

Переменный

ток

Пусть в цепи имеется источник тока, ЭДС которого изменяется периодически.

Переменный ток – это вынужденные электрические колебания

- это периодические изменения силы тока и напряжения в электрической цепи, происходящие под действием переменной ЭДС от внешнего источника

Переменный ток, в отличие от тока постоянного, непрерывно изменяется как по величине, так и по направлению, причем изменения эти происходят периодически, т. е. точно повторяются через равные промежутки времени.

Переменные токи далее считаются квазистационарными, т.е. к мгновенным значениям всех электрических величин применимы законы постоянного тока.

Может ли ток меняться со временем так, чтобы в каждый момент времени он был одинаков в каждой точке цепи? Ток, то есть направленное движение зарядов, вызывается электрическим полем. Поэтому время установления тока в цепи t определяется только скоростью распространения электрического поля, то есть скоростью света c (L - длина цепи):

$$t = L/c$$

Это время нужно сравнивать с характерным временем изменения электрического поля (напряжения источника тока). В случае периодической э.д.с. это время - просто период колебаний напряжения на э.д.с. T . Например, в наших электрических сетях напряжение (и ток) колеблется с частотой **50 Гц**, то есть 50 раз в секунду. Период колебаний составляет $T = 0,02$ с. Пусть длина нашей цепи $L = 100$ м.

Тогда отношение t/T составит примерно 10^{-5} - именно такую очень небольшую относительную ошибку мы сделаем, если будем для нашей цепи с переменным током пользоваться законами постоянного тока.

Переменный ток в цепи, для которой выполняется соотношение $t \ll T$ и для которой с высокой точностью можно пользоваться законами постоянного тока, называется **квазистационарным током**.

Переменный ток – это электрический ток, который изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному) закону.

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

амплитуда колебаний

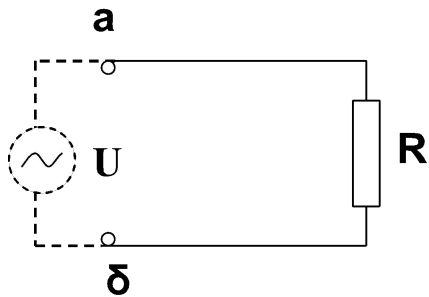
частота колебаний

фаза колебаний

По теореме Фурье любое колебание можно представить как сумму гармонических колебаний.

Таким образом, синусоидальные или гармонические колебания являются одновременно и самым важным, и самым простым типом колебаний.

Сопротивление в цепи переменного тока



Пусть внешняя цепь имеет настолько малые индуктивность и емкость, что ими можно пренебречь. Пусть начальная фаза $\varphi = 0$. Ток через сопротивление изменяется по закону:

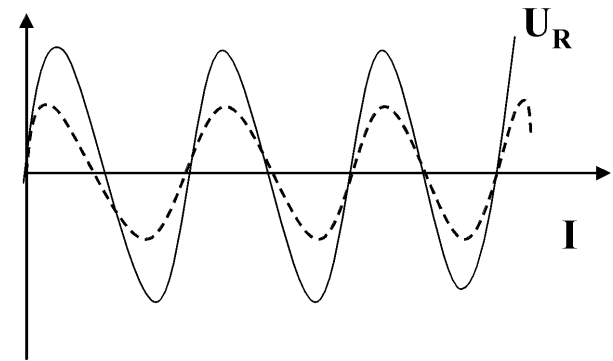
$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

По закону Ома для цепи **aRδ**:

$$U = I \cdot R = I_0 \cdot R \cdot \sin \omega t.$$

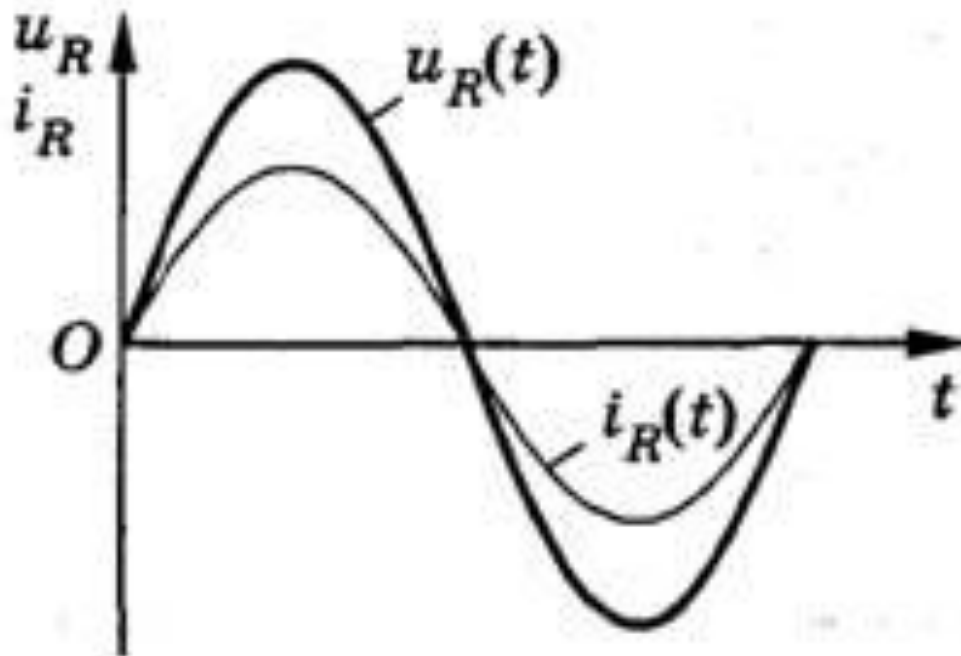
Таким образом, напряжение на концах участка цепи изменяется также по синусоидальному закону, причем разность фаз между колебаниями силы тока **I** и напряжения **U** равна нулю.

Максимальное значение U равно: $U_0 R = I_0 \cdot R$



При небольших значениях частоты переменного тока активное сопротивление проводника не зависит от частоты и практически совпадает с его электрическим сопротивлением в цепи постоянного тока.

Следовательно, в проводнике с активным сопротивлением колебания силы тока по фазе совпадают с колебаниями напряжения, а амплитуда силы тока равна амплитуде напряжения, деленной на сопротивление:



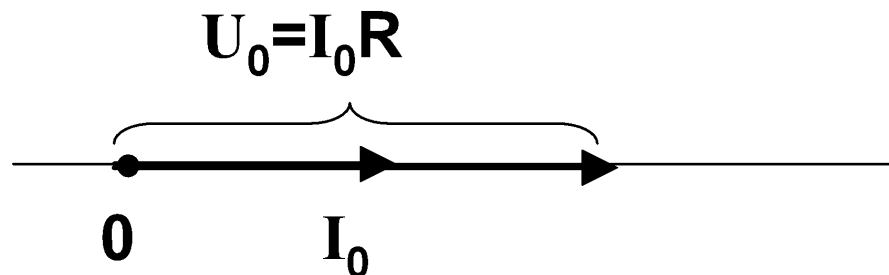
Метод векторных диаграмм

Амплитуду колебаний напряжения в цепи переменного тока можно выразить через амплитудные значения напряжения на отдельных ее элементах, воспользовавшись методом векторных диаграмм.



Выберем ось x диаграммы таким образом, чтобы вектор, изображающий колебания тока, был направлен вдоль этой оси. В дальнейшем мы будем называть ее **осью токов**.

Так как угол φ между колебаниями напряжения и тока на резисторе равен нулю, то вектор, изображающий колебания напряжения на сопротивлении R , будет направлен вдоль оси токов. Длина его равна $I_0 \cdot R$.

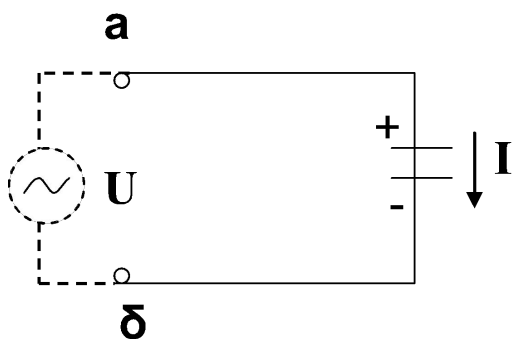


Конденсатор в цепи переменного тока

Рассмотрим процессы, протекающие в электрической цепи переменного тока с конденсатором.

Пусть напряжение подано на емкость. Индуктивностью цепи и сопротивлением проводов пренебрегаем, поэтому напряжение на конденсаторе можно считать равным внешнему напряжению.

$$\varphi_A - \varphi_B = U = q/C, \text{ но } I = dq/dt,$$



следовательно,

$$q = \int I \cdot dt$$

ток меняется по закону,

$$I = I_0 \cdot \sin \omega t$$

откуда

$$q = \int I_0 \cdot \sin \omega t \cdot dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t + q_0$$

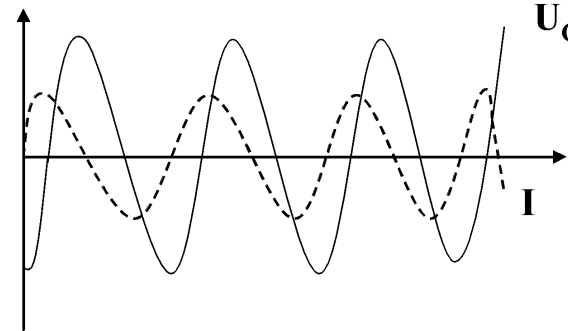
Постоянная интегрирования q_0 обозначает произвольный заряд, не связанный с колебаниями тока, поэтому можно считать $q_0 = 0$.

Тогда

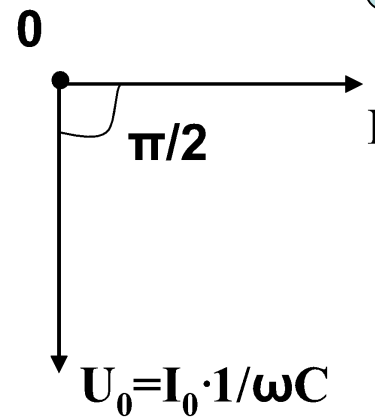
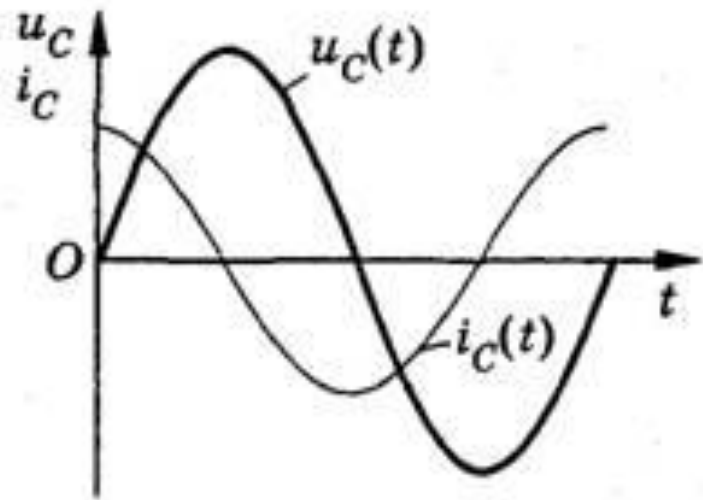
$$U = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = -\frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Следовательно, колебания напряжения на обкладках конденсатора в цепи переменного тока **отстают**

U_C по фазе от колебаний силы тока на $\pi/2$ (или колебания силы тока опережают по фазе колебания напряжения на $\pi/2$). Это означает, что в момент, когда конденсатор начинает заряжаться, сила тока максимальна, а напряжение равно нулю. После того как напряжение достигает максимума, сила тока становится равной нулю и т.д.



Физический смысл этого заключается в следующем: чтобы возникло напряжение на конденсаторе, должен натечь заряд за счет протекания тока в цепи. Отсюда происходит отставание напряжения от силы тока.



векторная диаграмма

Отношение амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе к амплитуде колебаний силы тока называют емкостным сопротивлением конденсатора (обозначается X_C):

$$U_0 = I_0 \frac{1}{\omega C}$$

а по закону Ома $U = I \cdot R$

Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

играет роль сопротивления участка цепи

Она называется кажущимся сопротивлением емкости (**емкостное сопротивление**).

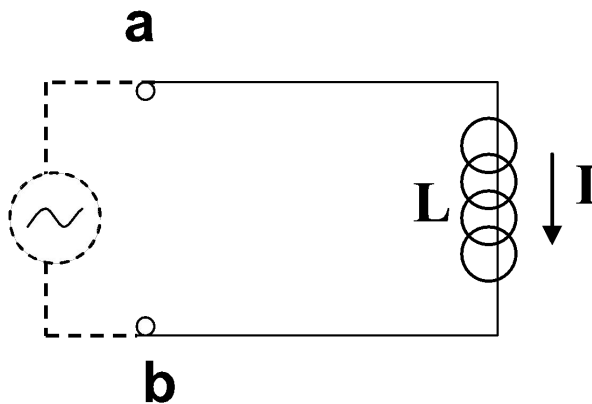
Индуктивность в цепи переменного тока

Пусть напряжение подается на концы катушки с индуктивностью L с пренебрежимо малым сопротивлением и емкостью.

Индуктивность контура с током – это коэффициент пропорциональности между протекающим по контуру током и возникающем при этом магнитным потоком.

Индуктивность L зависит от формы и размеров контура, а также свойств среды

$$\Phi = L \cdot I.$$



При наличии переменного тока в катушке индуктивности возникнет ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s

Уравнение закона Ома запишется следующим образом:

$$U = I \cdot R - \mathcal{E}_s = 0$$

$$\Phi = L \cdot I$$

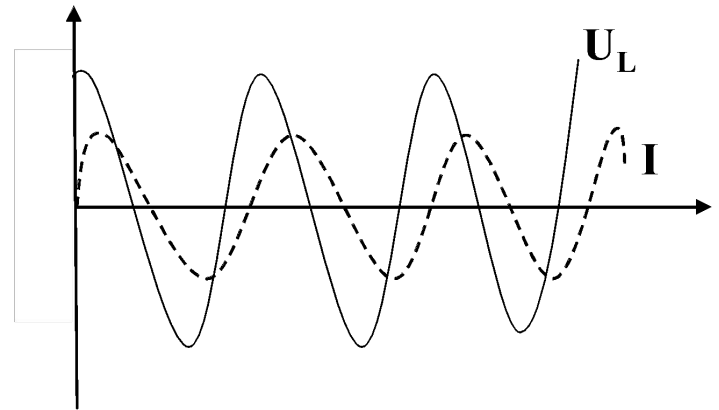
$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

тогда

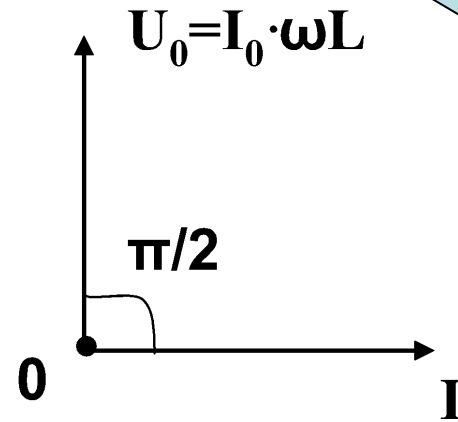
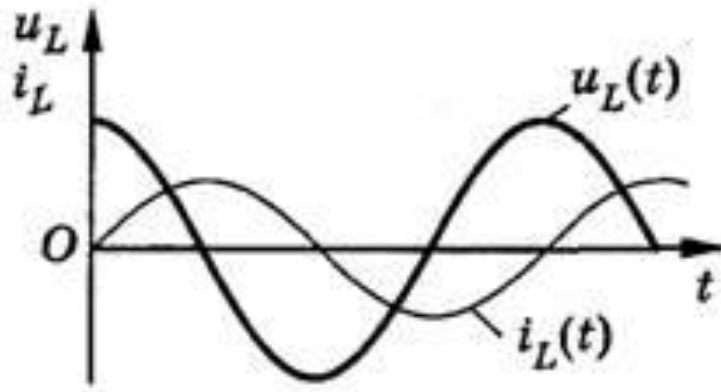
$$U = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_0 \sin \omega t] = I_0 \omega L \cos \omega t = I_0 \omega L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Таким образом, колебания напряжения на индуктивности опережают колебания тока на $\pi/2$.

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$



Физический смысл того, что $\Delta\phi < 0$ следующая: если активное сопротивление $R=0$, то все внешнее напряжение в точности уравнивает ЭДС самоиндукции $U = - \mathcal{E}_s$. Но ЭДС самоиндукции пропорциональна не мгновенному значению тока, а скорости его изменения, которая будет наибольшей в те моменты, когда сила тока проходит через ноль. Поэтому максимумы напряжения U совпадают с нулевыми значениями тока и наоборот.



векторная диаграмма

$$U_0 = I_0 \cdot \omega L = I_0 \cdot R_L$$

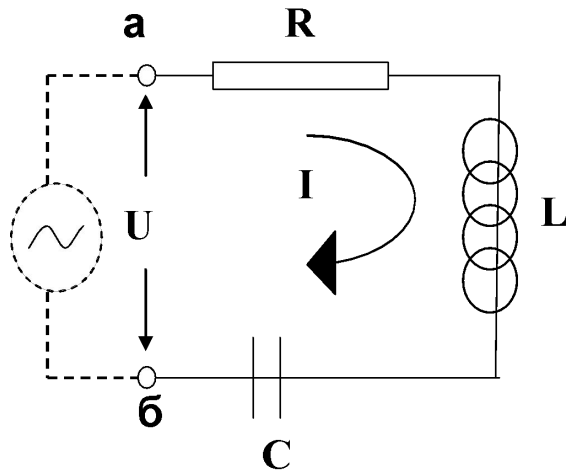
Роль сопротивления в данном случае играет величина $R_L = \omega L$, называемая кажущееся сопротивление индуктивности (*индуктивное сопротивление*).

Если индуктивность измеряется в Генри, а частота ω в с^{-1} , то R_L будет выражаться в Ом.

Закон Ома для переменного тока

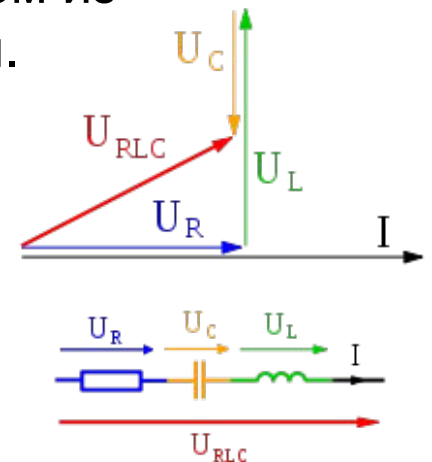
Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора, конденсатора и катушки. Если к выводам этой электрической цепи приложить электрическое напряжение, изменяющееся по гармоническому закону с частотой ω и амплитудой U_m , то в цепи возникнут вынужденные колебания силы тока с той же частотой и некоторой амплитудой I_m .

$$I = I_0 \cdot \sin \omega t$$



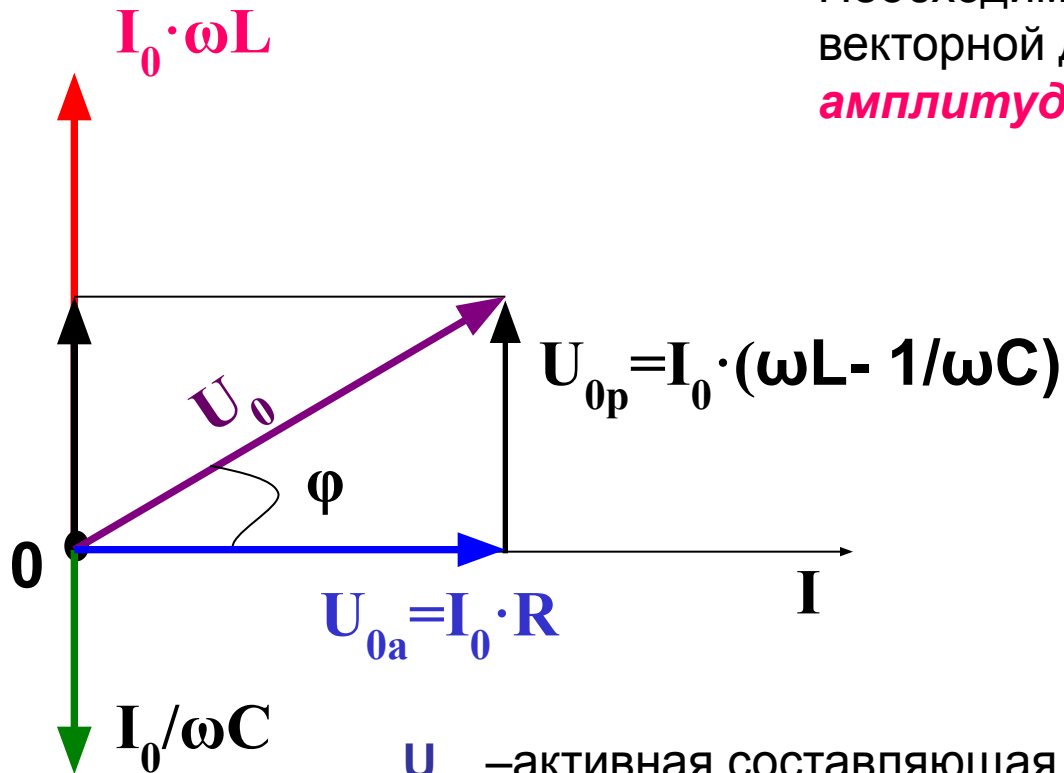
Вычислим напряжение всей цепи, сложив графически падения напряжения на каждом элементе цепи.

При последовательном соединении падения напряжения на каждом из элементов цепи складываются.



С учетом сдвига фаз между U_R , U_C и U_L , о которых говорилось выше, векторная диаграмма будет иметь следующий вид

Необходимо помнить, что при построении векторной диаграммы складываются **амплитудные** значения напряжений.



Таким образом, полное напряжение между концами цепи *a* и *б* можно рассматривать как сумму двух гармонических колебаний: напряжения \mathbf{U}_{0a} и напряжения \mathbf{U}_{0p} ,

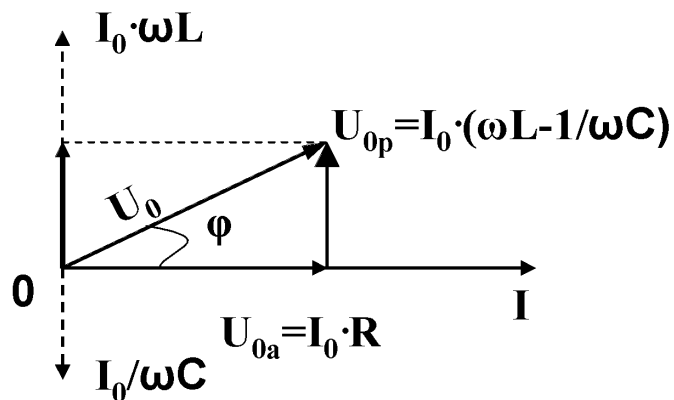
\mathbf{U}_{0a} – активная составляющая напряжения (совпадает с током по фазе)

\mathbf{U}_{0p} – реактивная составляющая напряжения (отличается от силы тока по фазе на $\pi/2$)

Сумма \mathbf{U}_a и \mathbf{U}_p дает

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Падения напряжений U_R, U_C и U_L в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению U . Поэтому, сложив векторы U_R, U_C и U_L , получаем вектор, длина которого равна U_0



Так как сумма проекций векторов на произвольную ось равна проекции суммы этих векторов на ту же ось, то амплитуду полного напряжения можно найти как модуль суммы векторов:

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_0 \cdot Z$$

Z - полное сопротивление цепи или **импеданс**

полный закон Ома для переменного тока

Вектор U_0 образует с осью токов угол φ , тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$X = \frac{U_a}{I_0} = R$$

– активное сопротивление цепи. Активное сопротивление всегда **приводит** к выделению тепла Джоуля-Ленца.

$$Y = \frac{U_p}{I_0} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

– реактивное сопротивление цепи. Наличие реактивного сопротивления **не сопровождается** выделением тепла.

Для наших рассуждений безразлично, в каком месте цепи сосредоточены емкость, индуктивность и сопротивление. Их можно рассматривать как суммарные для всей цепи. Т.е. можно заменить реальный генератор воображаемым, для которого внутреннее сопротивление $r = 0$. Тогда $U = \mathcal{E}$ – ЭДС генератора. Для замкнутой цепи переменного тока

$$\mathcal{E} = I_0 \cdot Z$$

Резонанс напряжений

Если ЭДС генератора изменяется по закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

то в цепи течет ток

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

амплитуда которого связана с амплитудой ЭДС законом Ома

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

фазовый угол определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Величина полного сопротивления

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

При изменении частоты колебаний происходит изменение и амплитуды тока, и сдвига фаз.

если $\omega = 0$

$1/\omega C = \infty$, тогда сопротивление $Z \rightarrow \infty$, а $I_0 = 0$. Т.е. при $\omega = 0$ мы имеем постоянный ток, который не проходит через конденсатор.

при увеличении частоты ω ,

квадрат реактивного сопротивления сначала уменьшается, следовательно, уменьшается и Z , а сила тока I_0 растет.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C}$$

при $\omega = \omega_0$

реактивное сопротивление обращается в ноль, а Z становится наименьшим, равным по величине R . Ток при этом достигает максимума.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega^2 LC - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

при $\omega > \omega_0$

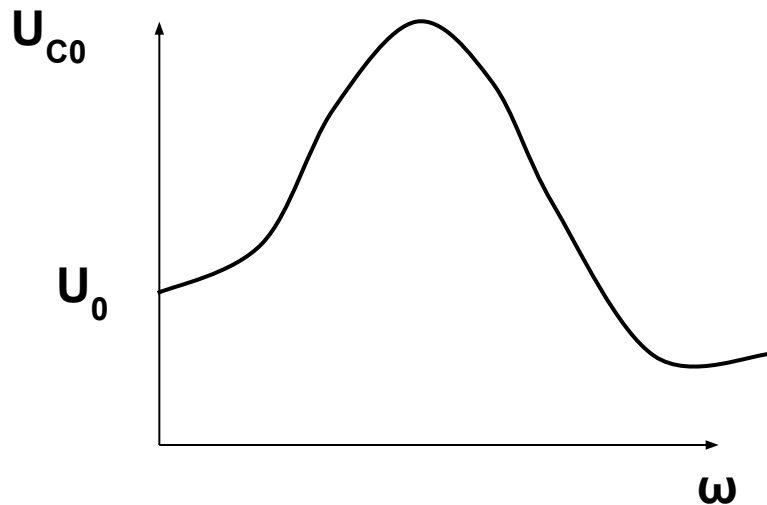
$\omega L \rightarrow \infty$, следовательно, $Z \rightarrow \infty$, $I_0 \rightarrow 0$

Таким образом, в случае, когда внешняя частота $\omega = \omega_0$ сила тока I_0 достигает максимума, изменения тока и напряжения происходят синфазно ($\Delta\varphi = 0$), т.е. контур действует как чисто активное сопротивление. Это явление называется **резонансом напряжений**.

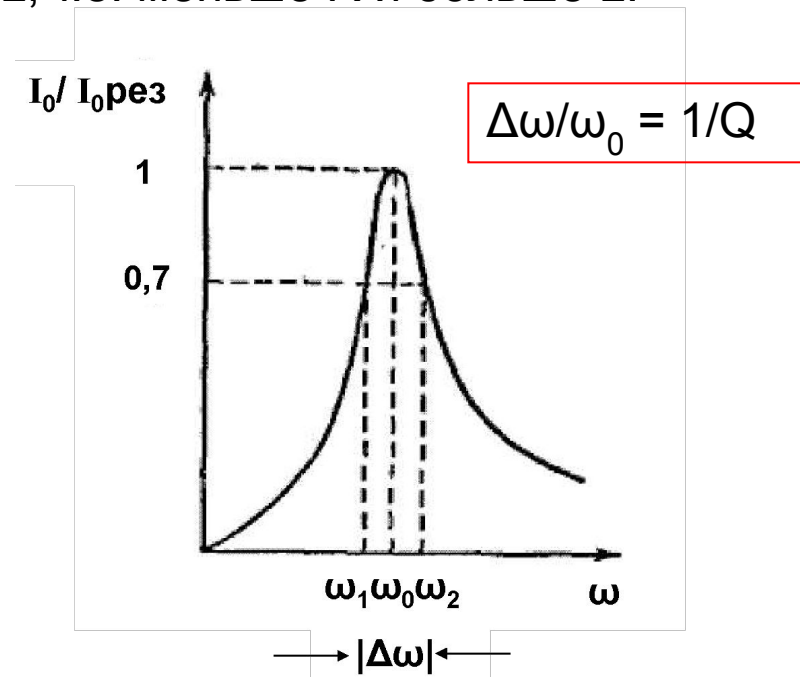
Для напряжения, резонансная частота меньше, чем для тока:

$$\omega_{q\text{ рез}} = \omega_{U\text{ рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L}}$$

Максимум тем выше, чем меньше $\beta = R/2L$, т.е. меньше R и больше L .

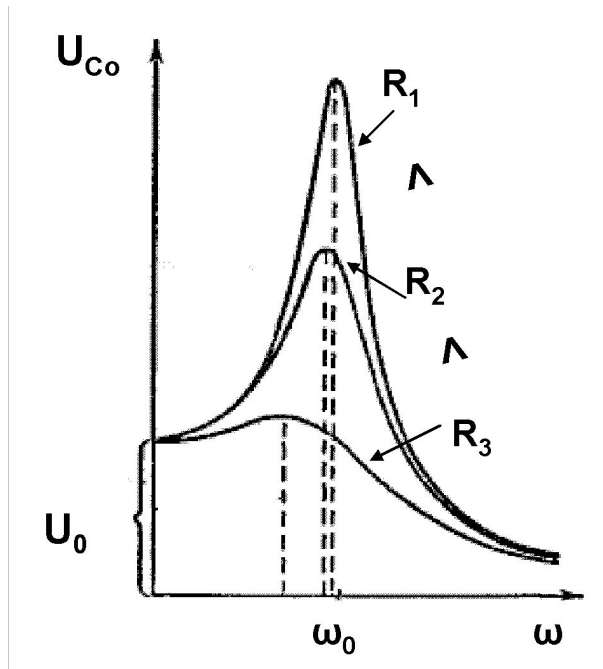


$$U_{C_0 \text{ max}} / U_0 = Q$$

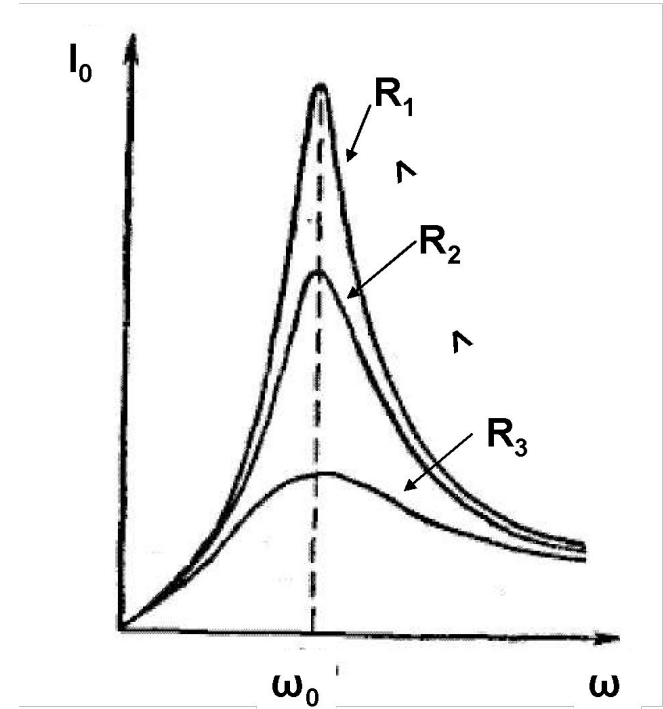


резонансные кривые

Три разные кривые соответствуют трем значениям активного сопротивления R .



резонансные кривые для U_C

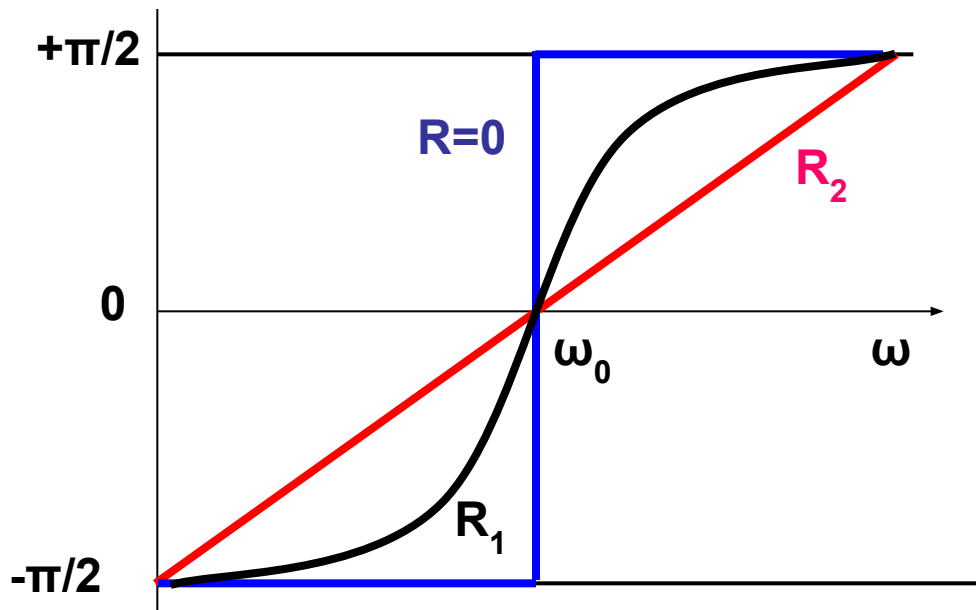


резонансные кривые для I_0

Чем меньше R , тем при прочих равных условиях, тем больше максимальные значения тока и напряжения. Видно, что с ростом сопротивления R максимум U_{C_0} смещается, а максимум I_0 - нет

Рассмотрим изменение разности фаз между током и ЭДС. Так же как и I_0 , φ зависит еще от активного сопротивления контура. Чем оно меньше, тем быстрее изменяется φ вблизи $\omega = \omega_0$, и в предельном случае $R=0$ изменение фазы носит скачкообразный характер.

Зависимость разности фаз φ от частоты колебаний



$$R_2 > R_1$$

Найдем, чему равны амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности при резонансе. Амплитуда тока при резонансе достигает максимума, поэтому

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

поэтому амплитуда напряжения на конденсаторе

т.е. $U_{0C} > \mathcal{E}_0$

$$U_{0C} = R_C \cdot I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cdot \frac{1}{\omega C} = \mathcal{E}_0 \cdot Q$$

Аналогично амплитуда напряжения на индуктивности есть

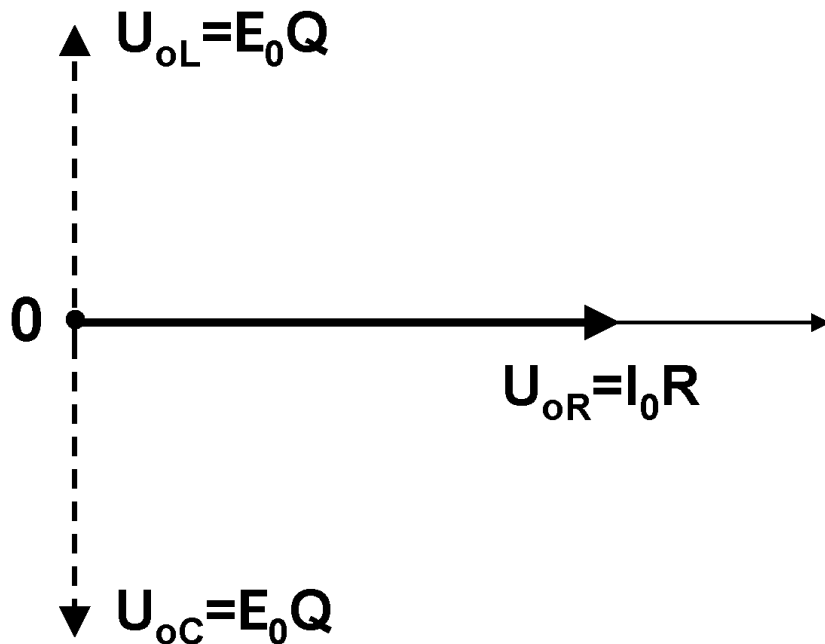
$$U_{0L} = R_L \cdot I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cdot \frac{1}{\omega C} = \mathcal{E}_0 \cdot Q \quad \text{т.к.} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Преобразуем полученное выражение:

$$Q = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{RC \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q – добротность контура –показывает во сколько раз при резонансе напряжение на индуктивности U_{oL} (или емкости U_{oC}) больше, чем ЭДС источника.

Векторная диаграмма напряжений при резонансе



Таким образом, при резонансе колебания напряжения на индуктивности и емкости имеют одинаковы амплитуды, но так как они сдвинуты на $[\pi/2 - (-\pi/2)] = \pi$ их сумма равна нулю, и остается только колебание напряжения на активном сопротивлении.

Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то амплитуды напряжения U_{oL} и U_{oC} больше амплитуды напряжения на концах цепи U_o .