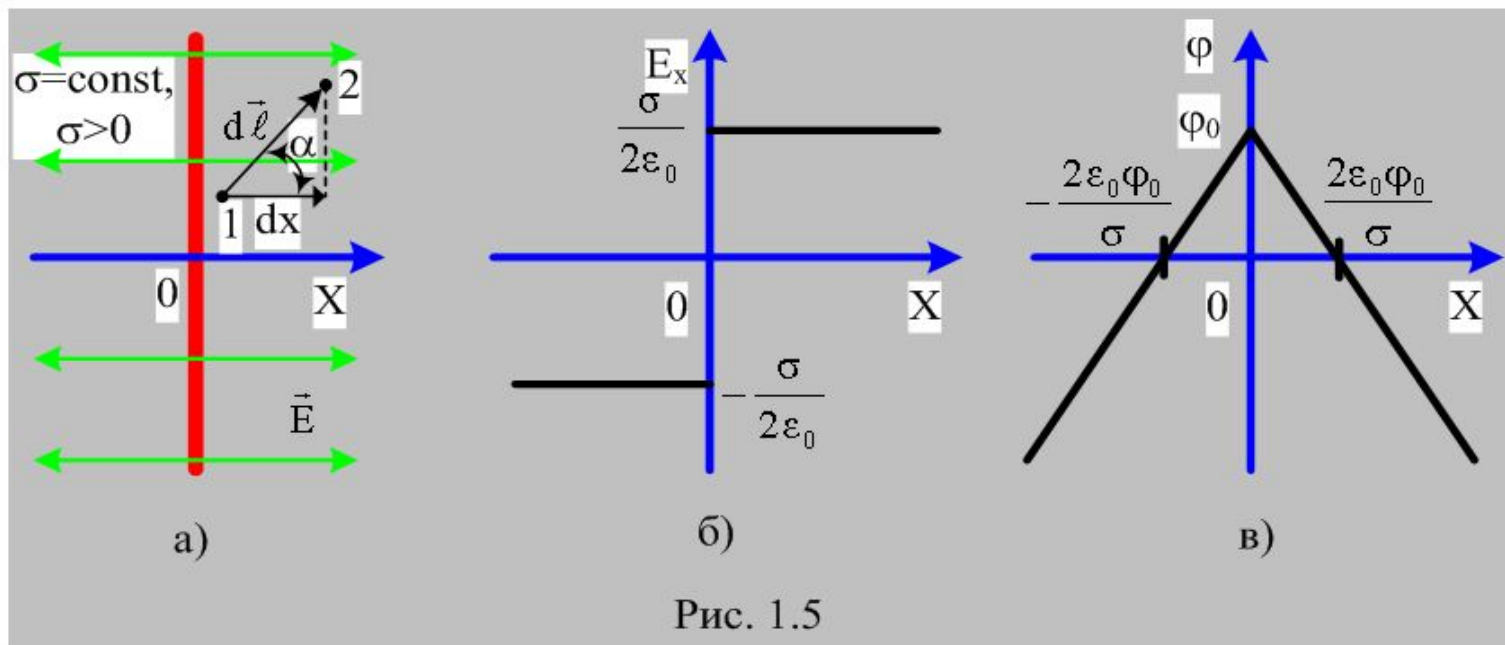


Рис. 1.5

Найдем выражение для потенциала в произвольной точке электростатического поля создаваемого такой системой. Для этого положим потенциал самой плоскости ($\mathbf{X}=\mathbf{0}$), равным φ_0 (можно принять $\varphi_0=0$). Так как поле однородно и направлено параллельно оси OX ($\vec{E} = E_x \vec{e}_x$), то потенциал поля зависит только от одной координаты, а связь между \vec{E} и φ (5.1) примет вид (см. рис. 1.5 а):

$$\varphi = \varphi_0 - \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_0^x E_x dl \cos \alpha = - \int_0^x E_x dx. \quad (6.2)$$

Подставляя в это выражение, поочередно выражение для напряженности поля (6.1) получим:

$$\varphi = \varphi_0 - \begin{cases} \int_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^x dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x, & \text{при } x > 0, \\ \int_0^x -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^x dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x, & \text{при } x > 0, \\ \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Зависимость (6.3) для случая $\sigma > 0$ изображена на рис. 1.5 г.

6.2. Потенциал двух бесконечных заряженных плоскостей.

Рассмотрим электростатическое поле создаваемое двумя бесконечно параллельными и равномерно заряженными плоскостями. Пусть поверхностная плотность зарядов на плоскостях равна соответственно σ_1 и σ_2 , а расстояние между ними \mathbf{d} (рис. 1.6, а). Как видно из рисунка, эти плоскости делят все пространство на три области I, II, III, в каждой из которых, согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность поля определяется суммой:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – напряженности, создаваемые в данной точке поля заряженными плоскостями 1 и 2.

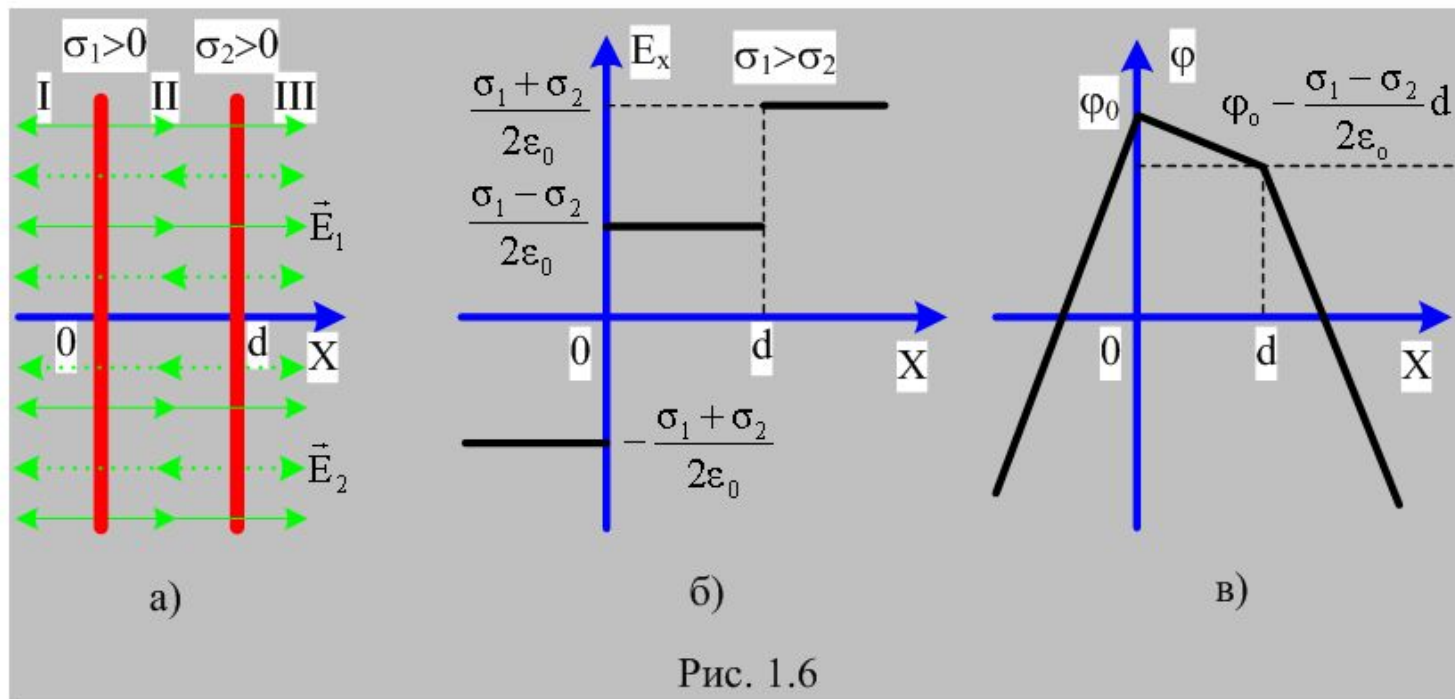


Рис. 1.6

Ранее мы получили следующее выражение для напряженности поля:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x < 0, \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } 0 < x < d, \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

На рис. 1.6, б) представлена зависимость (6.4), для случая $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_1 > \sigma_2$. Найдем теперь распределение потенциала. Допустим, что потенциал плоскости **1** равен φ_0 .

Для точек области **I** ($x \leq 0$) имеем (см. предыдущий пункт):

$$\varphi_0 - \varphi_I = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) = \int_0^x E_x dx = - \int_0^x \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} dx = - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} x.$$

Отсюда находим:

$$\varphi_I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} x + \varphi_0. \quad (6.5)^*$$

Поступая аналогично, находим значение потенциала электростатического поля в произвольной точке области **II** ($0 \leq x \leq d$):

$$\varphi_{II} = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} x + \varphi_0. \quad (6.5)^{**}$$

Для области **III** ($x \geq d$)

$$\begin{aligned} \varphi_0 - \varphi_{III} &= \int_0^d E_{IIx} dx + \int_d^x E_{IIIx} dx = \int_0^d \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} dx + \int_d^x \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} dx = \\ &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} d + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} (x - d) \end{aligned}$$

После элементарных преобразований окончательно получим:

$$\varphi_{III} = \varphi_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d. \quad (6.5)^{***}$$

Объединяя соотношения (6.5)*, (6.5)** и (6.5)*** можно записать:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} x, & \text{при } x \leq 0, \\ \varphi_0 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} x, & \text{при } 0 < x < d, \\ \varphi_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d, & \text{при } x \geq d. \end{cases} \quad (6.5)$$

На рис. 1.6, в) представлена зависимость (6.5).

Особый интерес представляет поле такой системы, когда поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. В этом случае $E_I = E_{II} = 0$ (см. соотношение 6.4), и все электростатическое поле сосредоточено между заряженными плоскостями,

величина напряженности которого равна $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, а распределение потенциала

электростатического поля

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0, & \text{при } x \leq 0, \\ \varphi_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x, & \text{при } 0 < x < d, \\ \varphi_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d, & \text{при } x \geq d. \end{cases}$$

при этом разность потенциалов между плоскостями равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \quad (6.6)$$

6.3 Потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса \mathbf{R} , равномерно заряженную по поверхности. Пусть \mathbf{Q} общий заряд сферы (рис. 1.7 а)). Поверхность сферы разделяет все пространство на две части: I) внутреннюю ($\mathbf{0} \leq \mathbf{r} < \mathbf{R}$); II) внешнюю ($\mathbf{r} \geq \mathbf{R}$).

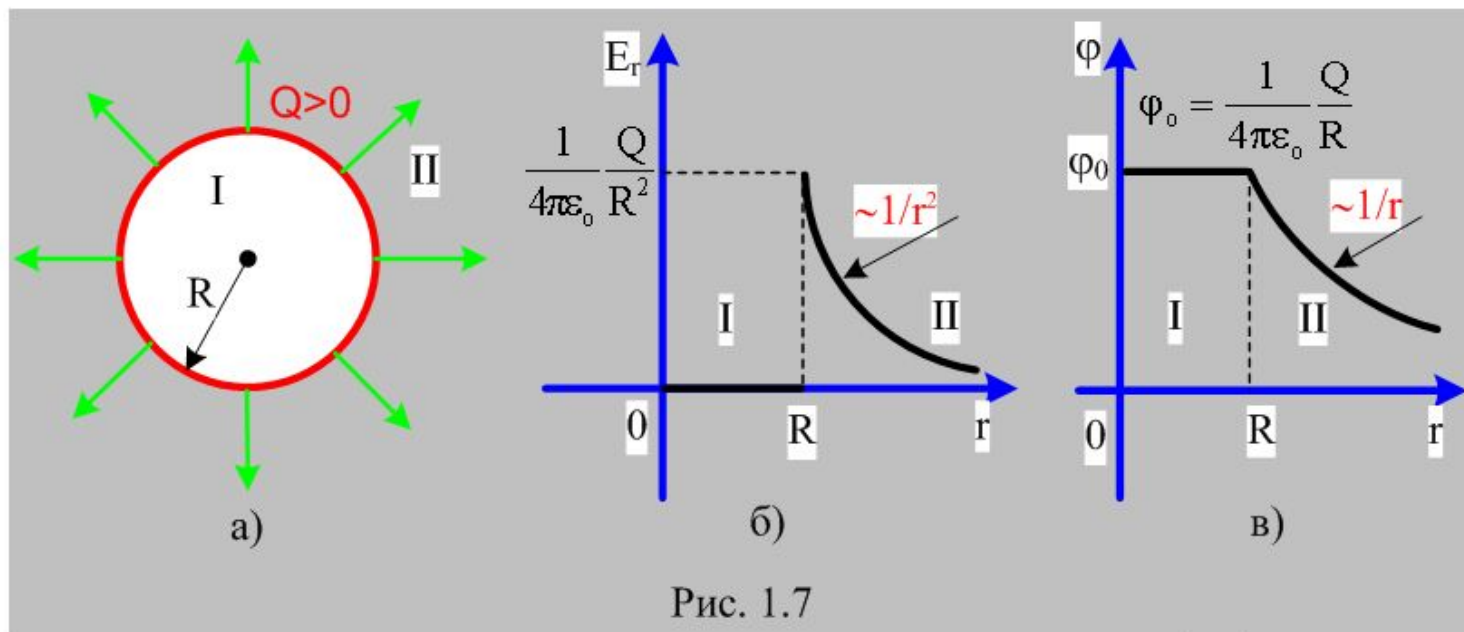


Рис. 1.7

Ранее, на основании теоремы Гаусса для вектора \vec{E} мы получили, что напряженность электростатического поля равномерно заряженной по поверхности сферы равна:

$$E_r = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.7)$$

Найдем теперь потенциал поля такой системы.

I) $0 \leq r < R$. Для любых двух точек внутри сферы $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0$,

так как в этой области $E=0$ (см. соотношение (6.7)). Это означает, что потенциал

во всей внутренней области сферы постоянен: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = C$.

II) $r \geq R$. Пусть потенциал на поверхности сферы ($r=R$) $\varphi = \varphi_0$. Так как поле является центрально симметричным, то для внешней области заряженной сферы имеем:

$$\varphi_0 - \varphi = \int_R^r E dr = \int_R^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

Допустим, что при $r \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow 0$ (выбор нулевого уровня потенциала) Тогда из последнего равенства находим значение для φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

которое в силу непрерывности потенциала определяет его величину и внутри сферы: $C = \varphi_0$.

Итак, потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы описывается равенствами:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.8)$$

Зависимости $E(r)$ (6.7) и $\varphi(r)$ (6.8) для случая $Q > 0$ приведены на рис. 1.7 б) и рис. 1.7 в), соответственно.

6.4 Потенциал бесконечной, равномерно заряженной, тонкостенной, цилиндрической поверхности. Потенциал бесконечной, равномерно заряженной нити

Тонкостенный цилиндр радиуса R , аналогично сферической поверхности, разделяет все пространство на две части: I) внутреннюю ($0 \leq r < R$); II) внешнюю ($r \geq R$). Пусть Q – общий заряд цилиндра (рис. 1.8 а).

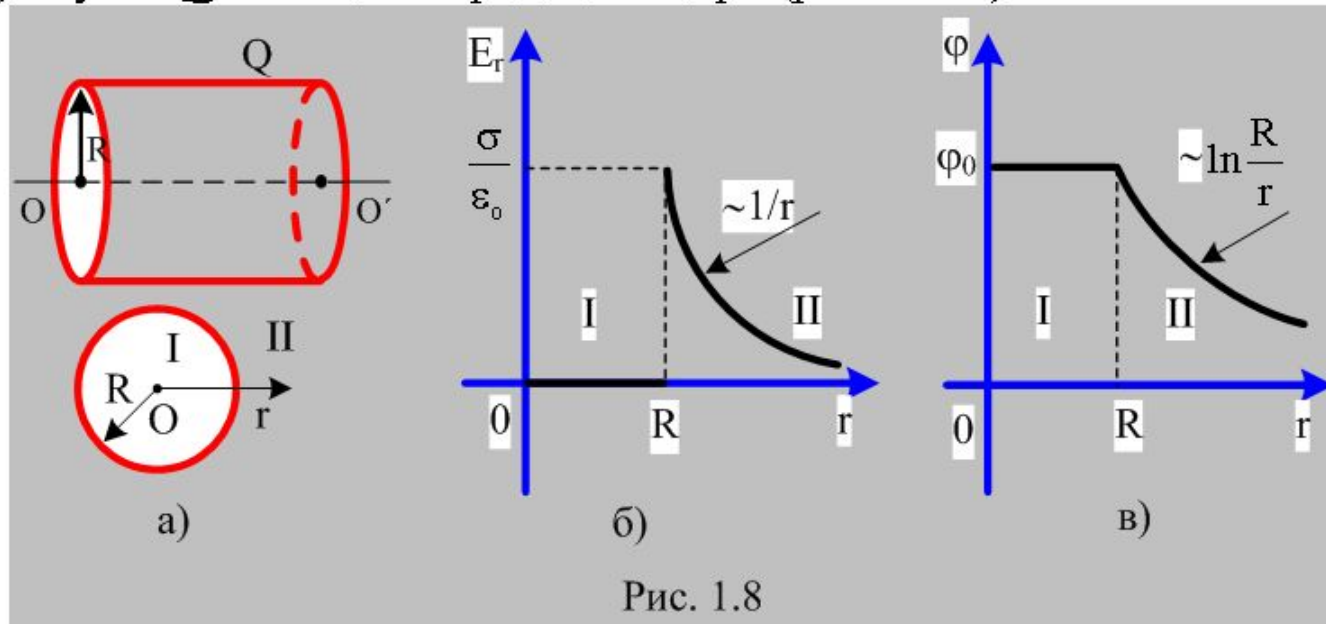


Рис. 1.8

Распределение заряда на поверхности цилиндра можно характеризовать

либо линейной $\tau = \frac{dq}{d\ell}$, либо поверхностной плотностью заряда $\sigma = \frac{dq}{dS}$, между

которыми существует простая связь $\sigma = \frac{\tau}{2\pi R}$.

Напряженность поля такой системы равна:

$$E = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R, \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.9)$$

Так как поле обладает цилиндрической симметрией, то разность потенциалов между любыми двумя точками электростатического поля зависит только от одной координаты r , а связь между \vec{E} и φ (5.1) имеет вид:

$$\varphi_0 - \varphi = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = \int_1^2 E_r dr. \quad (6.10)$$

Тогда для потенциала (смотри предыдущий пункт) на основании (6.9) и (6.10) имеем:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 = const, & \text{при } r < R, \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} + \varphi_0, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.11)$$

В формуле (6.11) φ_0 – значение потенциала на заряженной цилиндрической поверхности при $r = R$. Зависимости $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (6.9) и $\varphi(\mathbf{r})$ (6.11) для случая $Q > 0$ приведены на рис. 1.8 б) и рис. 1.8 в), соответственно.

Поступая аналогично, можно получить следующее выражение для потенциала бесконечной равномерно заряженной нити:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} + \varphi_0, \quad (6.12)$$

где φ_0 потенциал поля на расстоянии $r = r_0$ от нити.