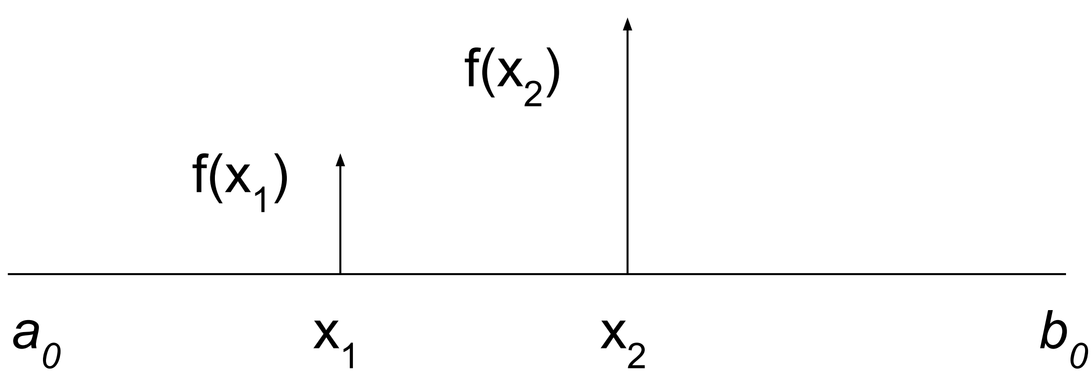
# МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

При построении процесса оптимизации стараются сократить объем вычислений и время поиска. Этого достигают обычно путем сокращения количества вычислений значений целевой функции $f(x)$ (или измерений – при проведении эксперимента). Одним из наиболее эффективных методов, в которых при ограниченном количестве вычислений $f(x)$ достигается наилучшая точность, является **метод золотого сечения**.

Метод золотого сечения состоит в построении последовательности отрезков $[a_0,b_0],[a_1,b_1],\ldots,$ стягивающихся к точке минимума функции $f(x)$. На каждом шаге, за исключением первого, вычисление значения функции $f(x)$ проводится лишь один раз. Эта точка, называемая **золотым сечением,** выбирается специальным образом.

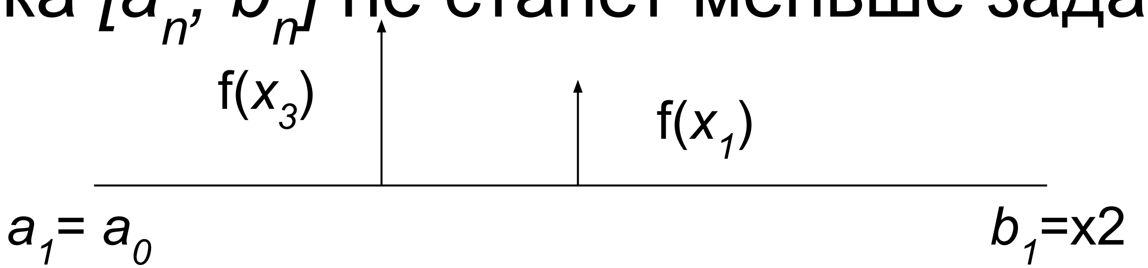
На первом шаге процесса оптимизации внутри отрезка $[a_0, b_0]$ выбираем две внутренние точки $x_1$ и $x_2$ и вычисляем значения целевой функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Поскольку в данном случае $f(x_1) < f(x_2)$, очевидно что минимум расположен на одном из прилегающих к $x_1$ отрезков $[a_0, x_1]$ или $[x_1, x_2]$. Поэтому отрезок $[x_2, b_0]$ можно отбросить, сузив тем самым первоначальный интервал неопределенности.



Второй шаг проводим на отрезке $[a_1, b_1]$, где $a_1=a_0$, $b_1= x_2$. Нужно снова выбрать две внутренние точки, но одна из них $(x_1)$ осталась из предыдущего шага, поэтому достаточно выбрать лишь одну точку $x_3$ , вычислить значение $f(x_3)$ и провести сравнение.

Поскольку здесь $f(x_3)>f(x_1)$, ясно, что минимум находится на отрезке $[x_3, b_1]$.

Обозначим этот отрезок $[a_2, b_2]$, снова выберем одну внутреннюю точку и повторим процедуру сужения интервала неопределенности. Процесс оптимизации повторяется до тех пор, пока длина очередного отрезка $[a_n, b_n]$ не станет меньше заданной E.



Рассмотрим способ размещения внутренних точек на каждом отрезке $[a_k, b_k]$. Пусть длина интервала неопределенности равна $L$, а точка деления делит его на части $L_1$, $L_2$: $L_1 > L_2$, $L = L_1 + L_2$. Золотое сечение интервала неопределенности выбирается так, чтобы отношение длины большего отрезка к длине всего интервала равнялось отношению длины меньшего отрезка к длине большего отрезка:

$$L_1 / L = L_2 / L_1$$

Из этого соотношения можно найти точку деления, определив отношение $L_2/L_1$. Преобразуем равенство и найдем значение $L_2/L_1$ :

$$L_1^2=L_2*L,\ L_1^2=L_2*(L_1+L_2),$$

$$L_2^2+L_1*L_2-L_1^2=0,$$

$$(L_2/L_1)^2+L_2/L_1-1=0,$$

$$L_2/L_1=(-1+\sqrt{5})/2 \text{ и } L_2/L_1=(-1-\sqrt{5})/2,$$

Поскольку нас интересует только положительное решение, то

$$L_2/L_1 = L_1/L=(-1+\sqrt{5})/2\approx 0.618$$

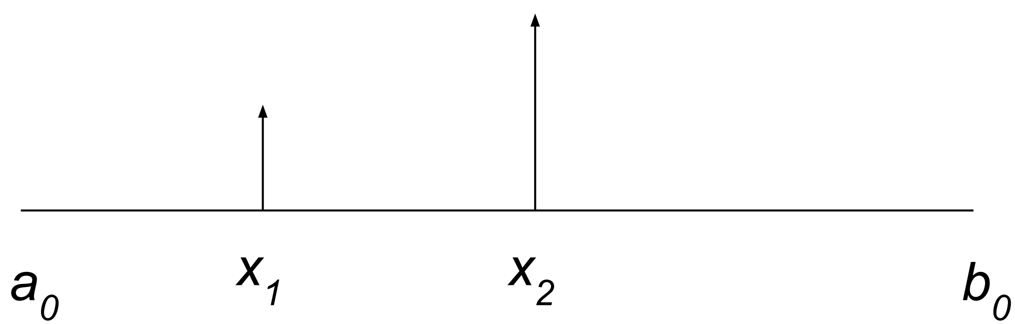
$$L_1\approx 0.618L,\ L_2\approx 0.382L$$

Поскольку заранее неизвестно, в какой последовательности ($L_1$ и $L_2$ или $L_2$и $L_1$) делить интервал неопределенности, то рассматривают внутренние точки, соответствующие двум этим способам деления. На рисунке точки деления $x_1$и $x_2$ выбираются с учетом полученных значений для частей отрезка. В данном случае имеем

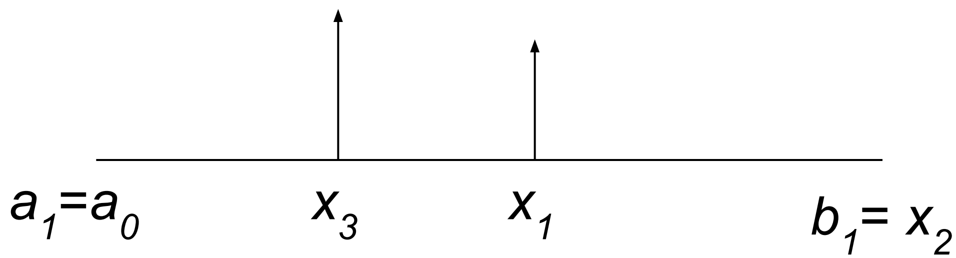
$$x_1-a_0=b_0-x_2= 0.382d_0,$$

$$b_0-x_1=x_2-a_0=0.618d_0,$$

$$d_0=b_0-a_0.$$



После первого шага оптимизации получается новый интервал неопределенности – отрезок $[a_1, b_1]$




Можно показать, что точка $x_1$ делит этот отрезок в требуемом отношении, при этом

$$b_1 - x_1 = 0.382 d_1,\ d_1 = b_1 - a_1$$

Проведем преобразования:

$$b_1 - x_1 = x_2 - x_1 = x_2 - x_1 + d_0 - d_0 = x_2 - x_1 + b_0 - a_0 - b_0 + a_0 = (b_0 - a_0) - (x_1 - a_0) - (b_0 - x_2) = d_0 - 0.382 d_0 - 0.382 d_0 = 0.236 d_0,$$

$$d_1 = x_2 - a_0 = 0.618 d_0,$$

$$b_1 - x_1 = 0.236 (d_1 / 0.618) = 0.382 d_1$$

Вторая точка деления $x_3$ выбирается на таком же расстоянии от левой границы отрезка, т.е.

$$x_3-a_1=0.382d_1$$

И снова интервал неопределенности уменьшается до размера

$$d_2=b_2-a_2=b_1-x_3=0.618d_1=(0.618)^2d_0$$

Используя полученные соотношения, можно записать координаты точек деления $y$ и $z$ отрезка $[a_k,b_k]$ на $(k+1)$-м шаге оптимизации $(y<z)$:

$$y-a_k=0.382* d_k$$

$$y=a_k +0.382(b_k-a_k)=0.618*a_k+0.382*b_k$$

$$b_k -z =0.382* d_k$$

$$z= b_k- 0.382(b_k-a_k)=0.382*a_k+0.618*b_k$$

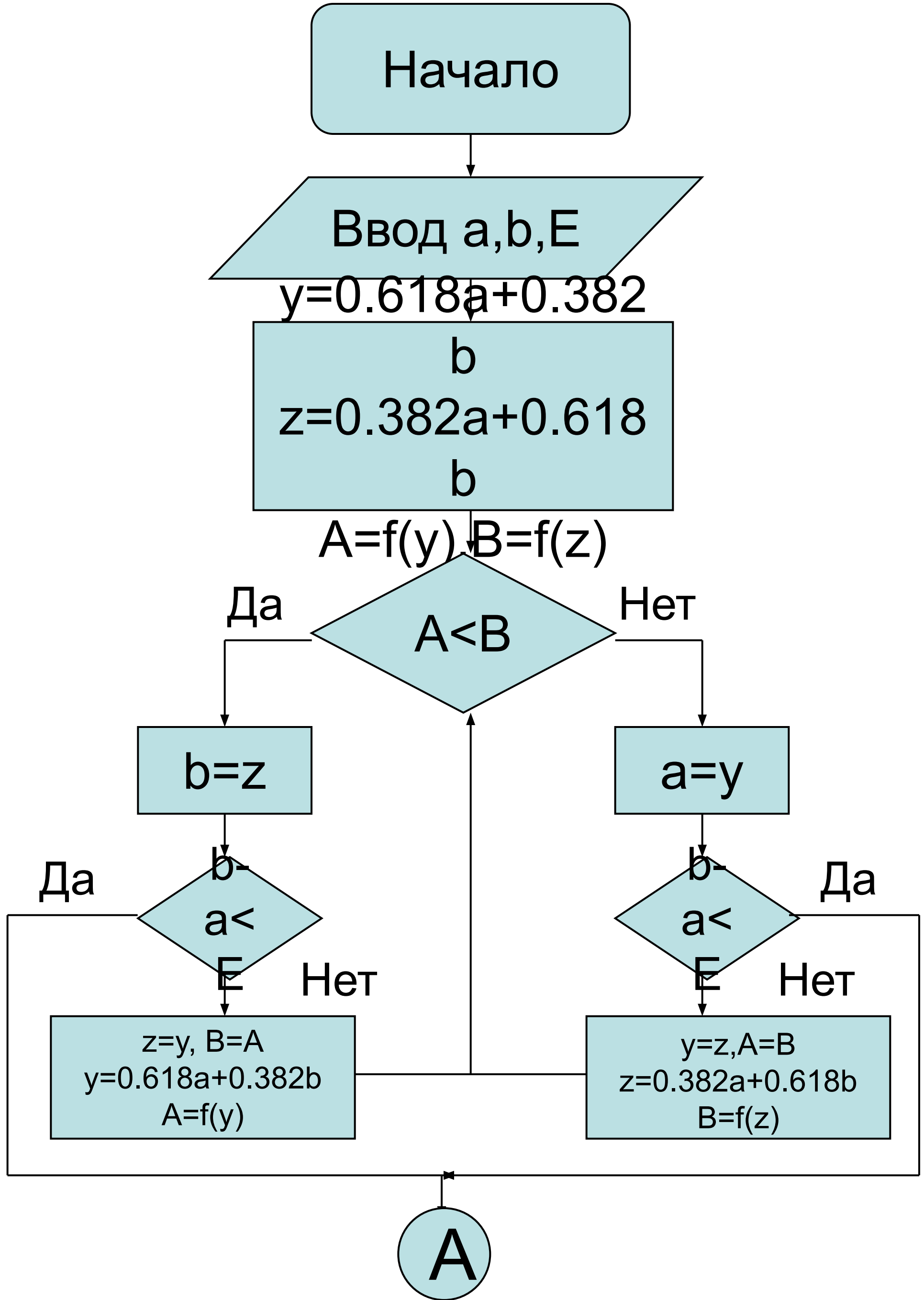
При этом длина интервала неопределенности равна

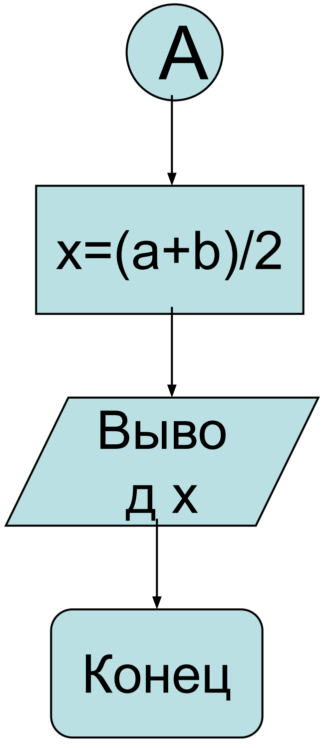
$$d_k=b_k-a_k=(0.618)^kd_0$$

Процесс оптимизации заканчивается при выполнении условия $d_k<E$.При этом проектный параметр оптимизации составляет $a_k<x<b_k$. Можно в качестве оптимального значения принять $x=a_k$ (или $x=b_k$, $x=(a_k+b_k)/2$ и т.п.)

**Блок-схема процесса одномерной оптимизации методом золотого сечения**

*y,z*-точки деления отрезка *[a,b]*,*y*<*z*. В результате выполнения алгоритма выдается оптимальное значение проектного параметра *x*, в качестве которого принимается середина последнего интервала неопределенности.


Начало
Ввод a,b,E
y=0.618a+0.382b
z=0.382a+0.618b
A=f(y),B=f(z)
Да
A<B
Нет
b=z
a=y
Да
b-a<E
Нет
b-a<E
Да
Нет
z=y, B=A
y=0.618a+0.382b
A=f(y)
y=z,A=B
z=0.382a+0.618b
B=f(z)
A


A
x=(a+b)/2
Выво
д x
Конец

**Пример**

Для оценки сопротивления дороги движению автомобиля при скорости V км/ч можно использовать эмпирическую формулу $f(V)=24-2/3*V+1/30*V^2$. Определить скорость, при которой сопротивление будет минимальным.

**Решение**

Это задача одномерной оптимизации. Здесь сопротивление f(V)- целевая функция, а V-проектный параметр. Данную задачу легко решить путем нахождения минимума с помощью производной, поскольку данная функция дифференцируемая.

$$f'(V)=2/3+2*V/30=0$$

V=10 км/ч

А теперь решим задачу методом золотого сечения. Пусть границы интервала равны:a=5,b=20. Расчеты проводятся в соответствии с блок-схемой с погрешностью Е=1км/ч. Результаты решения приведены в виде таблицы.

| Шаг | a | y | z | b | A | B | b-a |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10.7 | 14.3 | 20 | 20.7 | 21.3 | 15 |
| 2 | 5 | 8.6 | 10.7 | 14.3 | 20.73 | 20.68 | 9.3 |
| 3 | 8.6 | 10.7 | 12.1 | 14.3 | 20.68 | 20.81 | 5.7 |
| 4 | 8.6 | 9.9 | 10.7 | 12.1 | 20.66 | 20.68 | 3.5 |
| 5 | 8.6 | 9.4 | 9.9 | 10.7 | 20.68 | 20.66 | 2.1 |
| 6 | 9.4 | | | 10.7 | | | 1.3 |

Решение для первого этапа:

$y=0.618*5+0.382*20\approx10.7$

$z=0.382*5+0.618*20\approx14.3$

$A=24-2/3*10.7+1/30*10.7^2\approx20.7$

$B=24-2/3*14.3+1/30*14.3^2\approx21.3$

$A<B$

При данной невысокой точности вычислений достаточно четырех шагов оптимизации. В этом случае искомое значение скорости равно

$V=(8.6-10.7)/2=9.65$км/ч

После пяти шагов этот результат получается с меньшей погрешностью:

$V=(9.4+10.7)/2=10.05$км/ч