Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Факультет национальной безопасности

Раздел 2 тема № 3

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Лекция №1

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2013

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. **Понятия первообразной и неопределенного интеграла**
2. **Свойства неопределенного интеграла**
3. **Методы интегрирования**

Литература

1. «Высшая математика для экономических специальностей». Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2008.
2. «Математика: Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Математическая статистика». Учебно-методическое пособие / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.
3. Гельман В.Я. «Решение математических задач средствами Excel: Практикум». Учебник для вузов. СПб.: ПИТЕР, 2003.
4. «Сборник задач по математике». М.: Изд. РАГС, 2005.

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Понятия первообразной и неопределенного интеграла

Определение.

Функцию $F(x)$ называют ***первообразной функции*** $f(x)$, определенной в некотором промежутке X (на отрезке, в конечном или бесконечном интервале или полуинтервале), если $F(x)$ дифференцируема в этом промежутке и $\forall x \in X$ значение производной $F'(x)$ совпадает со значением функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \ \forall x \in X \ (\text{или } dF(x) = f(x)dx \ \forall x \in X).$$

Замечание.

Если $X = [a, b]$, то под дифференцируемостью функции в граничных точках $x = a$, $x = b$ отрезка понимают существование конечных ***правосторонней*** и ***левосторонней производных*** соответственно.

Пример.

Функция $F(x) = x^3$ на всей числовой прямой R является ***первообразной функции*** $f(x) = F'(x) = 3x^2$.

Замечание.

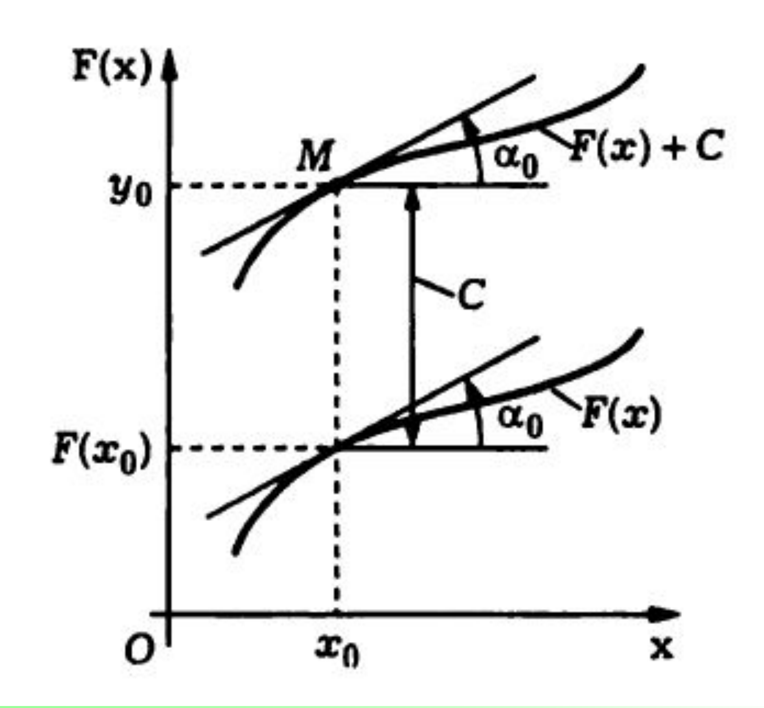
Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то эта первообразная **не единственна**.

Пример.

Для функции $f(x) = 3x^2$ первообразными будут и функции $x^3 + 1$, $x^3 - 2$ и вообще $x^3 + C$, где C – произвольное постоянное число, поскольку $(x^3 + C)' = 3x^2 = f(x)$.

Геометрическая иллюстрация

Если построен график **первообразной** $y = F(x)$ функции $f(x)$, то графики **всех остальных первообразных** получаются параллельным сдвигом этого графика вдоль оси ординат вверх или вниз на произвольное расстояние C.



Теорема.

Дифференцируемые в промежутке X функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ будут в этом промежутке ***первообразными одной и той же функции*** $f(x)$ тогда и только тогда, когда разность их значений для любого x из промежутка X постоянна:

$$F(x) - \Phi(x) = C = const \quad \forall x \in X.$$

Описывает ли выражение $F(x) + C$ все первообразные функции для $f(x)$?

Доказательство.

1. Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ в промежутке X, то, согласно определению, $F'(x) = f(x) \ \forall x \in X$.

Но тогда и функция $\Phi(x) = F(x) - C$ ($C = const$) также является первообразной функции $f(x)$ в этом промежутке, поскольку

$$\Phi'(x) = (F(x) - C)' = F'(x) = f(x) \ \forall x \in X .$$

2. Введем $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$ и найдем ее производную

$$\varphi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall x \in X.$$

Но в силу признака постоянства дифференцируемой функции, вытекающего из **теоремы Лагранжа**, равенство $\varphi'(x) = 0 \ \forall x \in X$ означает, что $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x) = C = const \ \forall x \in X$.

Определение.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ в некотором промежутке X называют ***неопределенным интегралом*** от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)dx$.

При этом символ $\int$ именуют ***знаком интеграла***,

$f(x)$ – ***подынтегральной функцией***,

$f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***,

x – ***переменной интегрирования***.

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ в промежутке X, то правомерна запись:

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C\} \quad \text{или} \quad \int f(x)dx = F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная величина, называемая обычно ***постоянной интегрирования***.

Определение.

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Теорема.

Всякая непрерывная на промежутке X функция имеет первообразную в этом промежутке.

Пример.

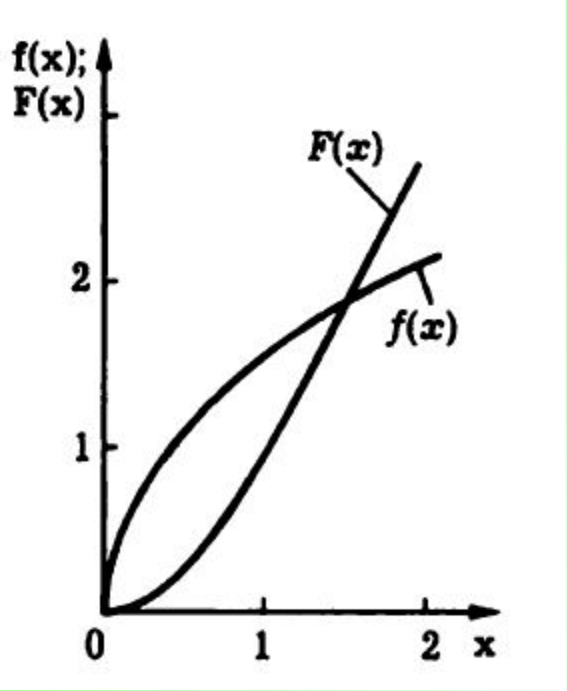
Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 3/2\sqrt{x}$ и ее неопределенный интеграл.

Решение.

Эта функция непрерывна в полуинтервале $[0, +\infty)$ и, согласно теореме, имеет на нем первообразную.

Так как $(x^{3/2})' = 3/2\sqrt{x}$ при $x \geq 0$, то одной из ***первообразных*** заданной ***функции*** в силу определения будет функция $F(x) = x^{3/2}$ $(x \geq 0)$, а ***неопределенный интеграл*** от этой функции, можно записать в виде:

$$\int \frac{3}{2}\sqrt{x}dx = x^{3/2} + C = x\sqrt{x} + C, \ x \in [0, +\infty).$$



ВТОРОЙ ВОПРОС

Свойства неопределенного интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла

Пусть для функции $f(x)$, определенной в некотором промежутке X, в этом промежутке существуют первообразная $F(x)$ и неопределенный интеграл.

1. ***Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции***, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x).$$

2. ***Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению***, т.е.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx.$$

По определению дифференциала

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(F(x)+C\right)' dx = f(x)dx.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

3. ***Неопределенный интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен этой функции с точностью до константы:***

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \forall C \in R.$$

Интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями.

4. ***Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла***, т.е.

$$\int \alpha f(x)\,dx) = \alpha \int f(x)\,dx \quad \forall \alpha \in R.$$

Рассмотрим $g(x) = \int \alpha f(x)\,dx - \alpha \int f(x)\,dx.$

$$\boxed{\int \alpha f(x)\,dx) = \alpha \int f(x)\,dx + C.}$$

Основные свойства неопределенного интеграла

5. ***Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций***:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,.$$

Замечание.

Свойство **5** остается справедливым и для любого конечного числа слагаемых.

Замечание.

Обобщая свойства **4** и **5**, можно сделать вывод, что ***неопределенный интеграл от нетривиальной линейной комбинации функций*** равен такой же ***линейной комбинации неопределенных интегралов от каждой из этих функций***.

Использование этого ***свойства линейности*** при интегрировании иногда называют ***методом разложения***.

Основные свойства неопределенного интеграла

6. Пусть в промежутке X определена сложная функция $f(u(x))$, а функция $t = u(x)$ дифференцируема в этом промежутке.

Если функция $f(t)$ имеет в промежутке $T \supseteq u(X)$ первообразную $F(t)$, то $dF(t) = f(t)dt$ и справедливо ***свойство инвариантности неопределенного интеграла*** в виде:

$$\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C.$$

Замечание.

Данное свойство позволяет свести вычисление неопределенного интеграла от функции $g(x)$ к следующей процедуре:

- представить $g(x)$ в виде $f(u(x))u'(x)$;
- найти первообразную $F(u)$ функции $f(u)$:

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C.$$

Использование этого свойства при нахождении неопределенного интеграла носит название ***метода интегрирования подведением под знак дифференциала***.

Интегралы от элементарных функций

$$\int 0dx = C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (\forall X : x = 0 \notin X);$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(a > 0;\ -a < x < a);$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$(a \neq 0).$$

Основные свойства неопределенного интеграла

Пример. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\,dx.$

Решение.

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{9x^2-1}.$

Решение. Преобразуем функцию $\frac{1}{9x^2-1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$ и тогда

$$\int \frac{dx}{9x^2-1} = \int \frac{1}{9}\cdot\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + C.$$

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Методы интегрирования

Методы интегрирования

Метод разложения

***Неопределенный интеграл от нетривиальной линейной комбинации функций равен такой же линейной комбинации неопределенных интегралов от каждой из этих функций*.**

Пример. Найти интеграл $\int\left(\frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}\right)dx$.

$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx.$

Решение.

$$\int\left(\frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}\right)dx = \int\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{\sqrt{x}+2}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}-2x-8\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x\,dx - 8\int dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2-8x+C.$$

$$\int\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \int(1+\sin x)dx = \int dx + \int\sin x\,dx = x-\cos x+C.$$

Методы интегрирования

Метод замены переменой

Один из основных методов интегрирования – метод замены переменной (метод подстановки), описывается следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1-2x}$.

Решение. Пусть $t = 1 - 2x$, тогда $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$, а $dx = -\frac{1}{2}dt.$

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

Методы интегрирования

Метод введения (подведения) под знак дифференциала

***Данный метод интегрирования является вариантом метода замены переменной, когда новая переменная в явном виде не вводится*.**

Пример. Найти интеграл $\int \cos(3x+2)\,dx.$

Решение. Используя свойства дифференциала, получаем

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+2).$$

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C.$$

Методы интегрирования

Метод интегрирования по частям

Пусть $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ – дифференцируемые функции, тогда формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

называется ***формулой интегрирования по частям для неопределенного интеграла***.

Пример. Найти интеграл $\int xe^{-2x}dx.$

Решение. Пусть $\boldsymbol{x = u}$ и $\boldsymbol{dx = du}$, а $\boldsymbol{dv = e^{-2x}}$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ и

тогда $\int xe^{-2x}dx = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)dx =$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + Cx + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} - Cx + C_1 = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1.$$

Методы интегрирования

Пример. Найти интеграл $\int x^2 \sin x dx.$

Решение.

Пусть $\boldsymbol{x^2} = \boldsymbol{u}$ и $2\boldsymbol{xdx} = \boldsymbol{du}$, а $\boldsymbol{\sin x\, dx} = \boldsymbol{dv}$ и $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\cos x}$, тогда, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

Полученный интеграл не является табличным, но степень переменной $\boldsymbol{x}$ уменьшилась на единицу, тогда как второй сомножитель остался того же типа.

Повторяем процедуру: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{du}$, а $\boldsymbol{\cos x\, dx} = \boldsymbol{dv}$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sin x}$ –

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Методы интегрирования

Метод интегрирования рациональных выражений (**метод неопределенных коэффициентов**)

Пусть $P(x)/Q(x)$ – правильная дробь, т.е. степень числителя $P(x)$ меньше степени знаменателя $Q(x)$, а знаменатель $Q(x)$ допускает разложение на линейные множители:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_l)^{k_l},$$

где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ и $k_1, \ldots, k_l$ – положительные целые числа.

В этом случае дробь $P(x)/Q(x)$ допускает представление в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{l1}}{x-\alpha_l} + \ldots + \frac{A_{lk_l}}{(x-\alpha_l)^{k_l}},$$

где $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{lk_l}$ – некоторые неизвестные числа.

Методы интегрирования

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

Решение. Записывая подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, имеем:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1(x^2-1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Тождественное равенство получается при

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)} = \int \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C.$$

Методы интегрирования

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)}$.

Решение. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2-x+1}.$$

Тождественное равенство получается при $A_1 = 1$; $N_1 = 0$; $M_1 = -1$.

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x\,dx}{x^2-x+1} = \cdots =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Замечание.

В случае, когда многочлен $Q(x)$ не допускает разложения на линейные множители ($Q(x)$ имеет комплексные корни), в выражении $P(x)/Q(x)$ дополнительно содержатся сомножители вида

где $m > 0$.

Тогда разложение дроби $P(x)/Q(x)$ дополнительно содержит слагаемые вида:

Методы интегрирования

Простейшие интегралы от функций, ***содержащие иррациональности***, являются табличными, либо сводятся к табличным с использованием свойств интеграла и/или замены переменной.

В более сложных случаях подход состоит в сведении искомого интеграла к интегралу от рациональной функции с помощью специальной замены переменной (**метод рационализации интеграла**).

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt[n]{x}\right)dx,$$

где $\boldsymbol{R}$ – рациональная функция, находятся соответственно с помощью подстановок

$$x=a\sin t,\quad x=a\operatorname{tg} t,\quad x=\frac{a}{\cos t},\quad t=\sqrt[n]{x}.$$

Методы интегрирования

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}$.

Решение. Наименьшее общее кратное степеней 4 и **6** радикалов, через которые записана подынтегральная функция, – **12**.

Поэтому полагаем: $t = x^{1/12}$. Тогда $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{12t^{11}dt}{t^{10} - t^9} = 12\int \frac{t^2 dt}{t-1}.$$

Далее

$$12\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 12\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 12\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^2}{2} + t + \int \frac{d(t-1)}{t-1}\right) = 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 12\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + C.$$

Методы интегрирования

Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ (***R*** – рациональная функция) допускают рационализацию (**метод интегрирования тригонометрических функций**) с помощью универсальной подстановки $t = \mathrm{tg}\,(x/2)$, где $-\pi < x < \pi$.

Тогда
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример.

Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)} = \cdots = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x/2+2}{\mathrm{tg}\,x/2-2}\right| + C.$$

Методы интегрирования

Замечание.

Использование универсальной подстановки $t = \mathrm{tg}\,(x/2)$ при интегрировании функций вида $R(\sin x, \cos x)$ часто приводит к громоздким подынтегральным функциям.

В частных случаях можно использовать другие подстановки:

если $R(-u,v) = -R(u,v)$, то используется подстановка $t = \cos x$;

если $R(u,-v) = -R(u,v)$, то используется подстановка $t = \sin x$.

Кроме того, могут использоваться **формулы тригонометрии**.

Пример.

Найти интеграл $\int \sin^3 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\,d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Из правил дифференцирования следует, что производная произвольной ***элементарной функции вновь является элементарной функцией***.

Операция нахождения первообразной (***неопределенного интеграла***) ***таким свойством не обладает*** – существуют элементарные функции, первообразные которых элементарными функциями уже не являются.

Например,

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

являются ***неберущимися в элементарных функциях***, а сами функции – ***неинтегрируемыми в конечном виде***.

Благодарю за внимание, лекция окончена!