

**Российская академия народного хозяйства и  
государственной службы при Президенте РФ**

**Факультет национальной безопасности**

***Раздел 2 тема № 3***

**«ИНТЕГРАЛЬНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ»**

**Лекция № 1**

**профессор Резниченко Александр Васильевич**

**Москва – 2013**

## **УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:**

- 1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла**
- 2. Свойства неопределенного интеграла**
- 3. Методы интегрирования**

# Литература

1. «Высшая математика для экономических специальностей». Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2008.
2. «Математика: Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Математическая статистика». Учебно-методическое пособие / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.
3. Гельман В.Я. «Решение математических задач средствами Excel: Практикум». Учебник для вузов. СПб.: ПИТЕР, 2003.
4. «Сборник задач по математике». М.: Изд. РАГС, 2005.



## **ПЕРВЫЙ ВОПРОС**

**Понятия первообразной  
и неопределенного интеграла**

## **Определение.**

Функцию  $F(x)$  называют **первообразной функции**  $f(x)$ , определенной в некотором промежутке  $X$  (на отрезке, в конечном или бесконечном интервале или полуинтервале), если  $F(x)$  дифференцируема в этом промежутке и  $\forall x \in X$  значение производной  $F'(x)$  совпадает со значением функции  $f(x)$ , т.е.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X \text{ (или } dF(x) = f(x)dx \quad \forall x \in X \text{ )}.$$

## **Замечание.**

Если  $X = [a, b]$ , то под дифференцируемостью функции в граничных точках  $x = a$ ,  $x = b$  отрезка понимают существование конечных **правосторонней** и **левосторонней производных** соответственно.

## **Пример.**

Функция  $F(x) = x^3$  на всей числовой прямой  $\mathbb{R}$  является **первообразной функции**  $f(x) = F'(x) = 3x^2$ .

## Замечание.

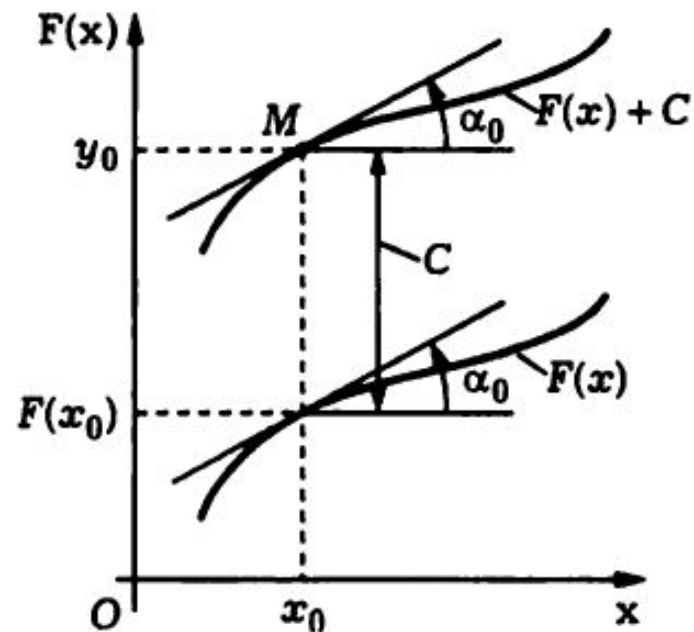
Если функция  $f(x)$  имеет первообразную, то эта первообразная **не единственна**.

## Пример.

Для функции  $f(x) = 3x^2$  первообразными будут и функции  $x^3 + 1$ ,  $x^3 - 2$  и вообще  $x^3 + C$ , где  $C$  – произвольное постоянное число, поскольку  $(x^3 + C)' = 3x^2 = f(x)$ .

## Геометрическая иллюстрация

Если построен график **первообразной**  $y = F(x)$  функции  $f(x)$ , то графики **всех остальных первообразных** получаются параллельным сдвигом этого графика вдоль оси ординат вверх или вниз на произвольное расстояние  $C$ .



## Теорема.

Дифференцируемые в промежутке  $X$  функции  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  будут в этом промежутке **первообразными одной и той же функции  $f(x)$**  тогда и только тогда, когда разность их значений для любого  $x$  из промежутка  $X$  постоянна:

$$F(x) - \Phi(x) = C = \text{const} \quad \forall x \in X.$$

**Доказательство.** **Если выражение  $F(x) + C$  все первообразные**

1. Если  $F(x)$  – некоторая функция для функции  $f(x)$  в промежутке  $X$ , то, согласно определению,  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$ .

Но тогда и функция  $\Phi(x) = F(x) - C$  ( $C = \text{const}$ ) также является первообразной функции  $f(x)$  в этом промежутке, поскольку

$$\Phi'(x) = (F(x) - C)' = F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

2. Введем  $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$  и найдем ее производную

$$\varphi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Но в силу признака постоянства дифференцируемой функции, вытекающего из **теоремы Лагранжа**, равенство  $\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in X$  означает, что  $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x) = C = \text{const} \quad \forall x \in X$ .

## **Определение.**

Множество всех первообразных функции  $f(x)$  в некотором промежутке  $X$  называют **неопределенным интегралом** от этой функции в данном промежутке и обозначают  $\int f(x) dx$ .

При этом символ  $\int$  именуют **знаком интеграла**,  
 $f(x)$  – **подынтегральной функцией**,  
 $f(x) dx$  – **подынтегральным выражением**,  
 $x$  – **переменной интегрирования**.

Если  $F(x)$  – какая-либо первообразная функции  $f(x)$  в промежутке  $X$ , то правомерна запись:

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C\} \quad \text{или} \quad \int f(x) dx = F(x) + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная величина, называемая обычно **постоянной интегрирования**.

## **Определение.**

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется **интегрированием** этой функции.



## Теорема.

Всякая непрерывная на промежутке  $X$  функция имеет первообразную в этом промежутке.

## Пример.

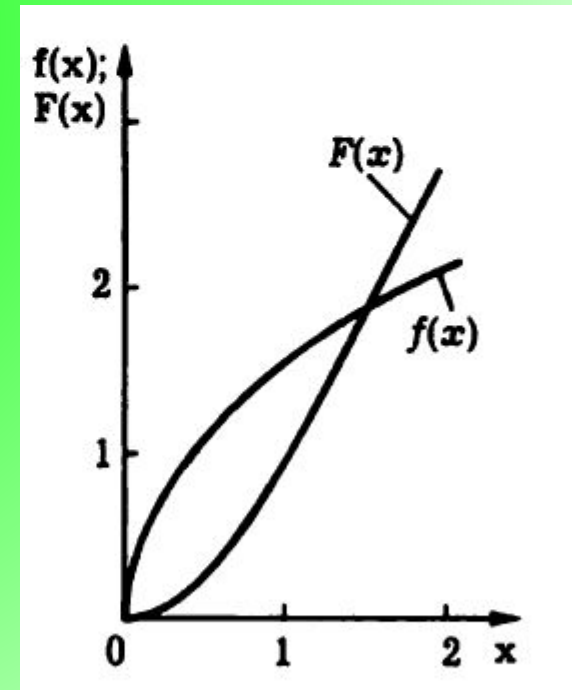
Найти какую-либо первообразную  $F(x)$  функции  $f(x) = 3/2\sqrt{x}$  и ее неопределенный интеграл.

## Решение.

Эта функция непрерывна в полуинтервале  $[0, +\infty)$  и, согласно теореме, имеет на нем первообразную.

Так как  $(x^{3/2})' = 3/2\sqrt{x}$  при  $x \geq 0$ , то одной из **первообразных** заданной **функции** в силу определения будет функция  $F(x) = x^{3/2}$  ( $x \geq 0$ ), а **неопределенный интеграл** от этой функции, можно записать в виде:

$$\int \frac{3}{2} \sqrt{x} dx = x^{3/2} + C = x\sqrt{x} + C, \quad x \in [0, +\infty).$$





## **ВТОРОЙ ВОПРОС**

# **Свойства неопределенного интеграла**

## Основные свойства неопределенного интеграла

Пусть для функции  $f(x)$ , определенной в некотором промежутке  $X$ , в этом промежутке существуют первообразная  $F(x)$  и неопределенный интеграл.

**1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции**, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

**2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению**, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

По определению дифференциала

$$d\left(\int f(x)dx\right) = (F(x) + C)' dx = f(x)dx.$$

## Основные свойства неопределенного интеграла

**3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции  $F(x)$  равен этой функции с точностью до константы:**

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \forall C \in R.$$

**Интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями.**

**4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.**

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx \quad \forall \alpha \in R.$$

Рассмотрим  $g(x) = \int \alpha f(x) dx - \alpha \int f(x) dx.$

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx + C.$$

## Основные свойства неопределенного интеграла

**5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:**

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

### **Замечание.**

Свойство **5** остается справедливым и для любого конечного числа слагаемых.

### **Замечание.**

Обобщая свойства **4** и **5**, можно сделать вывод, что **неопределенный интеграл от нетривиальной линейной комбинации функций** равен такой же **линейной комбинации неопределенных интегралов от каждой из этих функций**.

Использование этого **свойства линейности** при интегрировании иногда называют **методом разложения**.

## Основные свойства неопределенного интеграла

**6.** Пусть в промежутке  $X$  определена сложная функция  $f(u(x))$ , а функция  $t = u(x)$  дифференцируема в этом промежутке.

Если функция  $f(t)$  имеет в промежутке  $T \supseteq u(X)$  первообразную  $F(t)$ , то  $dF(t) = f(t)dt$  и справедливо **свойство инвариантности неопределенного интеграла** в виде:

$$\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C.$$

### **Замечание.**

Данное свойство позволяет свести вычисление неопределенного интеграла от функции  $g(x)$  к следующей процедуре:

- представить  $g(x)$  в виде  $f(u(x))u'(x)$ ;
- найти первообразную  $F(u)$  функции  $f(u)$ :

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C.$$

Использование этого свойства при нахождении неопределенного интеграла носит название **метода интегрирования подведением под знак дифференциала**.

## Интегралы от элементарных функций

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (\forall X : x = 0 \notin X);$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(a > 0; -a < x < a);$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$(a \neq 0).$$

## Основные свойства неопределенного интеграла

**Пример.** Найти интеграл  $\int \sqrt[3]{x} dx$ .

**Решение.** 
$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

**Пример.** Найти интеграл  $\int \frac{dx}{9x^2 - 1}$ .

**Решение.** Преобразуем функцию  $\frac{1}{9x^2 - 1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$  и тогда

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 1} = \int \frac{1}{9} \cdot \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x - 1}{3x + 1} \right| + C.$$





## ТРЕТИЙ ВОПРОС

# Методы интегрирования

# Методы интегрирования

## Метод разложения

Неопределенный интеграл от нетривиальной линейной комбинации функций равен такой же линейной комбинации неопределенных интегралов от каждой из этих функций.

**Пример.** Найти интеграл  $\int \left( \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+2}} \right) dx \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+2}} \right) dx \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx &= \int \frac{(\sqrt{x^2 - 2})(\sqrt{x+2})(x+4)}{\sqrt{x+2}} dx \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \\ &= \int \frac{(x^2 - 2)(x+4)}{\sqrt{x+2}} dx \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int 4x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int dx + \int 8 dx \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \\ &= x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x + 8x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 + C. \end{aligned}$$

# Методы интегрирования

## Метод замены переменной

Один из основных методов интегрирования – метод замены переменной (метод подстановки), описывается следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Пример.** Найти интеграл  $\int \frac{dx}{1-2x}$ .

**Решение.** Пусть  $t = 1 - 2x$ , тогда  $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$ , а  $dx = -\frac{1}{2}dt$ .

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |1-2x| + C.$$

# Методы интегрирования

## Метод введения (подведения) под знак дифференциала

Данный метод интегрирования является вариантом метода замены переменной, когда новая переменная в явном виде не вводится.

**Пример.** Найти интеграл  $\int \cos^{-x^2}(3x+2) dx$ .

**Решение.** Используя свойства дифференциала, получаем

$$dx = \frac{1}{3} d(3x) = \frac{1}{3} d(3x+2).$$

$$\int \cos^{-x^2}(3x+2) dx = \int \frac{1}{3} d(\cos(3x+2)) = \frac{1}{3} \int d(\cos(3x+2)) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3}(3x+2)\right) + C.$$

# Методы интегрирования

## Метод интегрирования по частям

Пусть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции, тогда формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

называется **формулой интегрирования по частям для неопределенного интеграла**.

**Пример.** Найти интеграл  $\int x e^{-2x} dx$ .

**Решение.** Пусть  $x = u$  и  $dx = du$ , а  $dv = e^{-2x}$ ,  $v = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$  и

тогда 
$$\int x e^{-2x} dx = x \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) - \int \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + Cx + \left( \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-2x} - Cx + C_1 = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C_1.$$

## Методы интегрирования

**Пример.** Найти интеграл  $\int x^2 \sin x dx$ .

**Решение.**

Пусть  $x^2 = u$  и  $2x dx = du$ , а  $\sin x dx = dv$  и  $v = -\cos x$ , тогда, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Полученный интеграл не является табличным, но степень переменной  $x$  уменьшилась на единицу, тогда как второй сомножитель остался того же типа.

Повторяем процедуру:  $x = u$  и  $dx = du$ , а  $\cos x dx = dv$  и  $v = \sin x$  –

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

## Методы интегрирования

### Метод интегрирования рациональных выражений (метод неопределенных коэффициентов)

Пусть  $P(x)/Q(x)$  – правильная дробь, т.е. степень числителя  $P(x)$  меньше степени знаменателя  $Q(x)$ , а знаменатель  $Q(x)$  допускает разложение на линейные множители:

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l},$$

где  $\alpha_i \neq \alpha_j$  при  $i \neq j$  и  $k_1, \dots, k_l$  – положительные целые числа.

В этом случае дробь  $P(x)/Q(x)$  допускает представление в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{l1}}{x - \alpha_l} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(x - \alpha_l)^{k_l}},$$

где  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{lk_l}$  – некоторые неизвестные числа.

## Методы интегрирования

**Пример.** Найти интеграл

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)}.$$

**Решение.** Записывая подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, имеем:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1(x^2-1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Тождественное равенство получается при

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)} &= \int \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$



## Методы интегрирования

**Пример 1.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)}.$$

В случае, когда многочлен  $Q(x)$  не допускает разложения на

**Решение.** Разложение  $Q(x)$  (подынтегральной функции) на простые линейные множители (если имеются комплексные корни), в выражении дроби  $P(x)/Q(x)$  дополнительно содержатся сомножители вида

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{M_1x + N_1}{x^2-x+1}.$$

где  $m > 0$ .

Тогда разложение дроби  $P(x)/Q(x)$  дополнительно содержит слагаемые вида:  
Тождественное равенство получается при  $A_1 = 1$ ;  $N_1 = 0$ ;  $M_1 = -1$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)} &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x dx}{x^2-x+1} = \dots = \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

## Методы интегрирования

Простейшие интегралы от функций, **содержащие иррациональности**, являются табличными, либо сводятся к табличным с использованием свойств интеграла и/или замены переменной.

В более сложных случаях подход состоит в сведении искомого интеграла к интегралу от рациональной функции с помощью специальной замены переменной (**метод рационализации интеграла**).

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx,$$

где  $R$  – рациональная функция, находятся соответственно с помощью подстановок

$$x = a \sin t, \quad x = a \operatorname{tg} t, \quad x = \frac{a}{\cos t}, \quad t = \sqrt[n]{x}.$$

## Методы интегрирования

**Пример.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}.$$

**Решение.** Наименьшее общее кратное степеней 4 и 6 радикалов, через которые записана подынтегральная функция, – 12.

Поэтому полагаем:  $t = x^{1/12}$ . Тогда  $x = t^{12}$ ,  $dx = 12t^{11}dt$  и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{12t^{11}dt}{t^{10} - t^9} = 12 \int \frac{t^2 dt}{t - 1}.$$

Далее

$$12 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = 12 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t - 1} dt = 12 \int \left( t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt =$$

$$= 12 \left( \frac{t^2}{2} + t + \int \frac{d(t - 1)}{t - 1} \right) = 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[4]{x} + 12 \ln \left| \sqrt[4]{x} - 1 \right| + C.$$

## Методы интегрирования

Интегралы вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  ( $R$  – рациональная функция) допускают рационализацию (**метод интегрирования тригонометрических функций**) с помощью универсальной подстановки  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ , где  $-\pi < x < \pi$ .

Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Пример.**

Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$$

**Решение.**

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left( 3 + \frac{5(1-t^2)}{1+t^2} \right)} = \dots = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x/2 + 2}{\operatorname{tg} x/2 - 2} \right| + C.$$

# Методы интегрирования

## Замечание.

Используя правило дифференцирования следует, что  $\sin(x/2)$  — производная элементарной функции  $\cos x$ . Вид функции  $R(\sin x, \cos x)$  часто приводит к трюкам подынтегральным функциям.

В частных случаях можно использовать другие подстановки. **Операция нахождения первообразной (неопределенного интеграла) таким свойством не обладает** — существуют элементарные функции, первообразные которых элементарными функциями уже не являются.

Кроме того, могут использоваться **формулы тригонометрии**.  
Например,

## Пример.

Найти интеграл  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \sin^3 x dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$

## Решение.

являются **неберущимися в элементарных функциях**, а сами функции  $\sin^3 x$  **интегрируемы в конечном виде**.

$$= -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

***Благодарю за внимание,  
лекция окончена!***

