1 Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Потенциальная энергия

Электростатическое поле является консервативным. Работу консервативной силы A_{12} можно представить в виде убыли потенциальных энергий тела в исходной W_{p1} и конечной W_{p2} точках перемещения:

$$\delta A = -dW_p \quad \text{или} \quad A_{12} = -\left(W_{p2} - W_{p1}\right) = -\Delta W_p. \tag{1.5}$$

Потенциальная энергия пробного заряда $q_{пр}$ в поле заряда Q:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{пр}Q}{r} + C, \tag{1.6}$$

где C – произвольная постоянная.

Условимся считать потенциальную энергию пробного точечного заряда $q_{пр}$ равной нулю на бесконечно большом расстоянии от заряда Q. Подставляя в уравнение (1.6) $r = \infty$ и $W_p = 0$ получаем, что $C = 0$.

Таким образом, **потенциальная энергия** пробного **точечного заряда** $q_{пр}$, находящегося на расстоянии r от точечного заряда Q, равна

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{пр}Q}{r}. \tag{1.7}$$

Если пробный заряд находится в поле других точечных зарядов, то его потенциальная энергия определяется выражением:

$$W_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_{np} Q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^{N} W_i, \qquad (1.8)$$

т.е. потенциальная энергия $\boldsymbol{W_p}$ пробного заряда $\boldsymbol{q_{np}}$, находящегося в поле точечных зарядов $\boldsymbol{Q_i}$, равна сумме потенциальных энергий $\boldsymbol{W_{pi}}$ этого заряда в полях, создаваемых каждым зарядом $\boldsymbol{Q_i}$ в отдельности.

В случае непрерывного распределения зарядов в пространстве потенциальная энергия пробного заряда определяется выражением:

$$W_p = \int_{(Q)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_{np} dQ}{r}. \qquad (1.8)^*.$$

2. Потенциал

Из соотношений (1.7) – (1.8) следует, что величина

$$\varphi = \frac{W}{q_{пр}} \qquad (2.1)$$

от величины пробного заряда не зависит, а определяется только источниками электростатического поля $\boldsymbol{Q}$ и положением точки в данном поле $\vec{r}$.

Величину φ принимают в качестве **энергетической характеристики поля, и называют потенциалом данной точки поля**.

Согласно (2.1), **потенциалом данной точки электростатического поля называется величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля.**

В системе единиц СИ за единицу потенциала принимается 1В (вольт) – потенциал такой точки, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией в 1Дж, т.е. 1В=1 Дж/1 Кл.

Используя понятие потенциала (2.1), выражению (1.5) для работы сил электростатического поля по перемещению точечного заряда q из одной точки поля в другую можно придать вид

$$\delta A = -q d\varphi \Rightarrow A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{2.2}$$

Так как потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной (1.6), то и потенциал точки поля определяется с точностью до произвольной постоянной. **Физический смысл имеет не само понятие потенциала, а понятие разности потенциалов.** Конкретное значение потенциала для произвольной точки поля имеет смысл только при указании точки поля, в которой, условно, потенциал принят равным нулю.

Если электростатическое поле создается системой точечных зарядов, то из соотношений (1.8) и определения потенциала (2.1) следует, что:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i ; \tag{2.3}$$

потенциал любой точки электростатического поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым из зарядов системы в отдельности (принцип суперпозиции).

Если же электростатическое поле создается непрерывно распределенным в пространстве зарядом, то из соотношений (1.8)* и (2.1) следует, что

$$\varphi = \int\limits_{(Q)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \int\limits_{(Q)} d\varphi. \tag{2.4}$$

3. Связь потенциала с напряженностью.

Электростатическое поле можно задать либо с помощью векторной величины $\vec{E}(x,y,z)$ – напряженность электростатического поля, являющейся силовой характеристикой поля, либо с помощью скалярной величины $\boldsymbol{\varphi(x,y,z)}$ – потенциала, являющейся энергетической характеристикой поля. Очевидно, что между этими величинами существует определенная связь.

Для любого потенциального силового поля сила, действующая на частицу со стороны поля, и потенциальная энергия этой частицы в данной точке поля связаны соотношением:

$$\vec{F} = -gradW_p = -\nabla W_p. \tag{3.1}$$

На точечный заряд в электростатическом поле, со стороны поля действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Кроме того, точечный заряд в электростатическом поле обладает потенциальной энергией (2.1) $W_p = q\varphi$. Подставляя последние равенства в (3.1), получим взаимосвязь между $\vec{E}$ и $\boldsymbol{\varphi}$.

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \qquad (3.2)$$

Вектор напряженности $\vec{E}$ в данной точке электростатического поля равен градиенту потенциала в этой точке, взятому с противоположным знаком.

Градиент любой скалярной функции, это вектор, который по величине и направлению равен максимальной скорости возрастания скалярной функции по направлению. Следовательно, из (3.2) непосредственно следует, что вектор напряженности направлен в сторону наискорейшего **убывания** потенциала (знак минус) и по величине равен максимальной скорости убывания потенциала.

В декартовой системе координат равенство (3.2) имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \qquad (3.3)$$

где

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = E_x;\; -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = E_y;\; -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_z. \qquad (3.4)$$

проекции вектора напряженности на оси в декартовой системе координат.

Связь между $\vec{E}$ и φ можно получить, рассматривая непосредственно выражение для работы сил поля при элементарном перемещении $d\vec{\ell}$ заряда q в поле:

$$\delta A = (\vec{F}d\vec{\ell}) = q(\vec{E}d\vec{\ell}) = q\left[\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right)\left(\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz\right)\right] = \\ = q\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right), \quad (3.5)$$

С другой стороны

$$\delta A = -qd\varphi = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right), \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) и (3.6) получаем соотношение (3.4), а, следовательно (3.3).

Равенство (3.2) дает связь между $\vec{E}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ в дифференциальной форме. Интегральную форму их связи получим из сопоставления равенств (3.5) и (3.6):

$$-d\varphi = \left(\vec{E}d\vec{\ell}\right) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}d\vec{\ell}). \quad (3.7)$$

Для графического представления электростатического поля пользуются понятием силовых линий поля, а также понятием **эквипотенциальной поверхности. Эквипотенциальной поверхностью называется геометрическое место точек пространства, потенциал в которых одинаков, т.е. φ=const.**

Линии напряженности и эквипотенциальных поверхностей в любой точке электростатического поля взаимно перпендикулярны.

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом $\boldsymbol{Q}$, в системе СИ равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r}.$$

Эквипотенциальные поверхности в этом случае являются **сферическими**, центры которых совпадают с положением точечного заряда $\boldsymbol{Q}$, создающего поле, а силовые линии – радиально расходящиеся прямые, в случае Q>0, или сходящиеся, в случае Q<0.

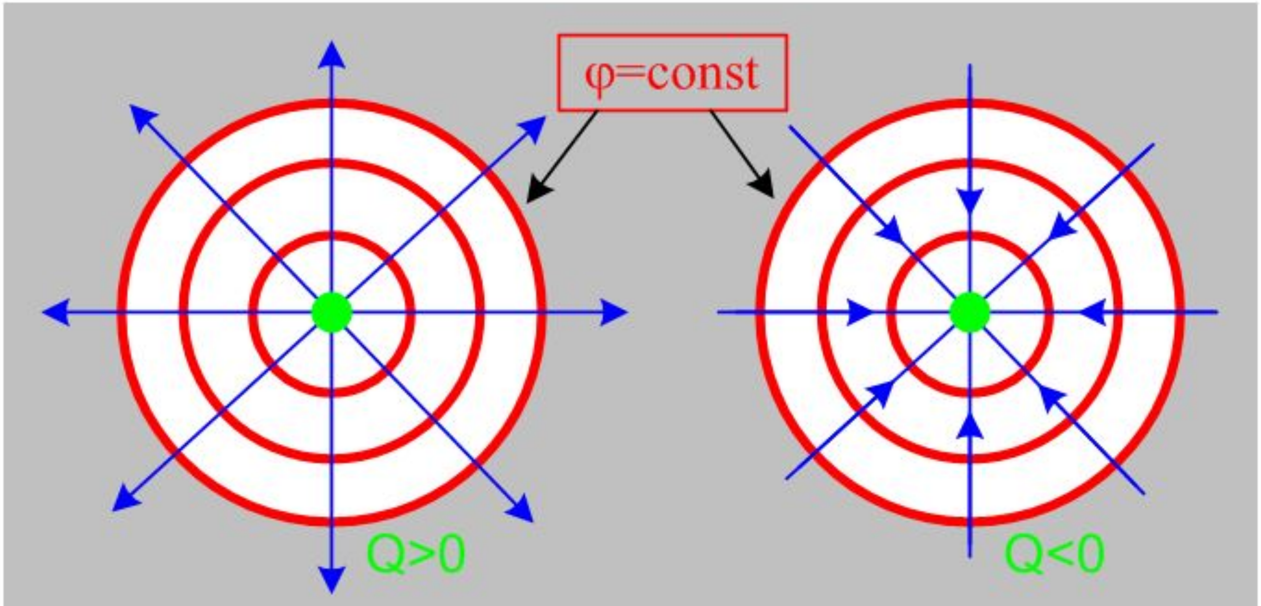

Рис. 1.3

4. Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля.

Из соотношения (3.7) следует, что если интегрирование производится по произвольному замкнутому контуру $\boldsymbol{L}$, то $\boldsymbol{\varphi_1=\varphi_2}$, а, следовательно

$$\oint_L (\vec{E}d\vec{\ell}) = 0 \tag{4.1}$$

Этот результат является следствием того, что электростатическое поле **потенциально**. В векторном анализе интеграл вида

$$\varGamma_{\mathrm{a}} = \oint_L (\vec{\mathrm{a}}d\vec{\ell}) = \oint_L \mathrm{a}_{\ell} d\ell = \oint_L \mathrm{a} d\ell \cos(\widehat{\vec{\mathrm{a}}, d\vec{\ell}}), \tag{4.2}$$

где ($d\vec{\ell}$ – векторный элемент контура $\boldsymbol{L}$) называется **циркуляцией вектора** $\vec{a}$. Из определения (4.2) видно, что циркуляция $\boldsymbol{\varGamma_a}$ – величина алгебраическая, а ее знак определяется направлением обхода контура при интегрировании. При изменении направления обхода контура $\boldsymbol{L}$ на противоположное, циркуляция также изменяет свой знак.

Если для векторного поля $\vec{a}$ циркуляция вектора $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру равна нулю, то такое поле называется потенциальным. В противном случае, поле называется вихревым или соленоидальным.

Это утверждение, устанавливающее важнейшее свойство любого векторного поля, а именно потенциальное оно или вихревое, **называется теоремой о циркуляции.**

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.

5. Прямая и обратная задача электростатики. Уравнение Пуассона.

Прямой задачей электростатики называется такая, когда по известному распределению зарядов **ρ=ρ(x,y,z)** в некоторой области пространства, необходимо определить напряженность $\vec{E}(\vec{r})$ и потенциал **φ(r)** как функции положения точки поля. Эту задачу можно решить в общем случае двумя способами.

Первый способ. Пусть нам известно распределению зарядов в пространстве **ρ=ρ(x,y,z)**. Определим вектор напряженности электростатического поля $\vec{E}$, а затем из соотношения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}d\vec{\ell}) \qquad (5.1)$$

определим разность потенциалов между любыми двумя точкам электростатического поля.

Согласно дифференциальной форме теореме Гаусса для напряженности электростатического поля

$$div\vec{E} = \left(\Delta\vec{E}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_o} \qquad (5.2)$$

Продифференцируем это уравнение по $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Теперь поменяем порядок дифференцирования во втором и третьем слагаемых левой части получившегося уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{\partial \rho}{\partial x}. \qquad (5.3)$$

С другой стороны, уравнение (4.5) с учетом (4.10) представимо в виде:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}. \qquad (5.4)$$

Учитывая второе и третье слагаемое уравнения (5.4), из уравнения (5.3) получим дифференциальное уравнение для проекции вектора напряженности $\boldsymbol{E_x}$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{\partial \rho}{\partial x}. \qquad (5.5)$$

Последовательное дифференцирование (5.2) по y и по z с использованием (5.4) дает, соответственно, уравнения для E_y и E_z:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=\frac{1}{\varepsilon_o}\frac{\partial\rho}{\partial y}, \qquad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=\frac{1}{\varepsilon_o}\frac{\partial\rho}{\partial z} \qquad (5.7)$$

Решая последовательно уравнения (5.5), (5.6) и (5.7) находим искомые компоненты $E_x=E_x(x,y,z)$, $E_y=E_y(x,y,z)$ и $E_z=E_z(x,y,z)$ напряженности электростатического поля, удовлетворяющие этим уравнениям и соответствующим граничным условиям. Тогда, разность потенциалов между любыми двумя точками в области существования электростатического поля находится с помощью равенства (5.1).

Дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\Phi(x,y,z) \qquad (5.8)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа в декартовой системе координат, в математике называются **уравнениями Пуассона.**

Очевидно, что описанный способ решения электростатических задач, весьма громоздок и связан с большими вычислительными трудностями.

Второй способ. Более эффективен обратный подход к решению прямой задачи электростатики, когда по известному распределению зарядов определяют потенциал электростатического поля, как функцию точки $\boldsymbol{\varphi=\varphi(x,y,z)}$. Затем путем прямого дифференцирования этой функции по координатам с помощью равенств (1.16) можно легко найти проекции вектора $\vec{E}$ на выбранные направления осей координат.

Вид уравнения, связывающего функцию $\varphi = \varphi(\vec{r})$ и $\rho = \rho(\vec{r})$, устанавливается весьма просто. Для этого равенство (3.2) умножим скалярно слева на оператор ∇:

$$(\nabla\vec{E}) = -(\nabla(\nabla\varphi)). \tag{5.9}$$

Левая часть этого равенства (на основании теоремы Гаусса) равна $\boldsymbol{\rho/\varepsilon_0}$. Правая часть с учетом свойств скалярного произведения двух векторов может быть записана в символьной форме: $(\boldsymbol{\nabla(\nabla\varphi))=\Delta\varphi}$, где $\boldsymbol{\Delta}$ – оператор Лапласа.

Таким образом, искомое уравнение, связывающее $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\rho}$, в символьной форме имеет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o}. \tag{5.10}$$

или в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_o}. \qquad (5.11)$$

Выражения (5.10) или (5.11) называются **уравнениями Пуассона** для потенциала электростатического поля.

Таким образом, второй способ решения прямой задачи электростатики основан на решении только одного уравнения Пуассона для потенциала φ с соответствующими граничными условиями. Напряженность поля $\vec{E}$ в этом случае определяется с помощью (3.4) и (3.3).

6. Расчет потенциала полей простейших симметрий.

6.1. Потенциал бесконечной заряженной плоскости.

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, с поверхностной плотностью заряда σ=const, равна:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{e}_x, & \text{при } x>0,\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{e}_x, & \text{при } x<0.\end{cases} \qquad (6.1)$$

Зависимость (6.1) для случая σ>0 изображена на рис. 1.5 б.

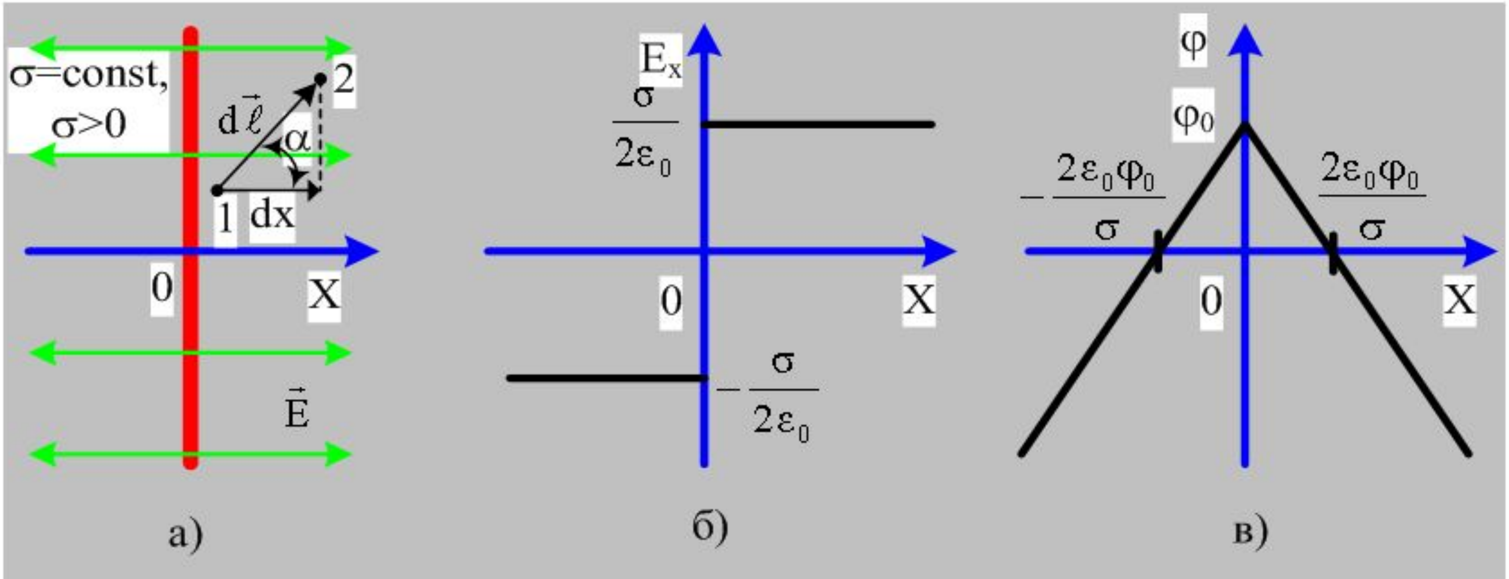

Рис. 1.5

Найдем выражение для потенциала в произвольной точке электростатического поля создаваемого такой системой. Для этого положим потенциал самой плоскости (**X=0**), равным $\boldsymbol{\varphi_0}$ (можно принять $\boldsymbol{\varphi_0}$**=0**). Так как поле однородно и направлено параллельно оси OX ($\vec{E} = E_x\vec{e}_x$), то потенциал поля зависит только от одной координаты, а связь между $\vec{E}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ (5.1) примет вид (см. рис. 1.5 а):

$$\varphi = \varphi_0 - \int_1^2 (\vec{E}d\vec{\ell}) = -\int_0^x E_x d\ell\cos\alpha = -\int_0^x E_x dx. \qquad (6.2)$$

Подставляя в это выражение, поочередно выражение для напряженности поля (6.1) получим:

$$\varphi = \varphi_0 - \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \int\limits_0^x dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x > 0, \\ \int\limits_0^x - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \int\limits_0^x dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx, & \text{при } x > 0, \\ \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x, & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Зависимость (6.3) для случая $\sigma>0$ изображена на рис. 1.5 г.

6.2. Потенциал двух бесконечных заряженных плоскостей.

Рассмотрим электростатическое поле создаваемое двумя бесконечно параллельными и равномерно заряженными плоскостями. Пусть поверхностная плотность зарядов на плоскостях равна соответственно $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_2}$, а расстояние между ними **d** (рис. 1.6, а). Как видно из рисунка, эти плоскости делят все пространство на три области I, II, III, в каждой из которых, согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность поля определяется суммой:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности, создаваемые в данной точке поля заряженными плоскостями 1 и 2.

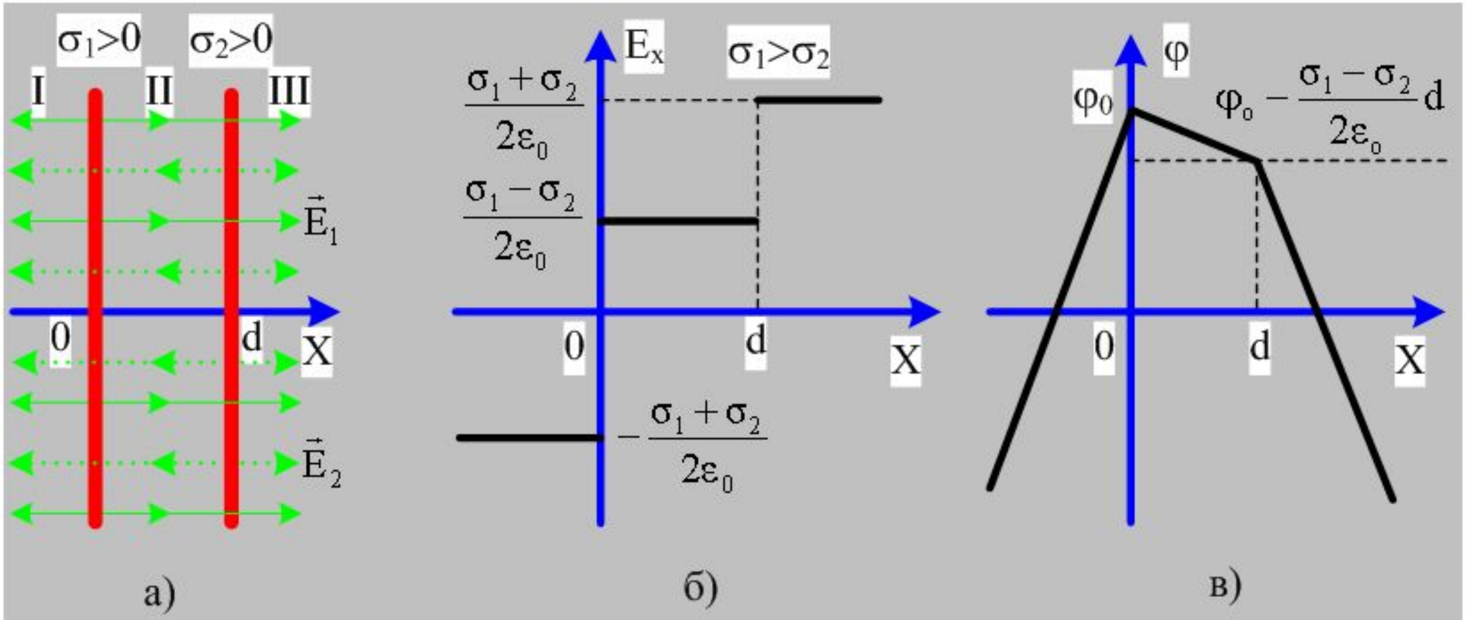

Рис. 1.6

Ранее мы получили следующее выражение для напряженности поля:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x, & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x, & \text{при } 0 < x < d, \\ \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x, & \text{при } x > 0. \end{cases} \qquad (6.4)$$

На рис. 1.6, б) представлена зависимость (6.4), для случая $\boldsymbol{\sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ \sigma_1>\sigma_2}$. Найдем теперь распределение потенциала. Допустим, что потенциал плоскости **1** равен $\boldsymbol{\varphi_0}$.

Для точек области **I** (**x≤0**) имеем (см. предыдущий пункт):

$$\varphi_0-\varphi_I=\int_1^2(\vec{E}d\vec{l})=\int_0^x E_x dx=-\int_0^x\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}dx=-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}x.$$

Отсюда находим:

$$\varphi_{\mathrm{I}}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_o}\mathrm{x}+\varphi_o. \qquad (6.5)^*$$

Поступая аналогично, находим значение потенциала электростатического поля в произвольной точке области **II** (**0≤x≤d**):

$$\varphi_{\mathrm{II}}=-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_o}\mathrm{x}+\varphi_o. \qquad (6.5)^{**}$$

Для области III (x≥d)

$$\varphi_0-\varphi_{III}=\int_0^d E_{IIx}dx+\int_d^x E_{IIIx}dx=\int_0^d\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}dx+\int_d^x\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}dx=$$
$$=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}d+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}(x-d).$$

После элементарных преобразований окончательно получим:

$$\varphi_{III} = \varphi_o - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_o} x + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o} d. \qquad (6.5)^{***}$$

Объединяя соотношения (6.5)*, (6.5)** и (6.5)*** можно записать:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_o + \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_o} x, \text{ при } x \le 0, \\ \varphi_o - \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_o} x, \text{ при } 0 < x < d, \\ \varphi_o - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_o} x + \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_o} d, \text{ при } x \ge d. \end{cases} \qquad (6.5)$$

На рис. 1.6, в) представлена зависимость (6.5).

Особый интерес представляет поле такой системы, когда поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку, т.е. $\boldsymbol{\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma}$. В этом случае $E_I = E_{II} = 0$ (см. соотношение 6.4), и все электростатическое поле сосредоточено между заряженными плоскостями, величина напряженности которого равна $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$, а распределение потенциала электростатического поля

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_o, & \text{при } x \le 0, \\ \varphi_o - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} x, & \text{при } 0 < x > d, \\ \varphi_o - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} d, & \text{при } x \ge d. \end{cases}$$

при этом разность потенциалов между плоскостями равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} d \qquad (6.6)$$

6.3 Потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса **R**, равномерно заряженную по поверхности. Пусть **Q** общий заряд сферы (рис. 1.7 а)). Поверхность сферы разделяет все пространство на две части: I) внутреннюю (**$0 \le r < R$**); II) внешнюю (**$r \ge R$**).

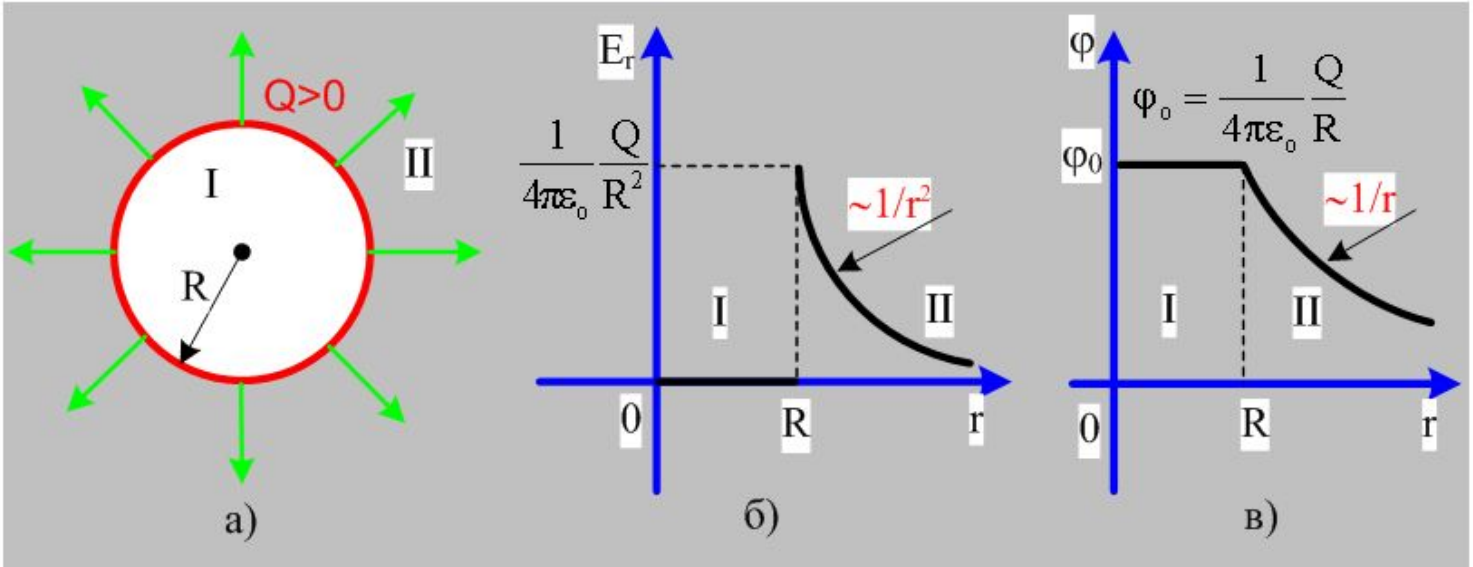

Рис. 1.7

Ранее, на основании теоремы Гаусса для вектора $\vec{E}$ мы получили, что напряженность электростатического поля равномерно заряженной по поверхности сферы равна:

$$E_r = \begin{cases} 0, & \text{при}\, 0 \le r < R, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r^2}, & \text{при}\, r \ge R. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Найдем теперь потенциал поля такой системы.

I) **0≤r<R**. Для любых двух точек внутри сферы $\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 (\vec{E}d\vec{\ell}) = 0,$

так как в этой области $E=0$ (см. соотношение (6.7)). Это означает, что потенциал во всей внутренней области сферы постоянен: $\varphi_1=\varphi_2=\varphi=C$.

II) **$r \geq R$**. Пусть потенциал на поверхности сферы (**$r=R$**) **$\varphi=\varphi_0$**. Так как поле является центрально симметричным, то для внешней области заряженной сферы имеем:

$$\varphi_o - \varphi = \int_R^r E dr = \int_R^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Допустим, что при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$ (выбор нулевого уровня потенциала) Тогда из последнего равенства находим значение для **φ_0**:

$$\varphi_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R},$$

которое в силу непрерывности потенциала определяет его величину и внутри сферы: **$C=\varphi_0$**.

Итак, потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы описывается равенствами:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{R}, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \qquad (6.8)$$

Зависимости $E(r)$ (6.7) и $\varphi(r)$ (6.8) для случая $Q>0$ приведены на рис. 1.7 б) и рис. 1.7 в), соответственно.

6.4 Потенциал бесконечной, равномерно заряженной, тонкостенной, цилиндрической поверхности. Потенциал бесконечной, равномерно заряженной нити

Тонкостенный цилиндр радиуса ***R***, аналогично сферической поверхности, разделяет все пространство на две части: I) внутреннюю (**0≤r<R**); II) внешнюю (**r≥R**). Пусть ***Q*** – общий заряд цилиндра (рис. 1.8 а).

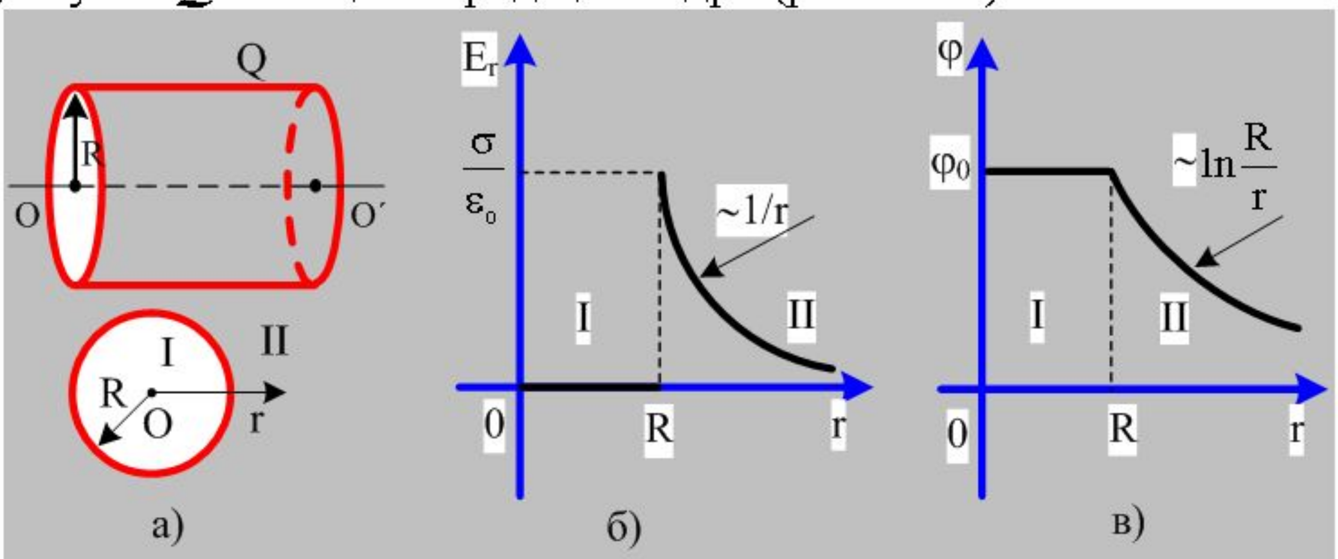

Рис. 1.8

Распределение заряда на поверхности цилиндра можно характеризовать либо линейной $\tau = \dfrac{dq}{d\ell}$, либо поверхностной плотностью заряда $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$, между которыми существует простая связь $\sigma = \dfrac{\tau}{2\pi R}$.

Напряженность поля такой системы равна:

$$E = \begin{cases} 0, \quad \text{при } r < R, \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_o r} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\dfrac{R}{r}, \quad \text{при } r \geq R. \end{cases} \tag{6.9}$$

Так как поле обладает цилиндрической симметрией, то разность потенциалов между любыми двумя точками электростатического поля зависит только от одной координаты $\boldsymbol{r}$, а связь между $\vec{E}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ (5.1) имеет вид:

$$\varphi_0 - \varphi = \int_1^2 (\vec{\mathrm{E}}\mathrm{d}\vec{\ell}) = \int_1^2 \mathrm{E_r dr}. \tag{6.10}$$

Тогда для потенциала (смотри предыдущий пункт) на основании (6.9) и (6.10) имеем:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_o = const, \quad \text{при } r < R, \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{R}{r} + \varphi_o, \quad \text{при } r \geq R. \end{cases} \tag{6.11}$$

В формуле (6.11) $\boldsymbol{\varphi_0}$ – значение потенциала на заряженной цилиндрической поверхности при $r = R$. Зависимости $\mathbf{E(r)}$ (6.9) и $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(r)}$ (6.11) для случая $\mathbf{Q>0}$ приведены на рис. 1.8 б) и рис. 1.8 в), соответственно.

Поступая аналогично, можно получить следующее выражение для потенциала бесконечной равномерно заряженной нити:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\pi_o}\ln\frac{r_o}{r} + \varphi_o, \qquad (6.12)$$

где $\boldsymbol{\varphi_0}$ потенциал поля на расстоянии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ от нити.