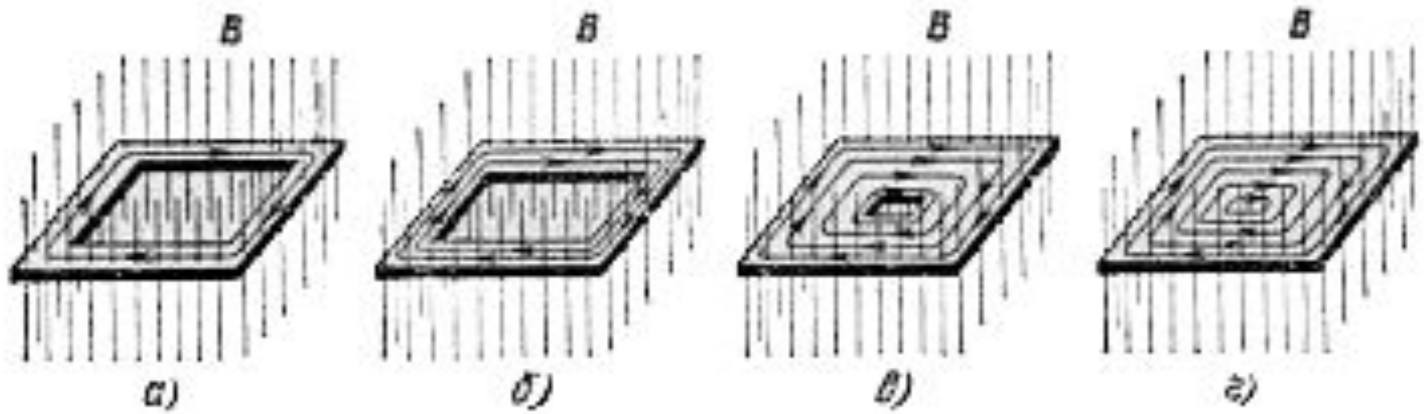
Токи Фуко

Практическое использование закона электромагнитной индукции

Рассмотрим простейший опыт индукции тока в витке из провода, помещенном в изменяющееся магнитное поле (рис. а). Виток этот замкнут, причем в цепи нет гальванометра, по отклонению которого мы могли бы судить о наличии в витке индукционного тока. Мы можем обнаружить этот ток по тому нагреванию, которым сопровождается его прохождение по витку



В проводнике, помещенном в изменяющееся магнитное поле, возникает индукционный ток, нагревающий проводник:

а) сопротивление витка из провода велико, его нагревание мало;

б) сопротивление витка из более толстого провода меньше, его нагревание больше;

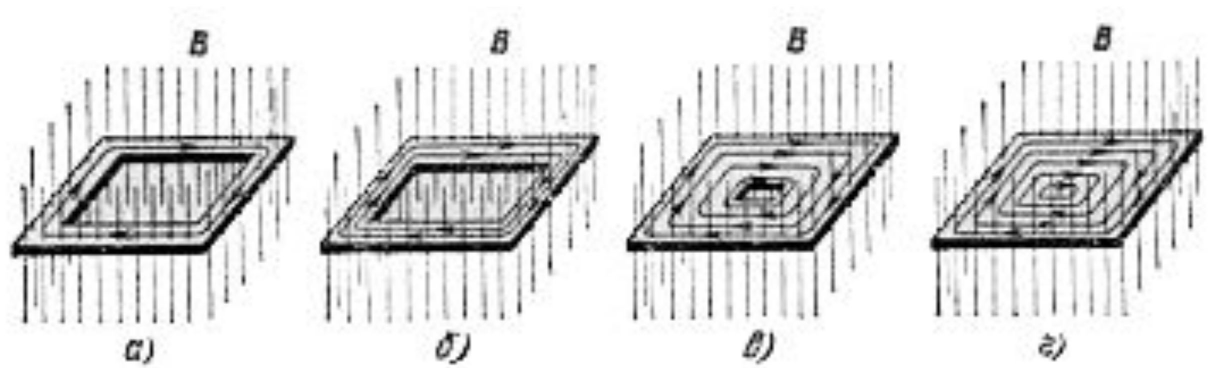
в) виток заменен металлической пластинкой с небольшим отверстием посередине, нагревание его еще больше;

г) виток заменен сплошной металлической пластинкой, в которой возникают индукционные токи, сильно нагревающие ее

Если мы, сохраняя прежние внешние размеры витка, сделаем его из более толстого провода или из металлической ленты (рис. б), то э. д. с. индукции

$$\mathscr{E}_i = -d\Phi / dt$$

останется прежней (скорость изменения магнитного потока dФ/dt осталась прежней), а сопротивление витка уменьшится. Вследствие этого индукционный ток **I** возрастет. Так как мощность, выделяемая в витке в виде тепла, пропорциональна произведению тока на э.д.с. индукции $\mathscr{E}_i$, то, следовательно, при уменьшении сопротивления витка нагревание его увеличится.



На рис. показано несколько таких «витков» со все возрастающей толщиной; последний представляет собой просто сплошную металлическую пластинку, помещенную в изменяющееся магнитное поле. Если вместо тонкой пластинки взять толстый кусок металла, то при помещении его в изменяющееся магнитное поле такой кусок металла, нагревается; иногда это нагревание довольно сильно.

При изменении магнитного потока индукционные токи возникают и в массивных кусках металла, а не только в проволочных контурах.
Эти токи обычно называют *вихревыми токами* или *токами Фуко*, по имени открывшего их французского физика Леона Фуко (1819—1868).
Их направление и сила зависят от

- формы куска металла, находящегося в поле,
- от направления изменяющегося магнитного потока,
- от свойств материала, из которого сделан кусок, и, конечно,
- от скорости изменения магнитного потока.

Вихревые токи, как и всякие индукционные токи, подчиняются *правилу Ленца*, т. е. индукционный ток всегда имеет такое направление, при котором его магнитное поле уменьшает (компенсирует) изменение магнитного потока, являющееся причиной возникновения этого тока.

Распределение вихревых токов в металле, вообще говоря, может быть очень сложным. В кусках достаточно толстых, т. е. имеющих большие размеры в направлении, перпендикулярном к направлению индукционного тока, вихревые токи вследствие малости сопротивления могут быть очень большими и вызывать очень значительное нагревание.

Если, например, поместить внутрь катушки массивный металлический сердечник и пропустить по катушке переменный ток, который 100 раз в секунду изменяет свое направление и силу, то этот сердечник нагреется очень сильно. Нагревание это вызывается индукционными (вихревыми) токами, возникающими вследствие непрерывного изменения магнитного потока, пронизывающего сердечник.
Если же этот сердечник сделать из отдельных тонких пластин или проволок, изолированных друг от друга слоем лака или окислов, то сопротивление сердечника в направлении, перпендикулярном к его оси, т. е. сопротивление для вихревых токов, возрастет, и нагревание значительно уменьшится. Этим приемом — разделением сплошных кусков железа на тонкие, изолированные друг от друга слои — постоянно пользуются во всех электрических машинах для уменьшения нагревания их индукционными токами, возникающими в переменном магнитном поле.
С другой стороны, токи Фуко иногда используются в так называемых индукционных печах для сильного нагревания или даже плавления металлов.

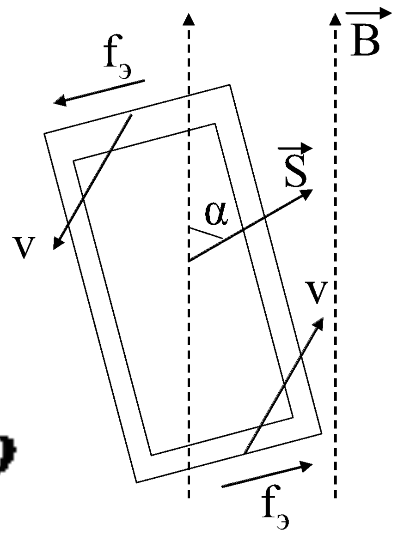
Генераторы переменного тока

Если виток вращается в постоянном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω, то в этом витке возбуждается ЭДС индукции, численно равная изменению магнитного потока через площадь этого витка в единицу времени:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \omega t = \Phi_0 \cdot \cos \omega t$$

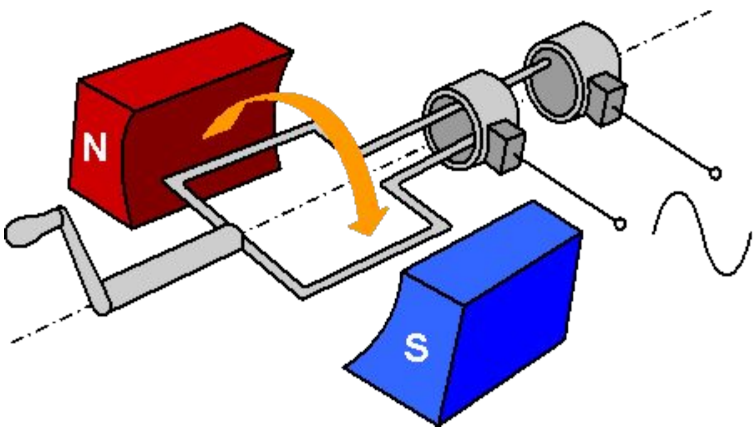
магнитный поток через один виток

S - площадь витка. $f_э$ - сторонние силы, вызывающие движение электронов в проводнике.



$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}_0 = BS\omega$$



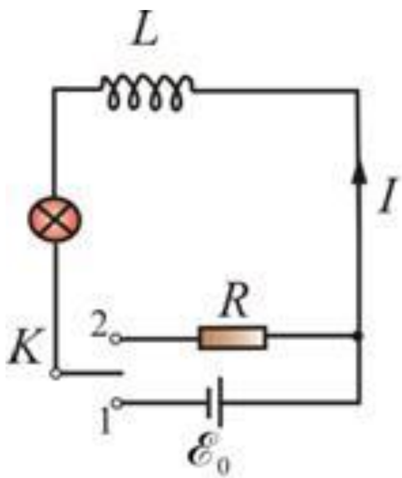
Если вращается катушка из N витков:

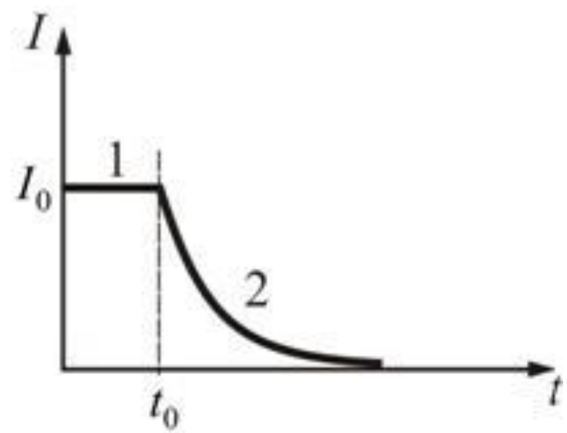
$$\mathcal{E}_0 = BS\omega N$$

При этих условиях ЭДС индукции и индукционный ток синусоидальные

Ток при замыкании и размыкании цепи.

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи, содержащей индуктивность *L,* происходит не мгновенно, а постепенно.





При t =0 отключим источник тока, замкнув одновременно цепь накоротко (переведем ключ из положения 1 в 2) . Как только сила тока начнет убывать, возникнет ЭДС самоиндукции, противодействующая этому, а сила тока в цепи будет по закону Ома удовлетворять выражению:

$$IR = \mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt}$$

$$IR = \mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt}$$

Перепишем это выражение в виде линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

Разделив переменные, получаем:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

откуда

$$d(\ln I) = -\frac{R}{L}dt$$

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln const$$

$$I = const \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

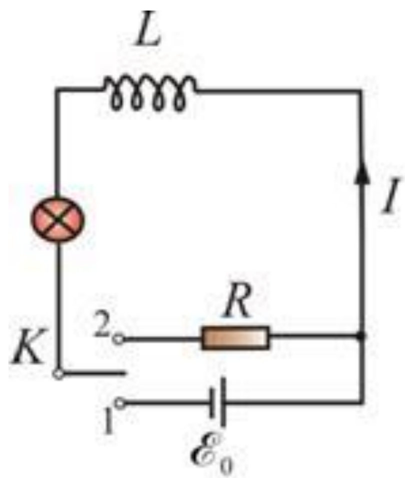
Значение const найдем из начальных условий. При t =0 сила тока **$I = I_0$**, а **$e^0 = 1$** тогда const = I_0.

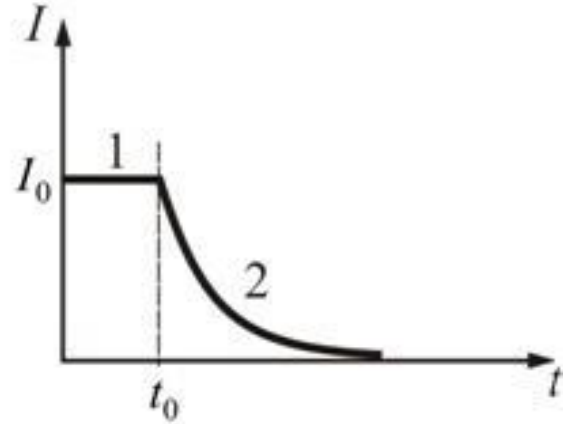
Подставив, получаем

$$\boxed{I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Таким образом, после отключения источника ЭДС сила тока убывает по экспоненциальному закону. График этой функции показан на рисунке – кривая 2. Скорость убывания определяется величиной, имеющей размерность времени - ***постоянная времени*** цепи τ

Ее смысл – это время, в течение которого сила тока уменьшится в e раз. Таким образом, чем больше L и меньше R, тем медленнее спадает ток.





При размыкании реальных цепей с большой индуктивностью возникающее высокое индуцированное напряжение создает искру или даже дугу в месте разрыва. Это является проблемой.

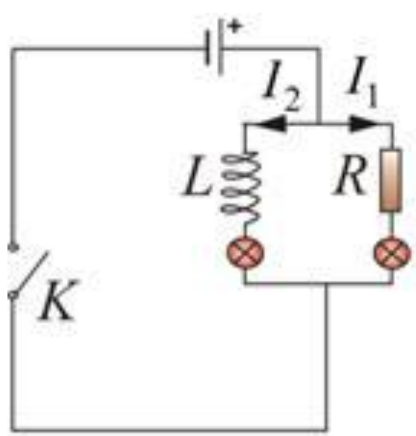
При замыкании цепи после подключения к источнику тока, до тех пор, пока сила тока не примет установившегося значения $I_0 = \mathcal{E}/R$
в цепи кроме ЭДС будет действовать ЭДС самоиндукции

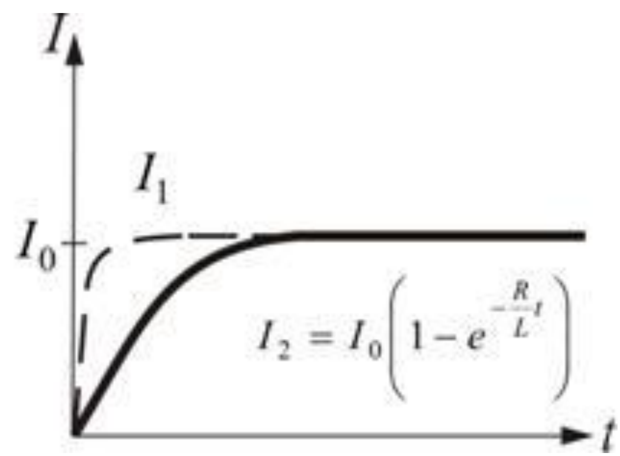
По закону Ома:

$$I \cdot R = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Это такое же уравнение, как при размыкании цепи, но не равное нулю. По теории дифференциальных уравнений к общему решению нужно прибавить любое частное решение. Например, $I = \mathcal{E}/R = I_0$





Следовательно, общим решением уравнения будет:

$$\boxed{I = I_0 + const \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

В начальный момент времени сила тока равна нулю (т.е. граничное условие будет другое, чем при размыкании).

$$0 = I_0 + const \cdot 1$$

откуда

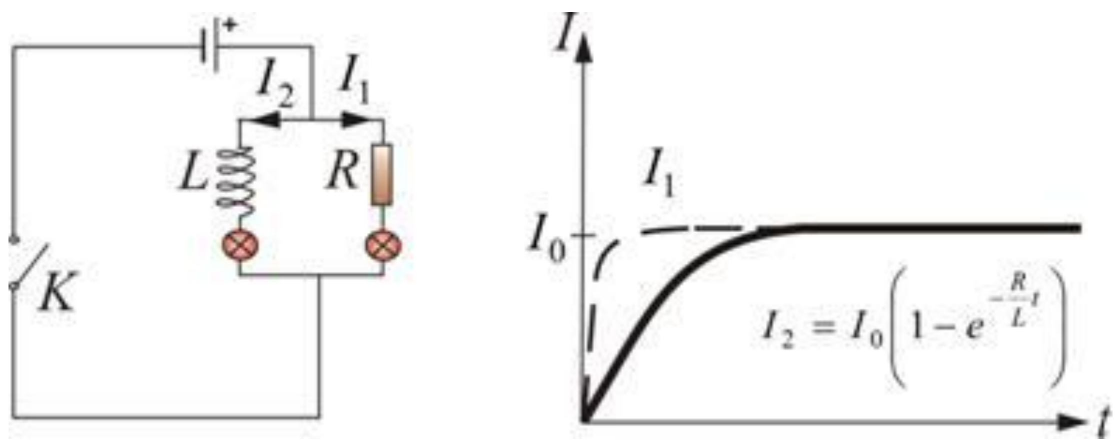
$$const = -I_0$$

Таким образом:

$$\boxed{I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$$

Значит, в процессе включения источника тока увеличение силы тока в цепи определяется кривой,показанной на рисунке. Сила тока увеличивается от начального значения I=0 и асимптотически стремится к установившемуся значению $I_0 = \mathscr{E}/R$ При этом, скорость нарастания тока задается тем же временем релаксации

$\tau = L / R$, что и убывание тока. Установление тока осуществляется тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи и чем больше ее сопротивление.



В цепи, содержащей только активное сопротивление *R*, ток установится практически мгновенно (пунктирная кривая)

Оценим значение э.д.с. самоиндукции $\mathscr{E}_s$, которая возникает при мгновенном нарастании сопротивления цепи постоянного тока от R_0 до R. Допустим, что мы размыкаем контур, когда в нем течет установившийся ток $I_0 = \mathscr{E}/R$. При размыкании цепи ток будет меняться по формуле

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Подставив в нее выражение для I_0, найдем

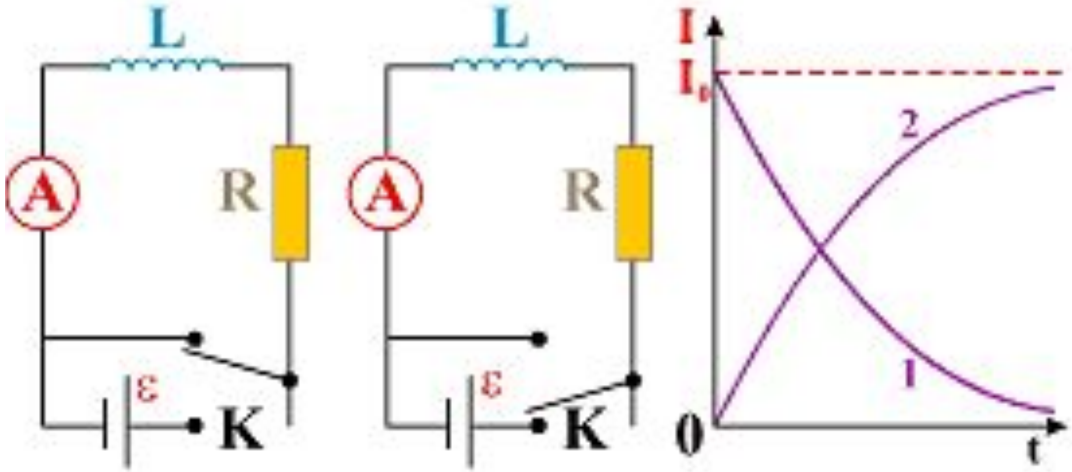
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_0} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R_0} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Э.д.с. самоиндукции

т. е. при значительном возрастании сопротивления цепи ($R/R_0 >> 1$), которая обладает большой индуктивностью, э.д.с. самоиндукции может во много раз быть больше э.д.с. источника тока, включенного в цепь. Значит, необходимо учитывать, что контур, который содержит индуктивность, нельзя резко размыкать, так как при этом (возникновение значительных э.д.с. самоиндукции) может привести к пробою изоляции и поломке измерительных приборов. Если в контур сопротивление вводить постепенно, то э.д.с. самоиндукции больших значений не достигнет.

Ток при замыкании и размыкании цепи



При размыкании (1) :

$$IR = \varepsilon \Rightarrow IR = L\frac{dI}{dt} \text{ (при } L = \text{const)}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \Rightarrow I = I_0 e^{-(R/L)t}$$

$$\boxed{I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

где $\tau = \frac{L}{R}$ - постоянная времени

При замыкании (2) :

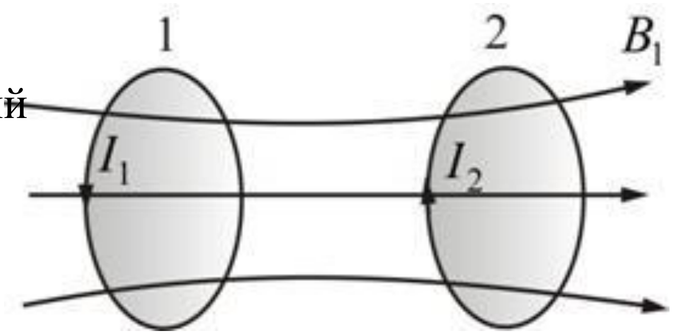
$$\boxed{I = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Взаимная индукция

Если два контура находятся по соседству, и по одному из них протекает изменяющийся во времени ток, то в другом контуре наводится ЭДС. Рассмотрим два контура, расположенные недалеко друг от друга,

В первом контуре течет ток $\mathbf{I_1}$. Он создает магнитный поток, который пронизывает и витки второго контура.

$$\boxed{\Phi_2 = L_{21} I_1}$$



Аналогично, ток $\mathbf{I_2}$ второго контура создает магнитный поток, пронизывающий первый контур:

$$\boxed{\Phi_1 = L_{12} I_2}$$

При изменении тока $\mathbf{I_1}$ во втором контуре наводится ЭДС индукции:

$$\mathscr{E}_{i2} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

И при изменении тока $\mathbf{I_2}$ в первом контуре наводится ЭДС:

$$\mathscr{E}_{i1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

Контуры называются ***связанными***, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется – *взаимной индукцией*.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются *взаимной индуктивностью*, или *коэффициентами взаимной индукции*.

При отсутствии ферромагнетиков $L_{12} = L_{21}$. Они зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости среды.

Если 2 катушки намотаны на железный сердечник: N_1 и N_2 число витков

$$L_{21} = \frac{S}{l}\mu\mu_0 N_1 N_2$$

$$L_{12} = \frac{S}{l}\mu\mu_0 N_1 N_2$$

В случае, если $N_1 \neq N_2$

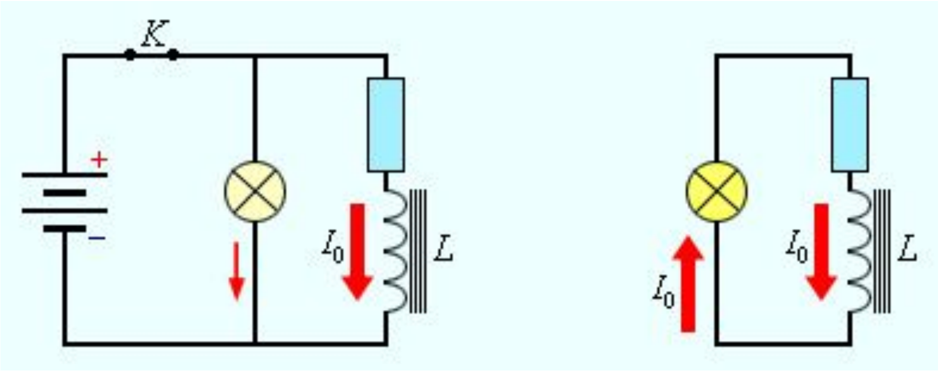
$$L_{21} \neq L_{12}$$

Единица взаимной индуктивности та же, что и для индуктивности, — **генри (Гн).**

Трансформатор является типичным примером двух связанных контуров. Явление взаимной индукции используется в широко распространенных устройствах – *трансформаторах.*

Энергия магнитного поля

Если включить электрическую лампу параллельно катушке с большой индуктивностью в электрическую цепь постоянного тока, то при размыкании ключа наблюдается кратковременная вспышка лампы. Ток в цепи возникает под действием ЭДС самоиндукции. Источником энергии, выделяющейся при этом в электрической цепи, является магнитное поле катушки.



При отключении соленоида от батареи, через сопротивление R будет некоторое время течь убывающий ток. Работа, совершаемая этим током за время d*t* равна:

$$dA = \mathscr{E}_s \cdot I \cdot dt = -\frac{d\Phi}{dt} I \cdot dt = -I \cdot d\Phi$$

Если L=const,

$$d\Phi = L \cdot dI$$

тогда $$dA = -L \cdot I \cdot dI$$

Интегрируя это выражение по I от первоначального значения до нуля, получаем работу, совершаемую в цепи за время исчезновения магнитного поля:

$$A = -\int_{I}^{0} L \cdot I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2}$$

Эта работа совершается за счет исчезновения магнитного поля.

Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, значит, работа совершается за счет энергии магнитного поля:

$$\boxed{W = \frac{L \cdot I^2}{2}}$$

Таким образом, проводник с индуктивностью L, по которому течет ток, обладает энергией, локализованной в создаваемом током магнитном поле. Это справедливо для любого контура с током.

В случае бесконечно длинного соленоида:

L = μ0·μ·n2·V, H = n·I или I = H/n

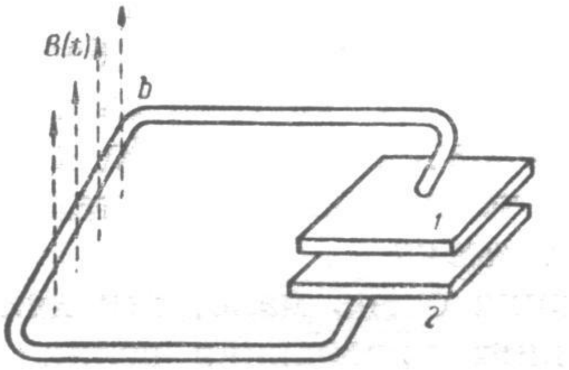
$$L = \mu_0 \mu n_2 v \qquad H = n \cdot I$$ или $$I = H / n$$

Тогда энергия равна
$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$
где *V* – объем соленоида.

Так как энергия бесконечно длинного соленоида локализована внутри него однородна, то объемная плотность энергии, получается при делении W на V

$$\omega = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{H \cdot B}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

Ток смещения



Пусть в переменном магнитном поле B(t) находится разомкнутый проводник. Возбуждаемая в проводнике ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ перемещает электроны к одному или другому концу проводника в зависимости от того убывает или возрастает $\vec{B}$. Обозначим потенциалы концов проводника φ_1 и φ_2.

В каждый момент времени $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{E}_i$

Количество приводимого в движение электричества q, а, следовательно, и значения силы тока зависят от емкости контура:

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2); \; I = dq/dt.$$

Если к концам проводника присоединить обкладки конденсатора большой емкости, то можно получить в этом проводнике значительные токи при данной ЭДС индукции, сила которых пропорциональна емкости конденсатора и быстроте изменения ЭДС:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[C(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{d}{dt} C\mathscr{E}_i = C\frac{d\mathscr{E}_i}{dt}$$

В рассматриваемой системе заряды (электроны) движутся только в проводнике. Они создают собственное магнитное поле. Однако на обкладках конденсатора упорядоченное движение зарядов обрывается. Возникает вопрос, обрывается ли там и магнитное поле, которое всегда связано с токами и является их важнейшим признаком.

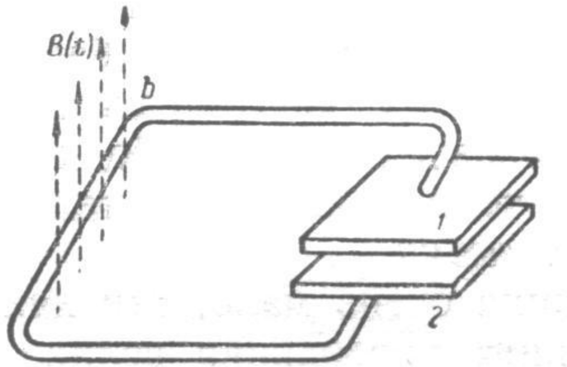
Максвелл сделал предположение (впоследствии подтвержденное опытным путем), что магнитное поле существует и между обкладками конденсатора, но только благодаря тому, что электрическое поле в этом месте изменяется со временем.

В пространстве, где существует переменное электрическое поле, возбуждается магнитное поле.

Таким образом, если напряженность электрического поля изменяется со временем, то это поле уже не является чисто электрическим, оно содержит в себе еще и магнитное поле, неразрывно с ним связанное. Такое поле называется ***электромагнитным***.

Там где есть электрический ток всегда существует образуемое им магнитное поле. Однако можно сделать и обратное утверждение: если есть магнитное поле, то оно обязательно вызвано каким-нибудь электрическим током.

Можно предположить, что магнитное поле между обкладками конденсатора вызвано особым током. Максвелл назвал его ***током смещения***. Этот ток не связан с упорядоченным движением зарядов, он может существовать в вакууме, где нет вещества. Важно, чтобы имелось переменное электрическое поле, которое вызывает и ток смещения, и связанное с ним магнитное поле.



Для нашего конденсатора вектор индукции электрического поля в пространстве между обкладками

$$\vec{D} = \sigma = \frac{q}{S}$$

где q – заряд на одной обкладке,
S - площадь обкладки.

Так как $\vec{D}$ и q изменяются со временем , q=q(t), найдем их производные:

dq/dt – сила тока в проводнике в данный момент времени. Согласно предположению Максвелла, в разомкнутых контурах токи смещения замыкают собою токи проводимости и по величине равны им. Следовательно,

I = dq/dt есть также и сила тока смещения

I/S = j

$\mathbf{I/S = j_{см}}$ есть плотность этого тока;

$$j_{см} = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

т.к. в вакууме $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

Однако, смещение зарядов может существовать не только в проводнике, но и в диэлектрике. Если между обкладками конденсатора находится диэлектрик, то

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \text{тогда} \qquad \vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Изменение вектора поляризации со временем (dP/dt) характеризует некоторое упорядоченное движение связанных зарядов в диэлектрике – ***ток поляризации***; поэтому чистым током смещения, который был введен Максвеллом, остается $\varepsilon_0 \cdot dE/dt$. Этот ток не выделяет тепла, но создает магнитное поле.

Таким образом, существует *3 вида* тока:

1) проводимости,

2) поляризации

3) смещения.

Ток смещения, хотя и очень слабый, есть не только в вакууме и диэлектриках, но и в металлах, если внутри них есть переменное электрическое поле. Пусть по проводнику течет ток, плотность которого $j=j_0 \cdot \sin\omega t$ (ω – угловая частота).

Напряженность электрического поля E связана с плотностью тока законом Ома (дифференциальная форма):

$$j = \frac{1}{\rho} E$$

$$E = \rho \cdot j = \rho \cdot j_0 \cdot \sin \omega t$$

Плотность чистого тока смещения равна:

$$j_{см} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \rho \omega j_0 \cos \omega t$$

Для металлических проводников величина $\rho \cdot \omega$ очень мала, поэтому $j_{см}/j \ll 1$.

Максвелл ввел также понятие ***полного тока***, равного сумме тока проводимости и тока смещения:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{I}_{\text{см}}$$

В результате в электрическом контуре полный ток всегда замкнут, т.е. линии этого тока в некоторой части связаны с упорядоченным движением зарядов, в другой части – с переменным электрическим полем. В вакууме (ρ=∞) токи проводимости и поляризации отсутствуют, и существует только ток смещения.

Максвелл предположил, что поле индукции Еинд = f/e есть электрическое поле. В этом случае явление электромагнитной индукции заключается в том, что переменное магнитное поле возбуждает в проводниках электрическое поле, которое приводит в движение свободные заряды и тем самым возбуждает индукционные токи.

меняющееся со временем магнитное поле уже не является чистым магнитным полем, оно содержит в себе еще и электрическое
поле, неразрывно с ним связанное. Это поле также является ***электромагнитным***.

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$