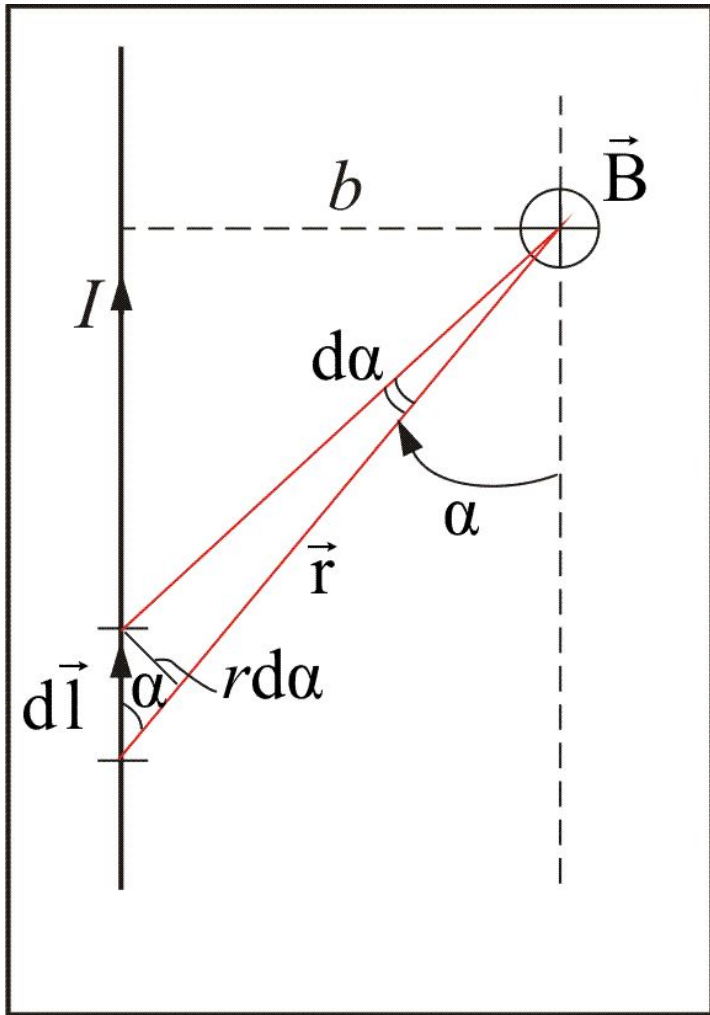


Закон Био–Савара–Лапласа для **вакуума** можно записать так:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ магнитная постоянная.

Магнитное поле прямого тока.



Пусть точка, в которой определяется магнитное поле, находится на расстоянии b от провода.

Все вектора $d\vec{B}$ в данной точке имеют одинаковое направление (за чертеж). Поэтому сложение векторов можно заменить сложением их модулей.

Из рисунка видно, что:

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставив найденные значения r и dl в закон Био–Савара–Лапласа, получим:

$$|dB| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Для **конечного проводника** угол α изменяется от α_1 до α_2 . Тогда:

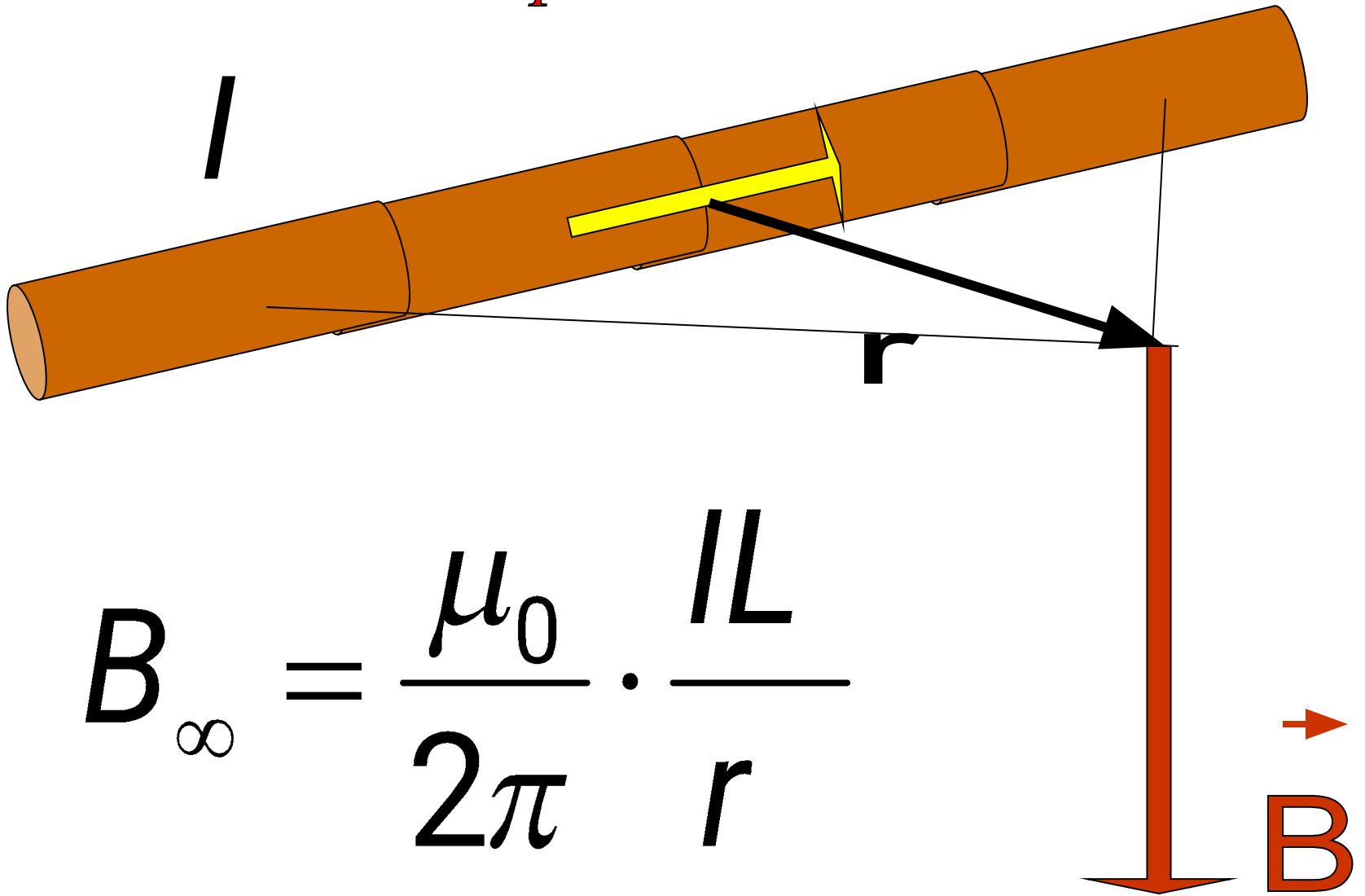
$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\overset{=1}{\cos\alpha_1} - \overset{=0}{\cos\alpha_2}).$$

Для **бесконечно длинного проводника** $\alpha_1 = 0$,
а $\alpha_2 = \pi$, тогда:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Поле прямого тока



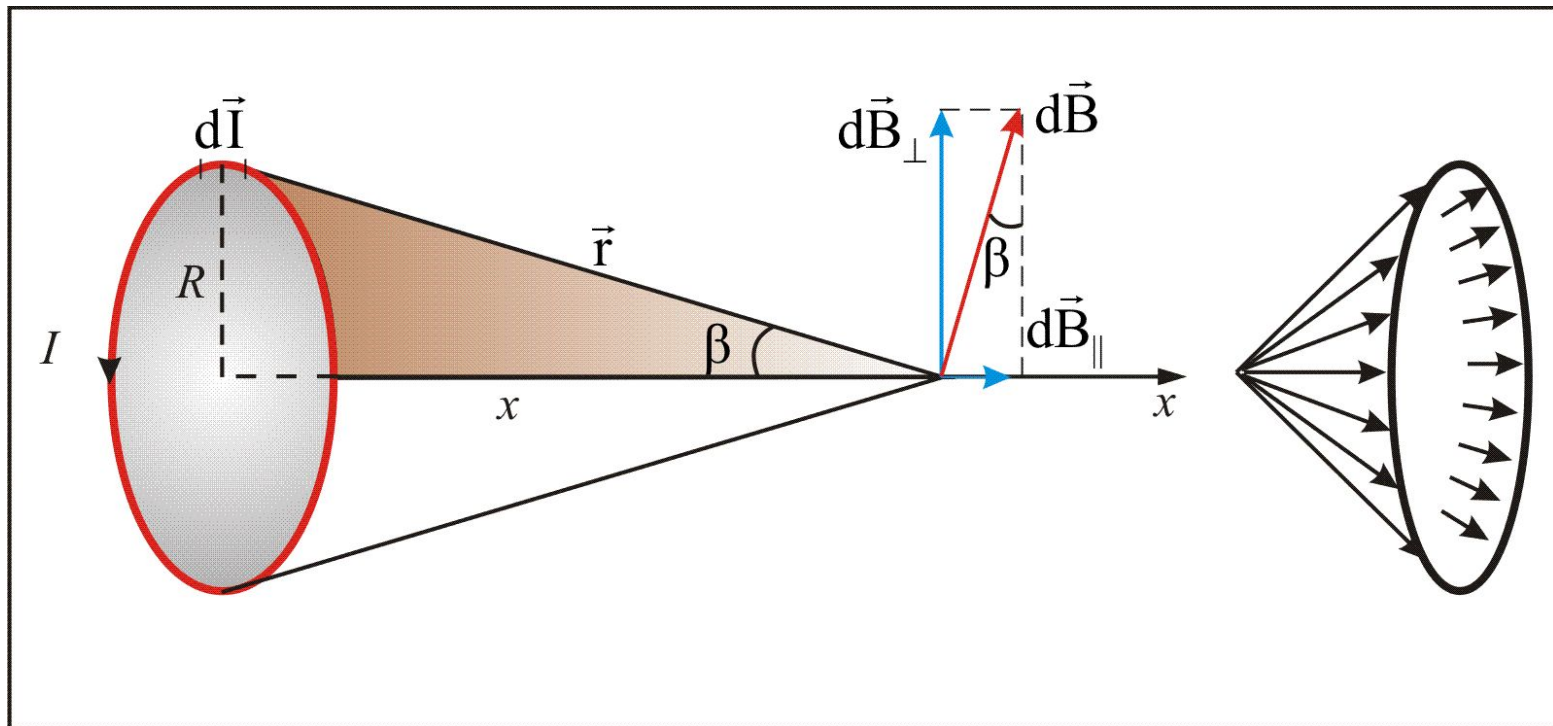
$$B_{\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{IL}{r}$$

Магнитное поле кругового тока

Рассмотрим поле, создаваемое током I , текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R .

$$dB_{\parallel} = dB \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{R}{r}$$



$$\sin\beta = \frac{R}{r}$$

$$dB_{\parallel} = dB \sin\beta$$

т.к. угол между \vec{dl} и \vec{r} α – прямой, то
 $\sin\alpha = 1$,

тогда получим:

$$dB_{\parallel} = dB \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \frac{R}{r}.$$

(1.6.1)

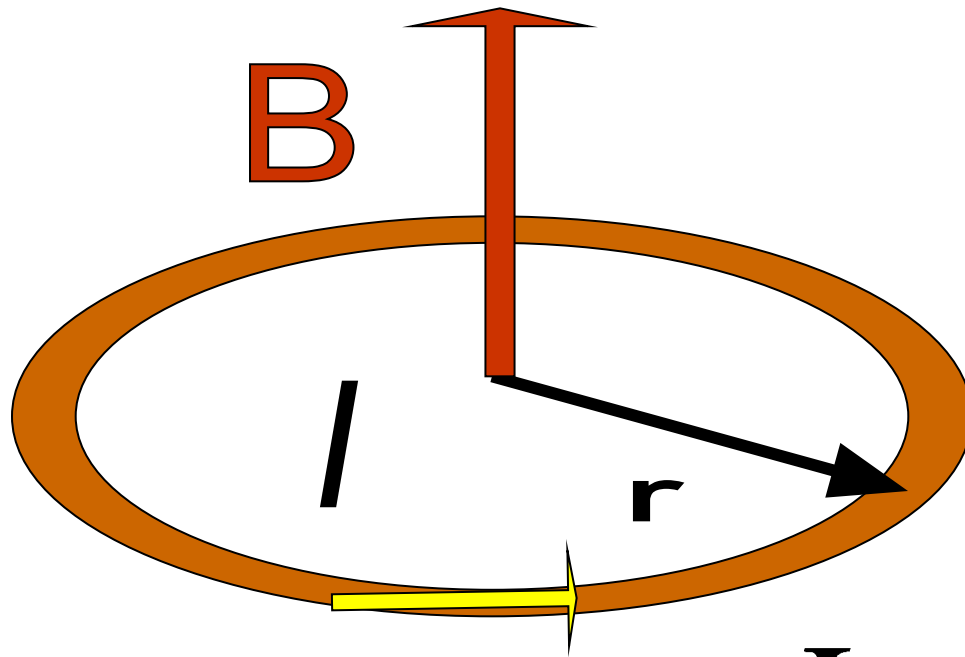
Подставив в (1.6.1) $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ и, проинтегрировав по всему контуру $l = 2\pi R$ получим выражение для нахождения *магнитной индукции кругового тока*:

$$B = \int_0^{2\pi R} dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (1.6.2)$$

При $x = 0$, получим *магнитную индукцию в центре кругового тока*:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (1.6.3)$$

Поле кругового тока



$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{r}$$

Заметим, что в числителе

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

$I\pi R^2 = \bar{IS} = P_m$ магнитный момент контура. Тогда,

на большом расстоянии от контура, при

, магнитную индукцию можно рассчитать
 $R \ll x$

по формуле:

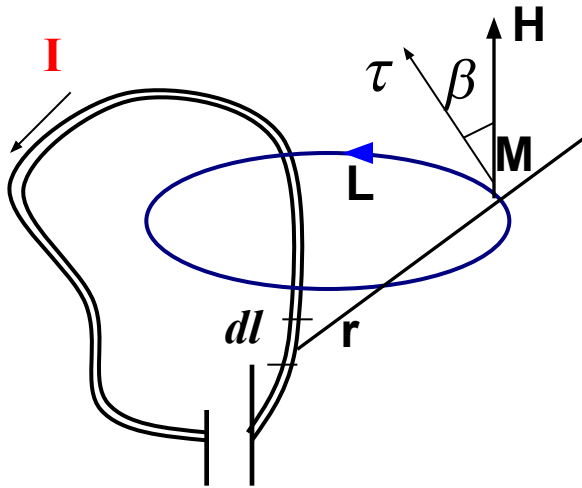
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{x^3}.$$

Рассмотрим еще одно важное следствие из закона Био–Савара–Лапласа, которое облегчает расчеты магнитных полей.

Допустим, что по проводнику течет ток I . По закону Био–Савара–Лапласа

можно рассчитать напряженность в точке M .

$$H = \oint \frac{I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$



Проведем в магнитном поле замкнутую линию L и разделим ее на участки dl . Для каждого участка будет справедливо выражение $Hdl \cos \beta$ где β – угол между H и касательной τ к линии. Просуммируем вдоль всей линии эти выражения

$$\oint H dl \cos \beta = I \qquad \oint B dl \cos \beta = \mu_0 I$$

Если изменить направление тока в проводнике, то в каждой точке поля вектор H изменит свое направление на противоположное, косинусы углов будут иметь противоположный знак, интеграл делается отрицательным .

Знак интеграла изменится и при изменении направления обхода по линии L .

Поэтому направление обхода и направление тока должны быть связаны правилом знаков:

Если буравчик вращать по выбранному нами направлению обхода линии L , то его перемещение соответствует **положительному** направлению тока I .

Выражение $\oint H dl \cos \beta = I$ не зависит ни от формы контура с током, ни от формы замкнутой линии L .

Если линия охватывает несколько проводников с токами I_1, I_2, \dots то по принципу суперпозиции, интеграл будет равен **сумме** этих токов.

Если линия охватывает один и тот же проводник n раз, то интеграл равен **$n \cdot I$**

Если линия L не охватывает токов, то интеграл равен **нулю**.

Интеграл

$$\oint H dl \cos \beta = \oint H dl$$

называется циркуляцией вектора напряженности вдоль данной замкнутой линии обхода.

$$\oint H dl = \sum I_i$$

$$\oint B dl = \mu_0 \sum I_i$$

Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля или закон полного тока

Циркуляция вектора напряженности равна алгебраической сумме токов

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

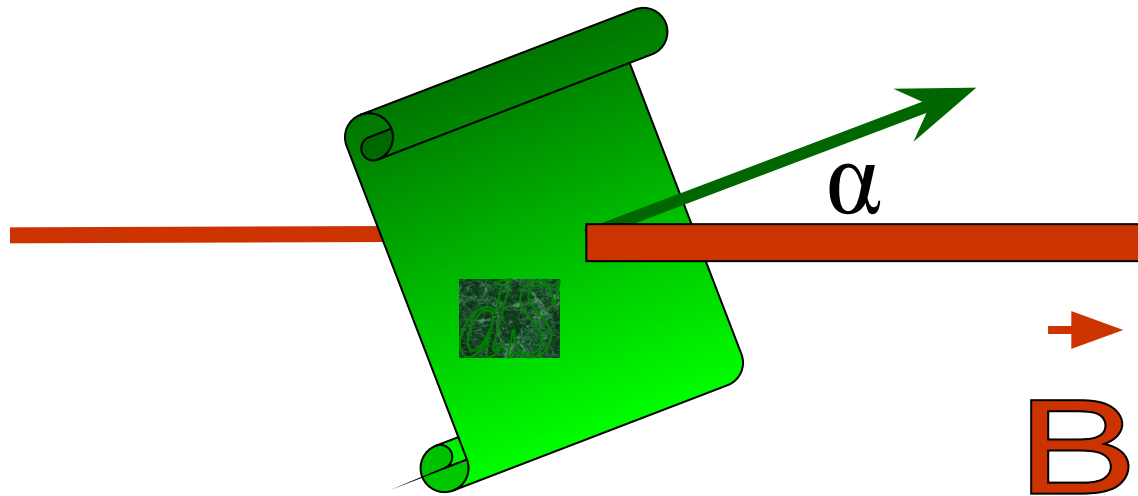
Поток вектора через замкнутую поверхность должен быть равен нулю.

Таким образом:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.7.1)$$

*Это теорема Гаусса для Φ_B (в интегральной форме): **поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.***

Определение потока вектора магнитной индукции



$$d\Phi = B dS \cos \alpha$$

В природе нет магнитных зарядов – источников магнитного поля, на которых начинались и заканчивались бы линии магнитной индукции.

Заменяя поверхностный интеграл в (1.7.1) объемным, получим:

$$\int_V \nabla B dV = 0 \quad (1.7.2)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор Лапласа.

Магнитное поле обладает тем свойством, что его дивергенция всюду равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Электростатического поля может быть выражено скалярным потенциалом φ , а *магнитное поле – вихревое, или соленоидальное*

Основные уравнения магнитостатики

- Основные уравнения магнитостатики для магнитных полей, созданных постоянными потоками зарядов, записанные в дифференциальной форме, имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}.$$

Первое из этих уравнений говорит, что дивергенция вектора \mathbf{B} равна нулю.

- Если сравнить его с аналогичным уравнением для электрического поля

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

то можно прийти к выводу, что магнитного аналога электрического заряда не существует. Нет зарядов, из которых выходят линии вектора магнитной индукции \mathbf{B} .

- Возникают магнитные поля в присутствии токов и являются вихревыми полями в области, где есть токи.
- Векторная функция векторного аргумента – *ротор*, *взятая от \mathbf{B} , пропорциональна плотности тока*

$$\text{rot } \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

- Магнитные линии образуют петли вокруг токов.
- Не имея ни конца, ни начала, линии \mathbf{B} возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли.
- В любых, самых сложных случаях линии \mathbf{B} не исходят из точек.
- Утверждение, что $\text{div} \mathbf{B} = 0$, справедливо всегда.

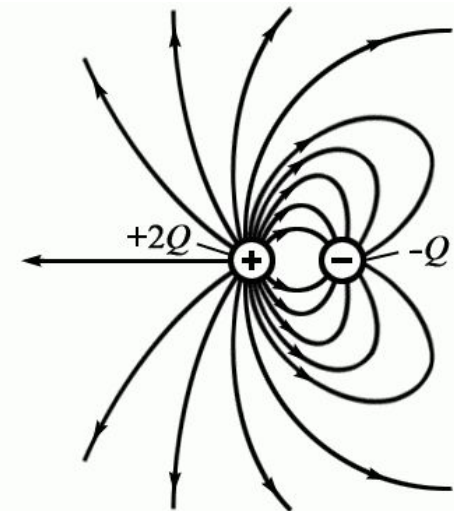
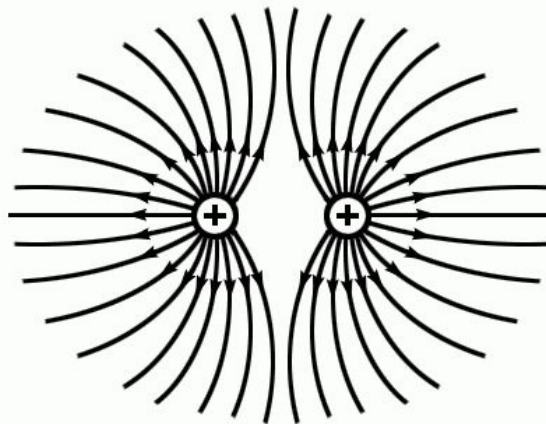
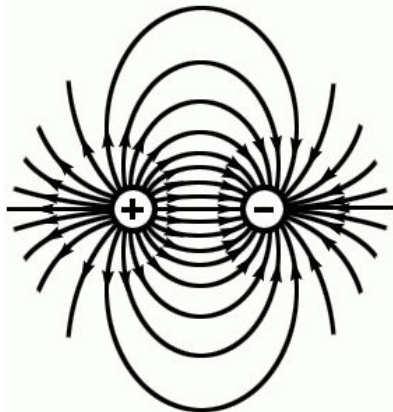
Сравнив **уравнения магнитостатики**

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

с **уравнениями электростатики**

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

МОЖНО ЗАКЛЮЧИТЬ, ЧТО **электрическое поле всегда потенциально, а его источниками являются электрические заряды.**



Поле движущегося заряда

Полагая, что в элементе тока $I \cdot dl$ содержится Δn электронов, имеющих скорости упорядоченного движения V , найдем индукцию поля, создаваемую в данной точке одним движущимся электроном.

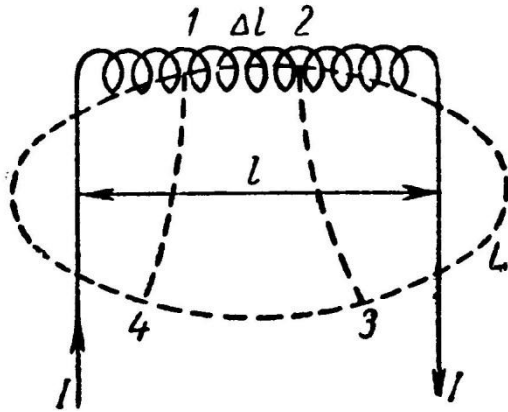
$$B = \frac{\Delta B}{\Delta n}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$$

Так как сила тока $I = \Delta n \cdot e \cdot V \cdot S$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta n \cdot e \cdot v \cdot S}{\Delta n} \frac{1}{r^2} \sin \alpha = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{e \cdot v \cdot S}{r^2} \sin \alpha$$

Напряженность магнитного поля внутри длинного соленоида с ТОКОМ



Соленоид в магнетизме – аналог конденсатора в электричестве.

Поле внутри бесконечного соленоида однородно

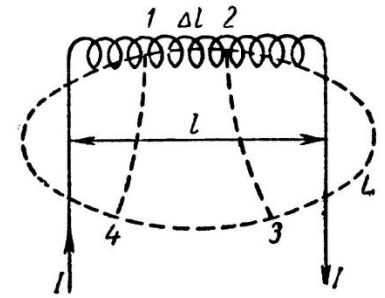
Выберем контур обхода так, чтобы участки 1-2 и 3-4 проходили внутри силовой линии, а 2-3 и 4-1 были перпендикулярны ей.

Участок 1-2 расположен внутри соленоида, а 3-4 вдали от соленоида, где поле мало. Длину Δl выберем такую, чтобы на протяжении нее величину напряженности можно было бы считать одинаковой. Для этого плотность обмотки, т.е. число витков на единицу длины $n = \Delta n / \Delta l$ должна быть достаточно большой.

Циркуляция вектора H по контуру 1-2-3-4 равна

$$\oint H dl = \int_1^2 H dl + \int_2^3 H dl + \int_3^4 H dl + \int_4^1 H dl$$

$$\oint H dl = \int_1^2 H dl + \int_2^3 H dl + \int_3^4 H dl + \int_4^1 H dl$$



Второй и четвертый интегралы равны нулю, т.к. $\vec{H} \perp d\vec{l}$ а третьим интегралом пренебрегаем, ввиду малости поля вне соленоида.

Тогда

$$\oint H dl \approx \int_1^2 H dl = H \Delta l$$

$$H \cdot dl = \sum I_i = \Delta n \cdot I;$$

$$H = \frac{I \Delta n}{\Delta l} = n_1 I$$

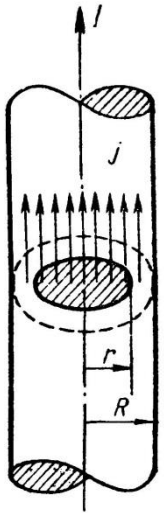
Результат расчета в любой точке сечения соленоида будет одинаковой.

Произведение $n_1 \cdot I$ называется числом ампер-витков на метр.

В величину магнитной индукции на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад. Поэтому у конца полу бесконечного соленоида на его оси величина индукции равна:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot n_1 \cdot I$$

напряженность магнитного поля внутри толстых проводников с ТОКОМ



Если проводник прямолинейный и бесконечно длинный, то вдоль этой линии обхода напряженность магнитного поля будет везде одинакова и в каждой точке направлена по касательной (так как линия обхода совпадает с силовой линией, $\cos \beta = 1$ в формуле

$$\oint H \cdot dl \cdot \cos \beta$$

тогда

$$\oint H dl = H \cdot 2\pi r$$

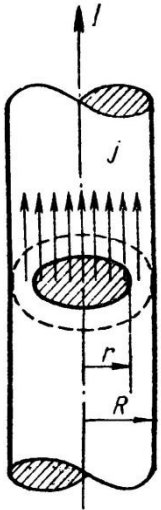
Эта линия охватывает площадь $S = \pi r^2$. Если плотность в различных местах проводника одинакова, то ток, проходящий через S , и охватываемый линией обхода, $I = j \cdot S$, тогда

$$H \cdot 2\pi r = j \cdot \pi r^2$$

$$H = \frac{1}{2} j \cdot r$$

Т.к.
$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r$$



$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r$$

Таким образом, на оси проводника ($r=0$) напряженность поля $H=0$, а по мере удаления от оси – растет прямо пропорционально расстоянию. В точках за пределами объема проводника напряженность магнитного поля обратно пропорциональна расстоянию от оси проводника

$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

Закон Ампера

На прямолинейный участок длиной dl проводника с током I , находящийся в магнитном поле, действует сила, равная

$$d\vec{F} = I \cdot \left[d\vec{l}, \vec{B} \right]$$

ИЛИ

$$F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin \alpha$$

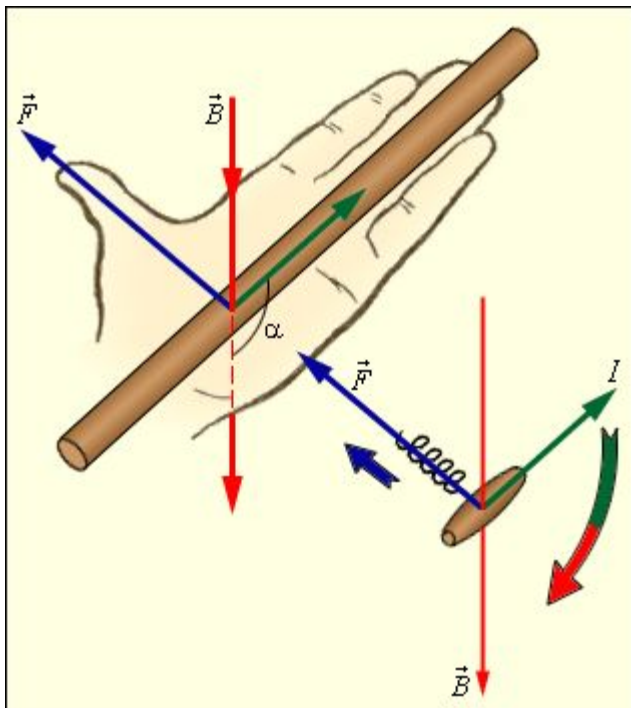
I - сила тока в проводнике;

B - модуль вектора индукции магнитного поля;

L - длина проводника, находящегося в магнитном поле;

α - угол между вектором магнитного поля и направлением тока в проводнике.

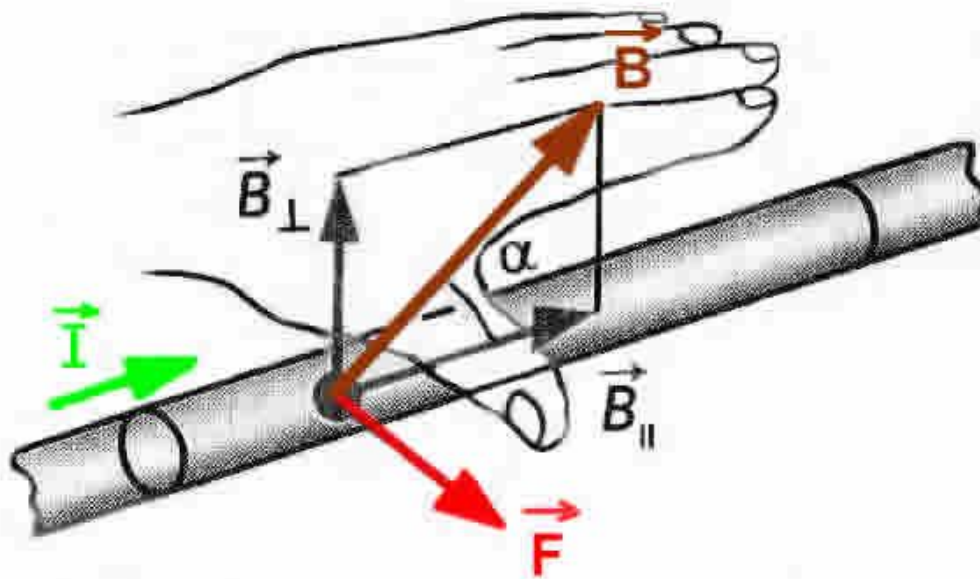
Силу, действующую на проводник с током в магнитном поле, называют силой Ампера.



Максимальная сила Ампера равна:
Ей соответствует $\alpha = 90^\circ$.

$$F = I \cdot L \cdot B$$

Направление силы Ампера определяется по **правилу левой руки**: если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная составляющая вектора магнитной индукции \vec{B} входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по направлению тока, то отогнутый на 90 градусов большой палец покажет направление силы, действующей на отрезок проводника с током, то есть силы Ампера.



Сила Лоренца

Зная закон Ампера, можно получить выражение для силы, с которой магнитное поле действует на движущийся заряд.

Пусть n – число упорядоченно движущихся электронов в единице объема проводника

V - скорость движущихся электронов

S – площадь сечения проводника

$$n \cdot \Delta V = N$$

Тогда $I = n \cdot e \cdot V \cdot S = j \cdot S$,

а элемент тока $I \cdot dl = j \cdot S \cdot dl = n \cdot e \cdot V \cdot S \cdot dl = N \cdot e \cdot V$

N - число упорядоченно движущихся электронов в объеме участка тока.

На 1 заряд действует сила

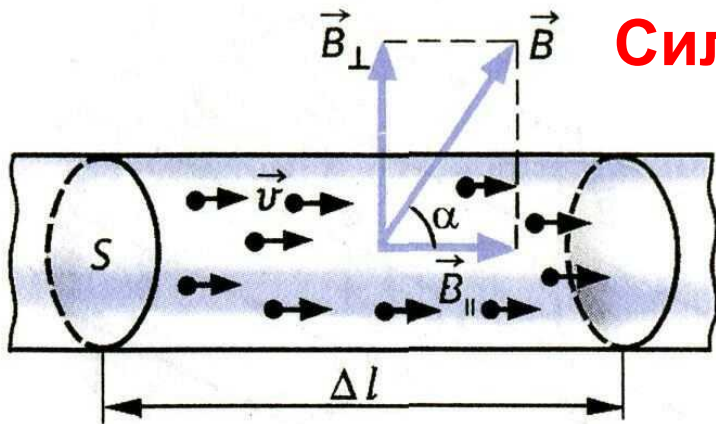
$$\frac{dF}{N} = \frac{1}{N} (I \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha) = \frac{B \cdot N \cdot e \cdot v \cdot \sin \alpha}{N} = e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

или в векторной записи

$$\vec{F} = [e \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}]$$

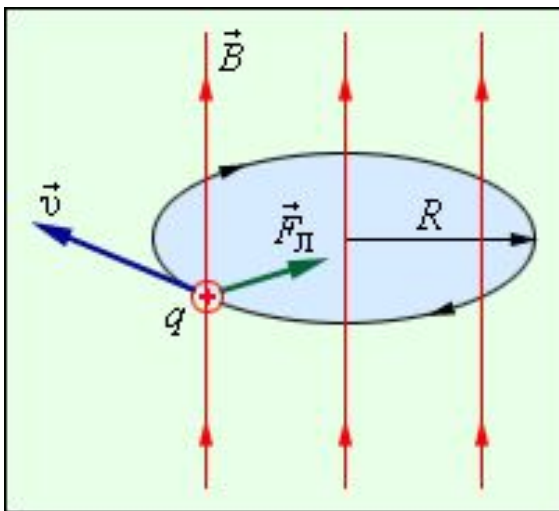
Сила Лоренца

Сила Лоренца



Направление силы Лоренца зависит от знака заряда и перпендикулярна к плоскости, в которой лежат вектора \vec{v} и \vec{B}

Обратите внимание, что сила Лоренца перпендикулярна скорости и поэтому она не совершает работы, не изменяет модуль скорости заряда и его кинетической энергии. Но направление скорости изменяется непрерывно



направление силы Лоренца определяется с помощью того же правила левой руки, что и направление силы Ампера: если левую руку расположить так, чтобы составляющая магнитной индукции B , перпендикулярная скорости заряда, входила в ладонь, а четыре пальца были направлены **по движению положительного заряда** (против движения отрицательного), то отогнутый на 90 градусов большой палец покажет направление действующей на заряд силы Лоренца F л.

Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, то на заряд действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + \cdot q \cdot [\vec{V} \cdot \vec{B}]$$

Пусть два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 движутся вдоль параллельных прямых со скоростью $V \ll c$. Сравним силы, действующие на заряды со стороны электрического $F_{эл}$ и магнитного $F_{магн}$ полей.

$$F_{эл1} = F_{эл2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$F_{магн}$ действующая на заряд q_1

$$F_{магн} = q_1 \cdot V \cdot B_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 q_2 V^2}{r^2}$$

$$B_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_2 [\vec{V} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_2 V}{r^2}$$

Отношение магнитной силы к электрической будет:

$$\frac{F_m}{F_\varepsilon} = \frac{\frac{\mu_0 q_1 q_2 V^2}{4\pi r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}} = \varepsilon_0 \mu_0 V^2 = \frac{V^2}{C^2}$$

то есть магнитная сила слабее кулоновской силы на множитель, пропорциональный V^2/C^2

Таким образом, магнитное взаимодействие между движущимися зарядами является релятивистским эффектом (как следствие закона Кулона). Магнетизм исчез бы, если бы скорость света приблизилась к бесконечности. Он отсутствует у неподвижных зарядов ($V=0$).

Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом, и образуют единое электромагнитное поле.

Значение величины μ_0 содержится в определении силы Ампера :

1Ампер=1А это сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1м друг от друга в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Величину μ_0 – называют магнитной постоянной, а также магнитной проницаемостью вакуума.

Произведение $\mu \cdot \mu_0$ - абсолютная магнитная проницаемость данной среды.

Относительной магнитной проницаемостью данной среды по отношению к вакууму называют безразмерную величину μ , которая показывает во сколько раз сила, действующая на движущиеся заряды и проводники с током в данной среде больше, чем в вакууме.

