

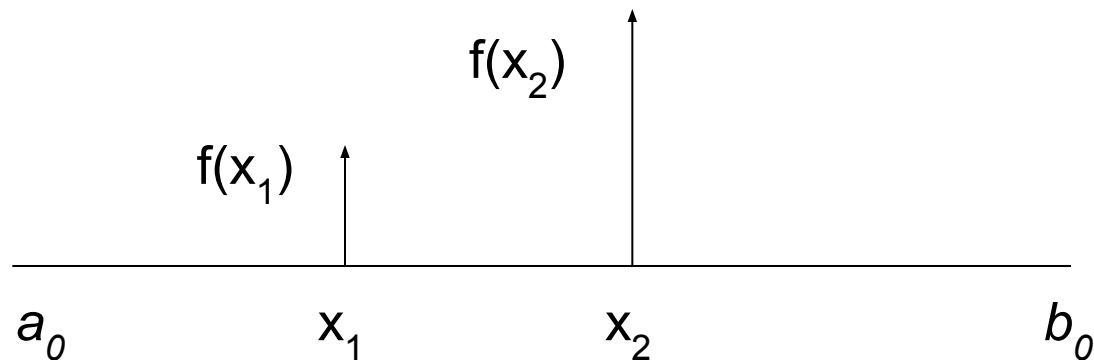
МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

При построении процесса оптимизации стараются сократить объем вычислений и время поиска. Этого достигают обычно путем сокращения количества вычислений значений целевой функции $f(x)$ (или измерений – при проведении эксперимента). Одним из наиболее эффективных методов, в которых при ограниченном количестве вычислений $f(x)$ достигается наилучшая точность, является **метод золотого сечения.**

Метод золотого сечения состоит в построении последовательности отрезков $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$, стягивающихся к точке минимума функции $f(x)$. На каждом шаге, за исключением первого, вычисление значения функции $f(x)$ проводится лишь один раз.

Эта точка, называемая **золотым сечением**, выбирается специальным образом.

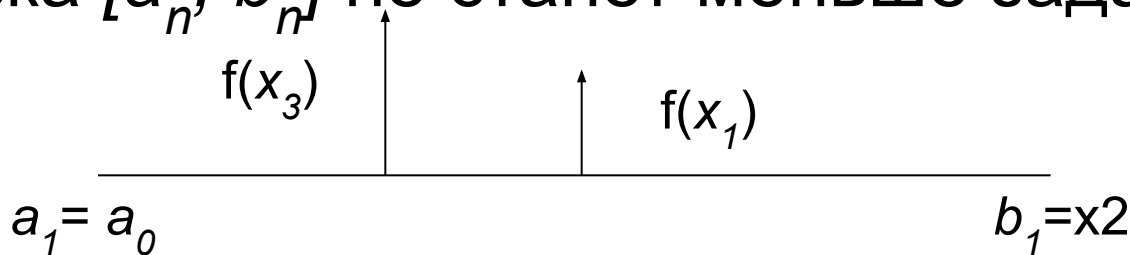
На первом шаге процесса оптимизации внутри отрезка $[a_0, b_0]$ выбираем две внутренние точки x_1 и x_2 и вычисляем значения целевой функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Поскольку в данном случае $f(x_1) < f(x_2)$, очевидно что минимум расположен на одном из прилегающих к x_1 отрезков $[a_0, x_1]$ или $[x_1, x_2]$. Поэтому отрезок $[x_2, b_0]$ можно отбросить, сузив тем самым первоначальный интервал неопределенности.



Второй шаг проводим на отрезке $[a_1, b_1]$, где $a_1 = a_0$, $b_1 = x_2$. Нужно снова выбрать две внутренние точки, но одна из них (x_1) осталась из предыдущего шага, поэтому достаточно выбрать лишь одну точку x_3 , вычислить значение $f(x_3)$ и провести сравнение.

Поскольку здесь $f(x_3) > f(x_1)$, ясно, что минимум находится на отрезке $[x_3, b_1]$.

Обозначим этот отрезок $[a_2, b_2]$, снова выберем одну внутреннюю точку и повторим процедуру сужения интервала неопределенности. Процесс оптимизации повторяется до тех пор, пока длина очередного отрезка $[a_n, b_n]$ не станет меньше заданной ϵ .



Рассмотрим способ размещения внутренних точек на каждом отрезке $[a_k, b_k]$. Пусть длина интервала неопределенности равна L , а точка деления делит его на части L_1, L_2 : $L_1 > L_2$, $L = L_1 + L_2$. Золотое сечение интервала неопределенности выбирается так, чтобы отношение длины большего отрезка к длине всего интервала равнялось отношению длины меньшего отрезка к длине большего отрезка:

$$L_1/L = L_2/L_1$$

Из этого соотношения можно найти точку деления, определив отношение L_2/L_1 . Преобразуем равенство и найдем значение L_2/L_1 :

$$L_1^2 = L_2 * L, \quad L_1^2 = L_2 * (L_1 + L_2),$$

$$L_2^2 + L_1 * L_2 - L_1^2 = 0,$$

$$(L_2/L_1)^2 + L_2/L_1 - 1 = 0,$$

$$L_2/L_1 = (-1 + \sqrt{5})/2 \text{ и } L_2/L_1 = (-1 - \sqrt{5})/2,$$

Поскольку нас интересует только положительное решение, то

$$L_2/L_1 = L_1/L = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0.618$$

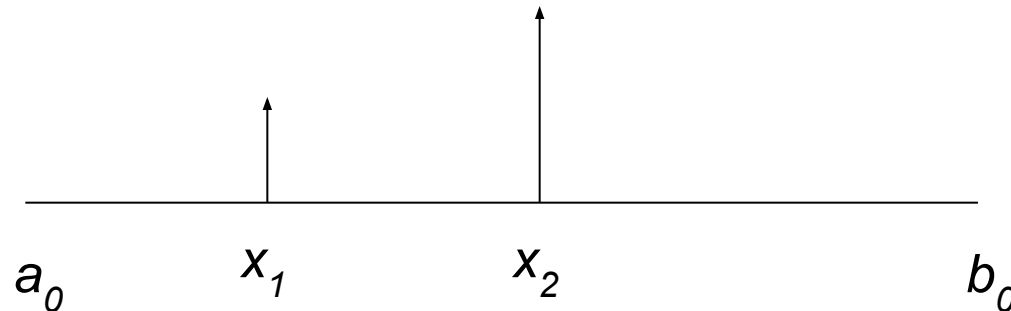
$$L_1 \approx 0.618L, \quad L_2 \approx 0.382L$$

Поскольку заранее неизвестно, в какой последовательности (L_1 и L_2 или L_2 и L_1) делить интервал неопределенности, то рассматривают внутренние точки, соответствующие двум этим способам деления. На рисунке точки деления x_1 и x_2 выбираются с учетом полученных значений для частей отрезка. В данном случае имеем

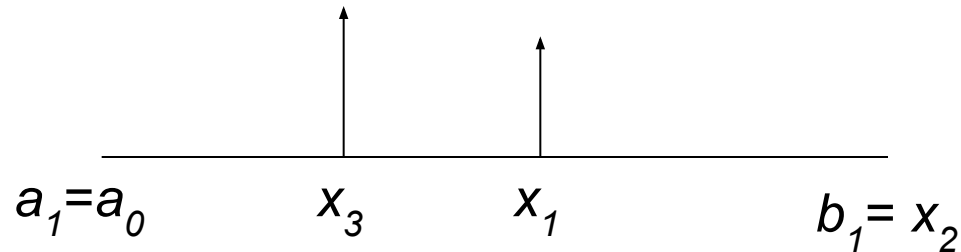
$$x_1 - a_0 = b_0 - x_2 = 0.382d_0,$$

$$b_0 - x_1 = x_2 - a_0 = 0.618d_0,$$

$$d_0 = b_0 - a_0.$$



После первого шага оптимизации получается новый интервал неопределенности – отрезок $[a_1, b_1]$



Можно показать, что точка x_1 делит этот отрезок в требуемом отношении, при этом

$$b_1 - x_1 = 0.382d_1, \quad d_1 = b_1 - a_1$$

Проведем преобразования:

$$b_1 - x_1 = x_2 - x_1 = x_2 - x_1 + d_0 - d_0 = x_2 - x_1 + b_0 - a_0 - b_0 + a_0$$

$$+ a_0 = (b_0 - a_0) - (x_1 - a_0) - (b_0 - x_2) = d_0 - 0.382d_0 - 0.382d_0 = 0.236d_0,$$

$$d_1 = x_2 - a_0 = 0.618d_0,$$

$$b_1 - x_1 = 0.236(d_1 / 0.618) = 0.382d_1$$

Вторая точка деления x_3 выбирается на таком же расстоянии от левой границы отрезка, т.е.

$$x_3 - a_1 = 0.382d_1$$

И снова интервал неопределенности уменьшается до размера

$$d_2 = b_2 - a_2 = b_1 - x_3 = 0.618d_1 = (0.618)^2d_0$$

Используя полученные соотношения, можно записать координаты точек деления y и z отрезка $[a_k, b_k]$ на $(k+1)$ -м шаге оптимизации ($y < z$):

$$y - a_k = 0.382 * d_k$$

$$y = a_k + 0.382(b_k - a_k) = 0.618 * a_k + 0.382 * b_k$$

$$b_k - z = 0.382 * d_k$$

$$z = b_k - 0.382(b_k - a_k) = 0.382 * a_k + 0.618 * b_k$$

При этом длина интервала неопределенности равна

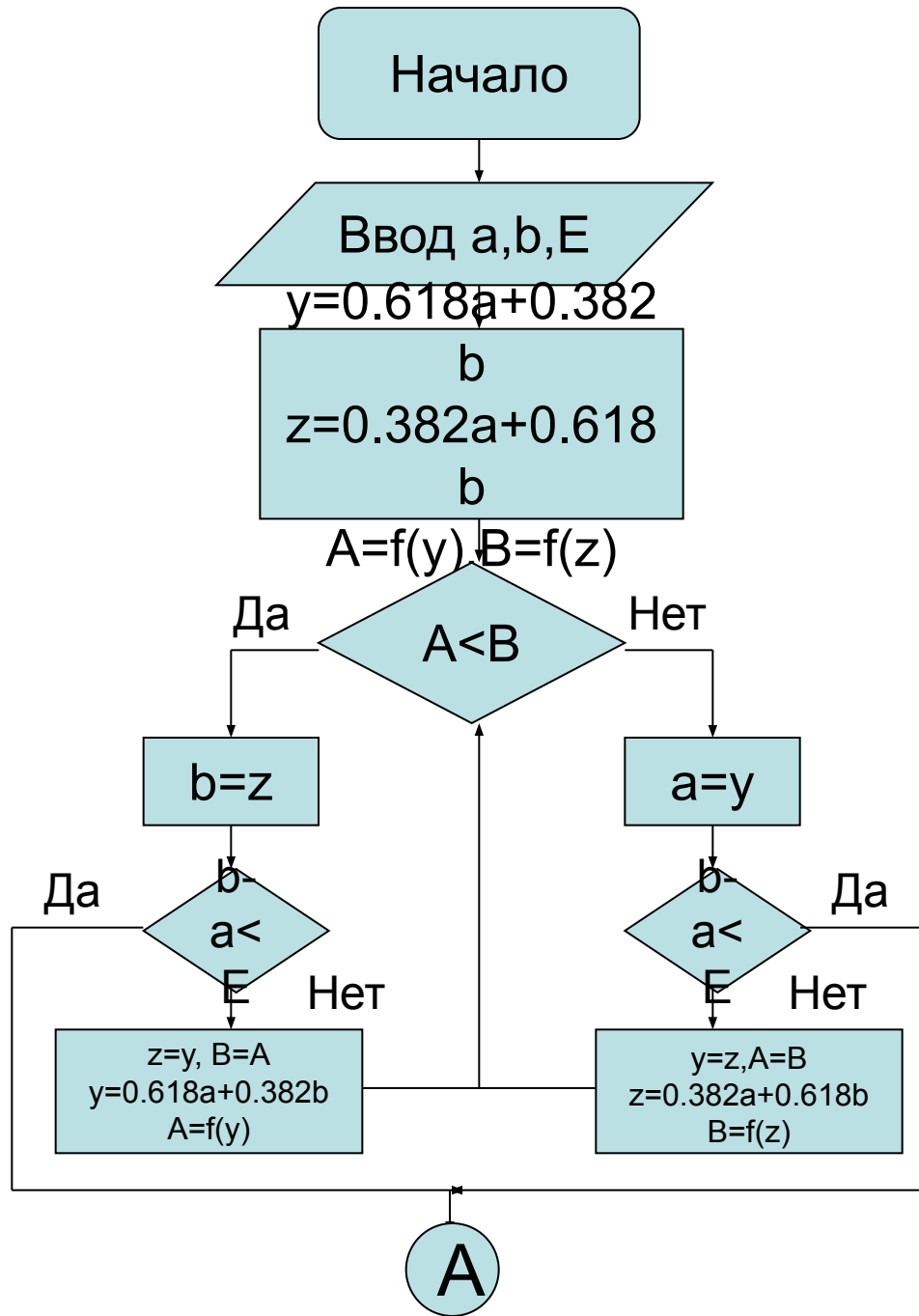
$$d_k = b_k - a_k = (0.618)^k d_0$$

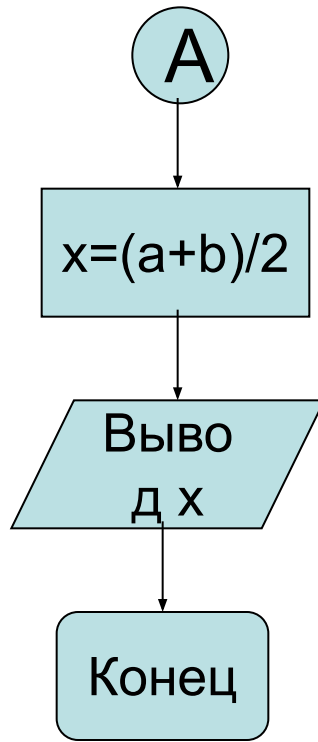
Процесс оптимизации заканчивается при выполнении условия $d_k < \epsilon$. При этом проектный параметр оптимизации составляет $a_k < x < b_k$.

Можно в качестве оптимального значения принять $x = a_k$ (или $x = b_k$, $x = (a_k + b_k)/2$ и т.п.)

Блок-схема процесса одномерной оптимизации методом золотого сечения

y, z -точки деления отрезка $[a, b]$, $y < z$. В результате выполнения алгоритма выдается оптимальное значение проектного параметра x , в качестве которого принимается середина последнего интервала неопределенности.





Пример

Для оценки сопротивления дороги движению автомобиля при скорости V км/ч можно использовать эмпирическую формулу $f(V)=24-2/3*V+1/30*V^2$. Определить скорость, при которой сопротивление будет минимальным.

Решение

Это задача одномерной оптимизации. Здесь сопротивление $f(V)$ - целевая функция, а V -проектный параметр. Данную задачу легко решить путем нахождения минимума с помощью производной, поскольку данная функция дифференцируемая.

$$f'(V)=2/3+2*V/30=0$$

$$V=10 \text{ км/ч}$$

А теперь решим задачу методом золотого сечения.
Пусть границы интервала равны: $a=5, b=20$. Расчеты
проводятся в соответствии с блок-схемой с
погрешностью $E=1\text{ км/ч}$. Результаты решения
приведены в виде таблицы.

Шаг	a	y	z	b	A	B	b-a
1	5	10.7	14.3	20	20.7	21.3	15
2	5	8.6	10.7	14.3	20.73	20.68	9.3
3	8.6	10.7	12.1	14.3	20.68	20.81	5.7
4	8.6	9.9	10.7	12.1	20.66	20.68	3.5
5	8.6	9.4	9.9	10.7	20.68	20.66	2.1
6	9.4			10.7			1.3

Решение для первого этапа:

$$y=0.618*5+0.382*20\approx 10.7$$

$$z=0.382*5+0.618*20\approx 14.3$$

$$A=24-2/3*10.7+1/30*10.7^2\approx 20.7$$

$$B=24-2/3*14.3+1/30*14.3^2\approx 21.3$$

$$A < B$$

При данной невысокой точности вычислений достаточно четырех шагов оптимизации. В этом случае искомое значение скорости равно

$$V=(8.6-10.7)/2=9.65\text{км/ч}$$

После пяти шагов этот результат получается с меньшей погрешностью:

$$V=(9.4+10.7)/2=10.05\text{км/ч}$$