

# 1 Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.

## Потенциальная энергия

**Электростатическое поле является консервативным.** Работу

консервативной силы  $A_{12}$  можно представить в виде убыли потенциальных энергий тела в исходной  $W_{p1}$  и конечной  $W_{p2}$  точках перемещения:

$$\delta A = -dW_p \text{ или } A_{12} = -(W_{p2} - W_{p1}) = -\Delta W_p. \quad (1.5)$$

Потенциальная энергия пробного заряда  $q_{np}$  в поле заряда  $Q$ :

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{np}Q}{r} + C, \quad (1.6)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Условимся считать потенциальную энергию пробного точечного заряда  $q_{np}$  равной нулю на бесконечно большом расстоянии от заряда  $Q$ . Подставляя в уравнение (1.6)  $r = \infty$  и  $W_p = 0$  получаем, что  $C = 0$ .

Таким образом, **потенциальная энергия** пробного точечного заряда  $q_{np}$ , находящегося на расстоянии  $r$  от точечного заряда  $Q$ , равна

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{np}Q}{r}. \quad (1.7)$$

Если пробный заряд находится в поле других точечных зарядов, то его потенциальная энергия определяется выражением:

$$W_p = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{np}Q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^N W_i, \quad (1.8)$$

т.е. потенциальная энергия  $W_p$  пробного заряда  $q_{np}$ , находящегося в поле точечных зарядов  $Q_i$ , равна сумме потенциальных энергий  $W_{pi}$  этого заряда в полях, создаваемых каждым зарядом  $Q_i$  в отдельности.

В случае непрерывного распределения зарядов в пространстве потенциальная энергия пробного заряда определяется выражением:

$$W_p = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{np}dQ}{r}. \quad (1.8)^*.$$

## 2. Потенциал

Из соотношений (1.7) – (1.8) следует, что величина

$$\varphi = \frac{W}{q_{\text{пр}}} \quad (2.1)$$

от величины пробного заряда не зависит, а определяется только источниками электростатического поля  $Q$  и положением точки в данном поле  $\vec{r}$ .

Величину  $\Phi$  принимают в качестве **энергетической характеристики поля, и называют потенциалом данной точки поля.**

Согласно (2.1), **потенциалом данной точки электростатического поля называется величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля.**

В системе единиц СИ за единицу потенциала принимается 1В (вольт) – потенциал такой точки, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией в 1Дж, т.е.  $1\text{В}=1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$ .

Используя понятие потенциала (2.1), выражению (1.5) для работы сил электростатического поля по перемещению точечного заряда  $q$  из одной точки поля в другую можно придать вид

$$\delta A = -q d\Phi \Rightarrow A_{12} = q(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (2.2)$$

Так как потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной (1.6), то и потенциал точки поля определяется с точностью до произвольной постоянной. **Физический смысл имеет не само понятие потенциала, а понятие разности потенциалов.** Конкретное значение потенциала для произвольной точки поля имеет смысл только при указании точки поля, в которой, условно, потенциал принят равным нулю.

Если электростатическое поле создается системой точечных зарядов, то из соотношений (1.8) и определения потенциала (2.1) следует, что:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i : \quad (2.3)$$

потенциал любой точки электростатического поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым из зарядов системы в отдельности (принцип суперпозиции).

Если же электростатическое поле создается непрерывно распределенным в пространстве зарядом, то из соотношений (1.8)\* и (2.1) следует, что

$$\Phi = \int_{(Q)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \int d\Phi. \quad (2.4)$$

### 3. Связь потенциала с напряженностью.

Электростатическое поле можно задать либо с помощью векторной величины  $\vec{E}(x, y, z)$  – напряженность электростатического поля, являющейся силовой характеристикой поля, либо с помощью скалярной величины  $\varphi(x, y, z)$  – потенциала, являющейся энергетической характеристикой поля. Очевидно, что между этими величинами существует определенная связь.

Для любого потенциального силового поля сила, действующая на частицу со стороны поля, и потенциальная энергия этой частицы в данной точке поля связаны соотношением:

$$\vec{F} = -\text{grad}W_p = -\nabla W_p. \quad (3.1)$$

На точечный заряд в электростатическом поле, со стороны поля действует сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Кроме того, точечный заряд в электростатическом поле обладает потенциальной энергией (2.1)  $W_p = q\Phi$ . Подставляя последние равенства в (3.1), получим взаимосвязь между  $\vec{E}$  и  $\Phi$ .

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi = -\nabla\Phi \quad (3.2)$$

**Вектор напряженности  $\vec{E}$  в данной точке электростатического поля равен градиенту потенциала в этой точке, взятыму с противоположным знаком.**

Градиент любой скалярной функции, это вектор, который по величине и направлению равен максимальной скорости возрастания скалярной функции по направлению. Следовательно, из (3.2) непосредственно следует, что вектор напряженности направлен в сторону наискорейшего **убывания** потенциала (знак минус) и по величине равен максимальной скорости убывания потенциала.

В декартовой системе координат равенство (3.2) имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \quad (3.3)$$

где

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x} = E_x; \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = E_y; \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = E_z. \quad (3.4)$$

проекции вектора напряженности на оси в декартовой системе координат.

Связь между  $\vec{E}$  и  $\Phi$  можно получить, рассматривая непосредственно выражение для работы сил поля при элементарном перемещении  $d\vec{\ell}$  заряда  $q$  в поле:

$$\begin{aligned}\delta A &= (\vec{F} d\vec{\ell}) = q(\vec{E} d\vec{\ell}) = q \left[ (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k})(\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) \right] = \\ &= q(E_x dx + E_y dy + E_z dz)\end{aligned}, \quad (3.5)$$

С другой стороны

$$\delta A = -qd\phi = -q \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right), \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) и (3.6) получаем соотношение (3.4), а, следовательно (3.3).

Равенство (3.2) дает связь между  $\vec{E}$  и  $\Phi$  в дифференциальной форме. Интегральную форму их связи получим из сопоставления равенств (3.5) и (3.6):

$$-d\phi = (\vec{E} d\vec{\ell}) \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}). \quad (3.7)$$

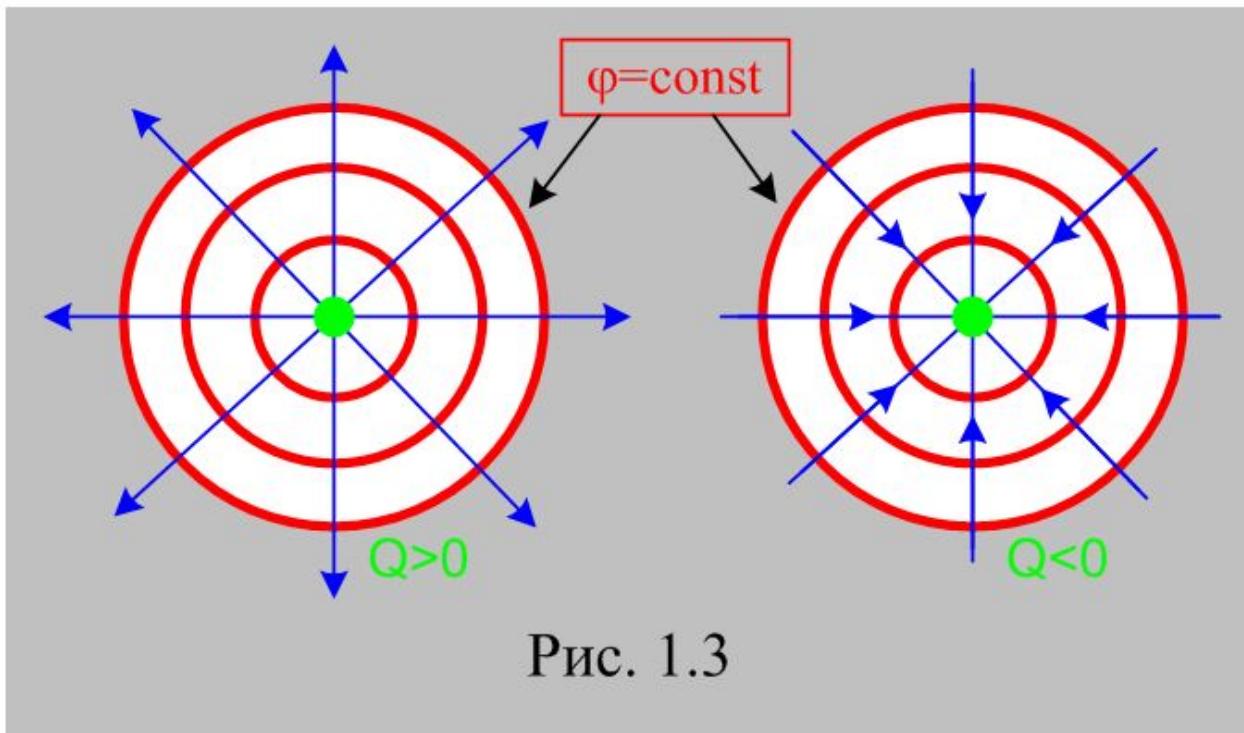
Для графического представления электростатического поля пользуются понятием силовых линий поля, а также понятием **эквипотенциальной поверхности**. **Эквипотенциальной поверхностью называется геометрическое место точек пространства, потенциал в которых одинаков, т.е.  $\Phi=\text{const}$ .**

**Линии напряженности и эквипотенциальных поверхностей в любой точке электростатического поля взаимно перпендикулярны.**

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ , в системе СИ равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Эквипотенциальные поверхности в этом случае являются **сферическими**, центры которых совпадают с положением точечного заряда  $Q$ , создающего поле, а силовые линии – радиально расходящиеся прямые, в случае  $Q>0$ , или сходящиеся, в случае  $Q<0$ .



#### 4. Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля.

Из соотношения (3.7) следует, что если интегрирование производится по произвольному замкнутому контуру  $L$ , то  $\varphi_1 = \varphi_2$ , а, следовательно

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0 \quad (4.1)$$

Этот результат является следствием того, что электростатическое поле **потенциально**. В векторном анализе интеграл вида

$$\Gamma_a = \oint_L (\vec{a} d\vec{\ell}) = \oint_L a_\ell d\ell = \oint_L a d\ell \cos(\hat{\vec{a}}, \hat{d\vec{\ell}}), \quad (4.2)$$

где  $(d\vec{\ell}$  – векторный элемент контура  $L$ ) называется **циркуляцией вектора**  $\vec{a}$ . Из определения (4.2) видно, что циркуляция  $\Gamma_a$  – величина алгебраическая, а ее знак определяется направлением обхода контура при интегрировании. При изменении направления обхода контура  $L$  на противоположное, циркуляция также изменяет свой знак.

**Если для векторного поля  $\vec{a}$  циркуляция вектора  $\vec{a}$  по произвольному замкнутому контуру равна нулю, то такое поле называется потенциальным. В противном случае, поле называется вихревым или соленоидальным.**

Это утверждение, устанавливающее важнейшее свойство любого векторного поля, а именно потенциальное оно или вихревое, **называется теоремой о циркуляции**.

**Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.**

## **5. Прямая и обратная задача электростатики. Уравнение Пуассона.**

Прямой задачей электростатики называется такая, когда по известному распределению зарядов  $\rho = \rho(x, y, z)$  в некоторой области пространства, необходимо определить напряженность  $\vec{E}(\vec{r})$  и потенциал  $\Phi(r)$  как функции положения точки поля. Этую задачу можно решить в общем случае двумя способами.

**Первый способ.** Пусть нам известно распределению зарядов в пространстве  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Определим вектор напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ , а затем из соотношения

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) \quad (5.1)$$

определим разность потенциалов между любыми двумя точкам электростатического поля.

Согласно дифференциальной форме теореме Гаусса для напряженности электростатического поля

$$div \vec{E} = (\Delta \vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (5.2)$$

Продифференцируем это уравнение по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Теперь поменяем порядок дифференцирования во втором и третьем слагаемых левой части получившегося уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (5.3)$$

С другой стороны, уравнение (4.5) с учетом (4.10) представимо в виде:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (5.4)$$

Учитывая второе и третье слагаемое уравнения (5.4), из уравнения (5.3) получим дифференциальное уравнение для проекции вектора напряженности  $E_x$ :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (5.5)$$

Последовательное дифференцирование (5.2) по  $y$  и по  $z$  с использованием (5.4) дает, соответственно, уравнения для  $E_y$  и  $E_z$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (5.7)$$

Решая последовательно уравнения (5.5), (5.6) и (5.7) находим искомые компоненты  $E_x = E_x(x, y, z)$ ,  $E_y = E_y(x, y, z)$  и  $E_z = E_z(x, y, z)$  напряженности электростатического поля, удовлетворяющие этим уравнениям и соответствующим граничным условиям. Тогда, разность потенциалов между любыми двумя точками в области существования электростатического поля находится с помощью равенства (5.1).

Дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Phi(x, y, z) \quad (5.8)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – дифференциальный оператор Лапласа в декартовой системе координат, в математике называются **уравнениями Пуассона**.

Очевидно, что описанный способ решения электростатических задач, весьма громоздок и связан с большими вычислительными трудностями.

**Второй способ.** Более эффективен обратный подход к решению прямой задачи электростатики, когда по известному распределению зарядов определяют потенциал электростатического поля, как функцию точки  $\Phi = \Phi(x, y, z)$ . Затем путем прямого дифференцирования этой функции по координатам с помощью равенств (1.16) можно легко найти проекции вектора  $\vec{E}$  на выбранные направления осей координат.

Вид уравнения, связывающего функцию  $\Phi = \Phi(\vec{r})$  и  $\rho = \rho(\vec{r})$ , устанавливается весьма просто. Для этого равенство (3.2) умножим скалярно слева на оператор  $\nabla$ :

$$(\nabla \vec{E}) = -(\nabla(\nabla \Phi)). \quad (5.9)$$

Левая часть этого равенства (на основании теоремы Гаусса) равна  $\rho/\epsilon_0$ . Правая часть с учетом свойств скалярного произведения двух векторов может быть записана в символьной форме:  $(\nabla(\nabla \Phi)) = \Delta \Phi$ , где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Таким образом, искомое уравнение, связывающее  $\Phi$  и  $\rho$ , в символьной форме имеет вид:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (5.10)$$

или в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (5.11)$$

Выражения (5.10) или (5.11) называются **уравнениями Пуассона** для потенциала электростатического поля.

Таким образом, второй способ решения прямой задачи электростатики основан на решении только одного уравнения Пуассона для потенциала  $\Phi$  с соответствующими граничными условиями. Напряженность поля  $\vec{E}$  в этом случае определяется с помощью (3.4) и (3.3).

## 6. Расчет потенциала полей простейших симметрий.

### 6.1. Потенциал бесконечной заряженной плоскости.

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, с поверхностью плотностью заряда  $\sigma=\text{const}$ , равна:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x > 0, \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Зависимость (6.1) для случая  $\sigma>0$  изображена на рис. 1.5 б.

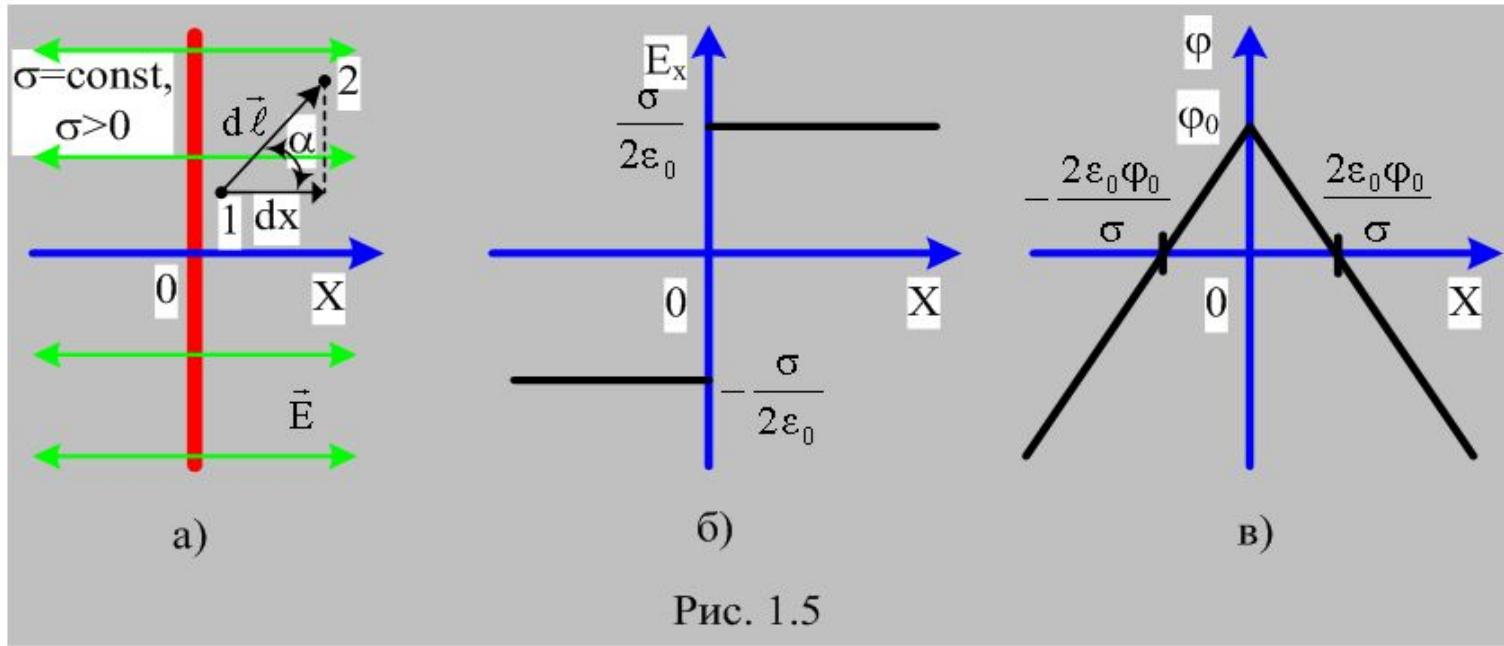


Рис. 1.5

Найдем выражение для потенциала в произвольной точке электростатического поля создаваемого такой системой. Для этого положим потенциал самой плоскости ( $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ ), равным  $\Phi_0$  (можно принять  $\Phi_0=0$ ). Так как поле однородно и направлено параллельно оси  $OX$  ( $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$ ), то потенциал поля зависит только от одной координаты, а связь между  $\vec{E}$  и  $\Phi$  (5.1) примет вид (см. рис. 1.5 а):

$$\Phi = \Phi_0 - \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_0^x E_x d\ell \cos\alpha = - \int_0^x E_x dx. \quad (6.2)$$

Подставляя в это выражение, поочередно выражение для напряженности поля (6.1) получим:

$$\Phi = \Phi_0 - \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \int\limits_0^x dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x > 0, \\ \int\limits_0^x -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \int\limits_0^x dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x > 0, \\ \Phi_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Зависимость (6.3) для случая  $\sigma > 0$  изображена на рис. 1.5 г.

## 6.2. Потенциал двух бесконечных заряженных плоскостей.

Рассмотрим электростатическое поле создаваемое двумя бесконечно параллельными и равномерно заряженными плоскостями. Пусть поверхностная плотность зарядов на плоскостях равна соответственно  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а расстояние между ними  $d$  (рис. 1.6, а). Как видно из рисунка, эти плоскости делят все пространство на три области I, II, III, в каждой из которых, согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность поля определяется суммой:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , где  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  – напряженности, создаваемые в данной точке поля заряженными плоскостями 1 и 2.

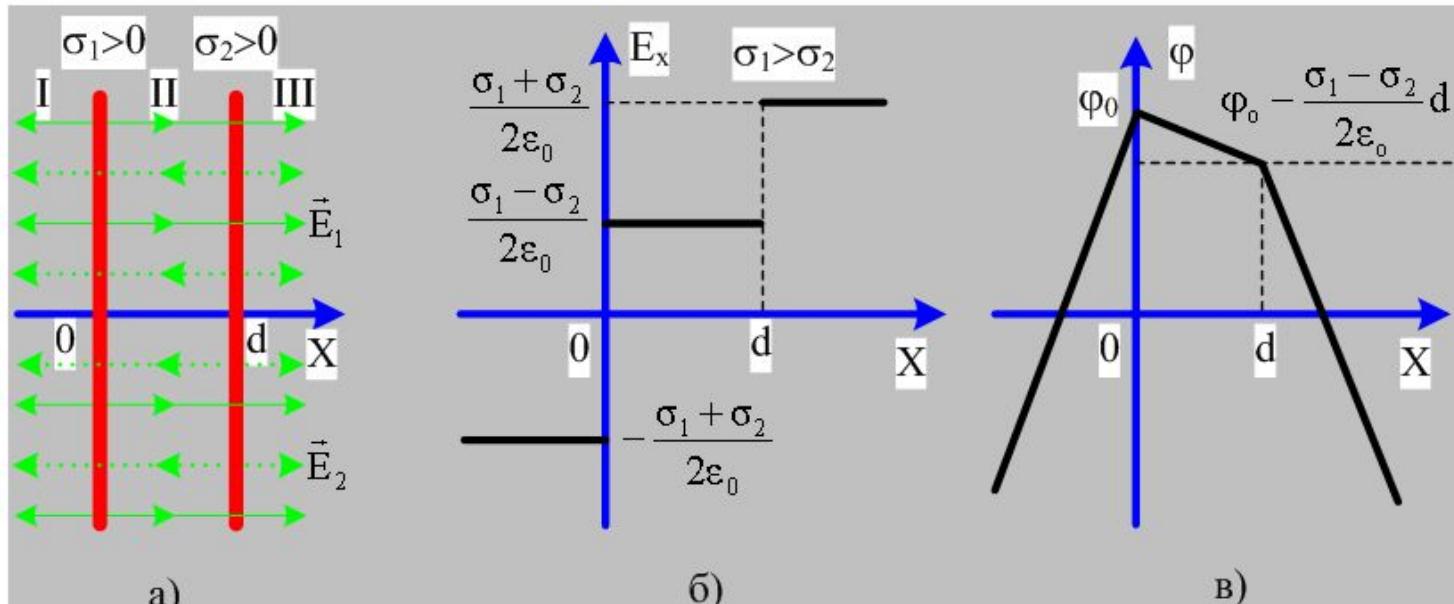


Рис. 1.6

Ранее мы получили следующее выражение для напряженности поля:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x < 0, \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } 0 < x < d, \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

На рис. 1.6, б) представлена зависимость (6.4), для случая  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$ . Найдем теперь распределение потенциала. Допустим, что потенциал плоскости **1** равен  $\Phi_0$ .

Для точек области **I** ( $x \leq 0$ ) имеем (см. предыдущий пункт):

$$\Phi_0 - \Phi_I = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) = \int_0^x E_x dx = - \int_0^x \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} dx = - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x.$$

Отсюда находим:

$$\Phi_I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \Phi_0. \quad (6.5)^*$$

Поступая аналогично, находим значение потенциала электростатического поля в произвольной точке области **II** ( $0 \leq x \leq d$ ):

$$\Phi_{II} = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \Phi_0. \quad (6.5)^{**}$$

Для области **III** ( $x \geq d$ )

$$\begin{aligned} \Phi_0 - \Phi_{III} &= \int_0^d E_{IIx} dx + \int_d^x E_{IIIx} dx = \int_0^d \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} dx + \int_d^x \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} dx = \\ &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} d + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} (x - d) \end{aligned}$$

После элементарных преобразований окончательно получим:

$$\Phi_{III} = \Phi_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d. \quad (6.5)***$$

Объединяя соотношения (6.5)\*, (6.5)\*\* и (6.5)\*\*\* можно записать:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x, & \text{при } x \leq 0, \\ \Phi_0 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} x, & \text{при } 0 < x < d, \\ \Phi_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d, & \text{при } x \geq d. \end{cases} \quad (6.5)$$

На рис. 1.6, в) представлена зависимость (6.5).

Особый интерес представляет поле такой системы, когда поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку, т.е.  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ . В этом случае  $E_I = E_{II} = 0$  (см. соотношение 6.4), и все электростатическое поле сосредоточено между заряженными плоскостями, величина напряженности которого равна  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , а распределение потенциала электростатического поля

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0, & \text{при } x \leq 0, \\ \Phi_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} x, & \text{при } 0 < x > d, \\ \Phi_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, & \text{при } x \geq d. \end{cases}$$

при этом разность потенциалов между плоскостями равна:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (6.6)$$

### 6.3 Потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса  $\mathbf{R}$ , равномерно заряженную по поверхности. Пусть  $\mathbf{Q}$  общий заряд сферы (рис. 1.7 а)). Поверхность сферы разделяет все пространство на две части: I) внутреннюю ( $0 \leq r < R$ ); II) внешнюю ( $r \geq R$ ).

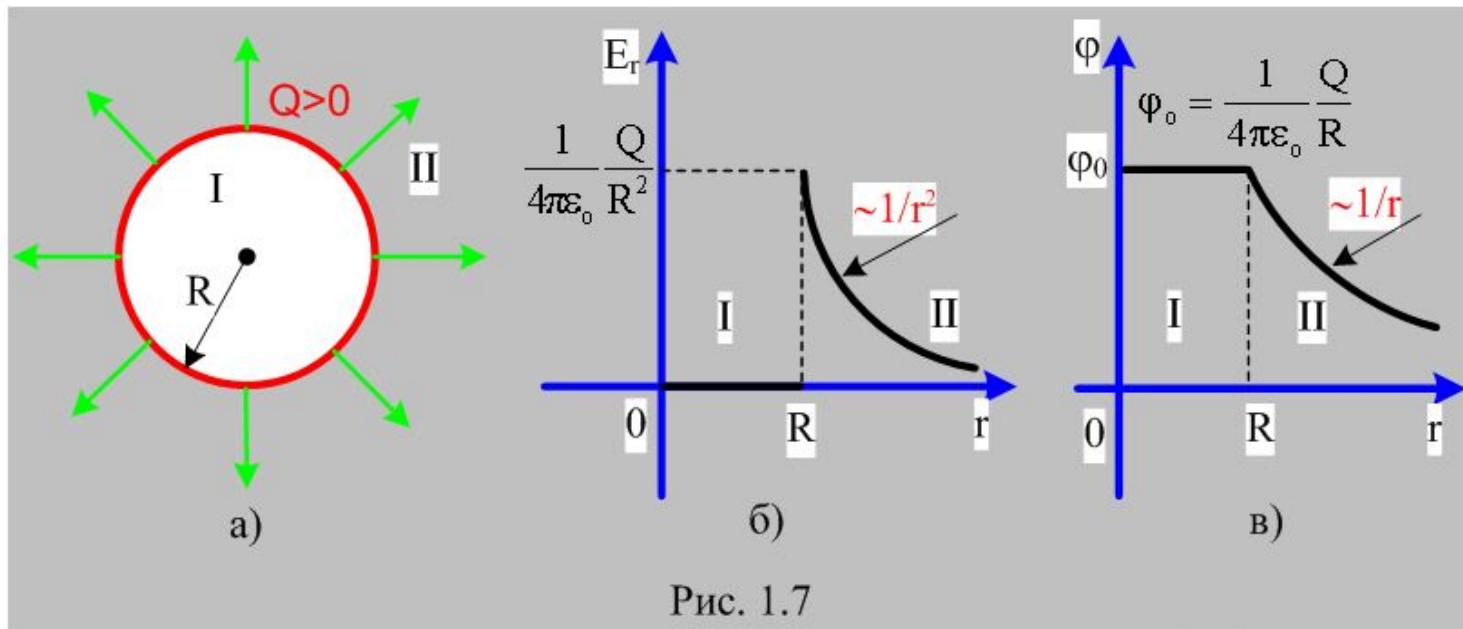


Рис. 1.7

Ранее, на основании теоремы Гаусса для вектора  $\vec{E}$  мы получили, что напряженность электростатического поля равномерно заряженной по поверхности сферы равна:

$$E_r = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.7)$$

Найдем теперь потенциал поля такой системы.

I)  $0 \leq r < R$ . Для любых двух точек внутри сферы  $\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0$ ,

так как в этой области  $E=0$  (см. соотношение (6.7)). Это означает, что потенциал

во всей внутренней области сферы постоянен:  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi = C$ .

II)  $r \geq R$ . Пусть потенциал на поверхности сферы ( $r = R$ )  $\Phi = \Phi_0$ . Так как поле является центрально симметричным, то для внешней области заряженной сферы имеем:

$$\Phi_o - \Phi = \int_R^r E dr = \int_R^r \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

Допустим, что при  $r \rightarrow \infty \Phi \rightarrow 0$  (выбор нулевого уровня потенциала) Тогда из последнего равенства находим значение для  $\Phi_0$ :

$$\Phi_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R},$$

которое в силу непрерывности потенциала определяет его величину и внутри сферы:  $C = \Phi_0$ .

Итак, потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы описывается равенствами:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R}, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.8)$$

Зависимости  $E(r)$  (6.7) и  $\phi(r)$  (6.8) для случая  $Q>0$  приведены на рис. 1.7 б) и рис. 1.7 в), соответственно.

#### 6.4 Потенциал бесконечной, равномерно заряженной, тонкостенной, цилиндрической поверхности. Потенциал бесконечной, равномерно заряженной нити

Тонкостенный цилиндр радиуса  $R$ , аналогично сферической поверхности, разделяет все пространство на две части: I) внутреннюю ( $0 \leq r < R$ ); II) внешнюю ( $r \geq R$ ). Пусть  $Q$  – общий заряд цилиндра (рис. 1.8 а).

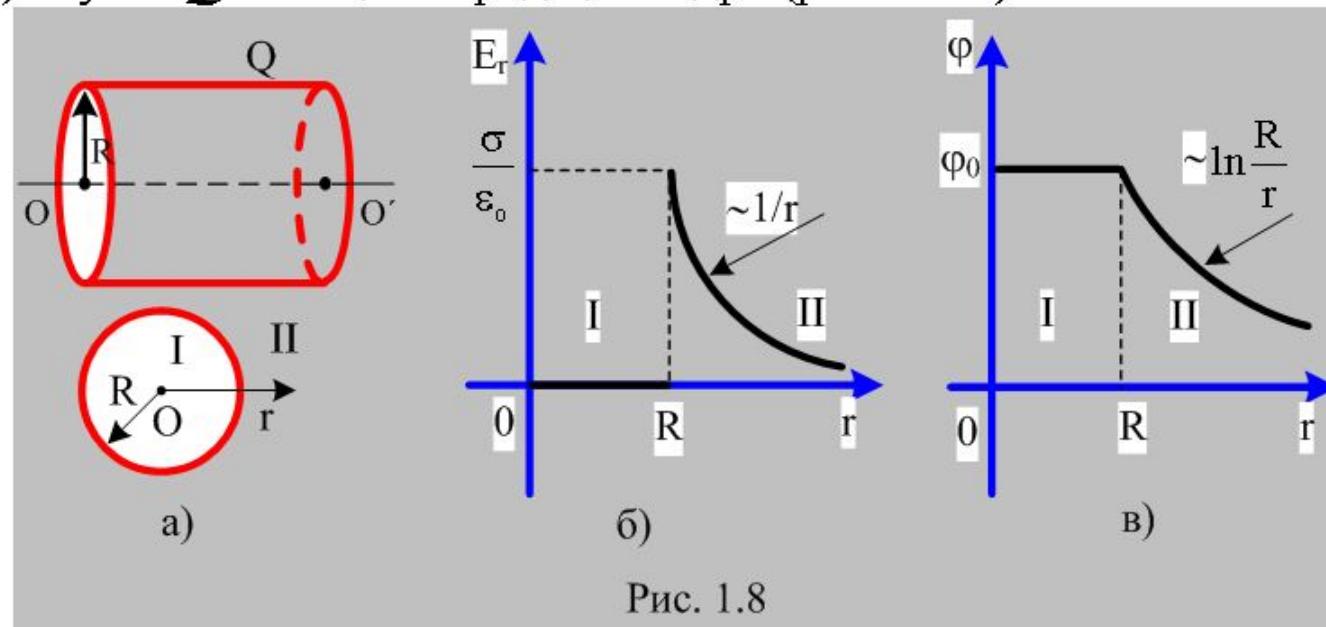


Рис. 1.8

Распределение заряда на поверхности цилиндра можно характеризовать

либо линейной  $\tau = \frac{dq}{d\ell}$ , либо поверхностной плотностью заряда  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ , между

$$\text{которыми существует простая связь } \sigma = \frac{\tau}{2\pi R}.$$

Напряженность поля такой системы равна:

$$E = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R, \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.9)$$

Так как поле обладает цилиндрической симметрией, то разность потенциалов между любыми двумя точками электростатического поля зависит только от одной координаты  $r$ , а связь между  $\vec{E}$  и  $\Phi$  (5.1) имеет вид:

$$\Phi_0 - \Phi = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = \int_1^2 E_r dr. \quad (6.10)$$

Тогда для потенциала (смотри предыдущий пункт) на основании (6.9) и (6.10) имеем:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_o = \text{const}, & \text{при } r < R, \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} + \Phi_o, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6.11)$$

В формуле (6.11)  $\Phi_0$  – значение потенциала на заряженной цилиндрической поверхности при  $r = R$ . Зависимости  $E(r)$  (6.9) и  $\Phi(r)$  (6.11) для случая  $Q > 0$  приведены на рис. 1.8 б) и рис. 1.8 в), соответственно.

Поступая аналогично, можно получить следующее выражение для потенциала бесконечной равномерно заряженной нити:

$$\Phi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} + \Phi_0, \quad (6.12)$$

где  $\Phi_0$  потенциал поля на расстоянии  $r = r_0$  от нити.