# *Приклади до завдання 2*

**Приклад 1: Завдання протидії**. Задані цільові функції супротивників, також множина стратегій кожного з них:

$$f_{12}(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 8$$
$$f_{21}(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 - x_2^2 + 2x_2 + 2$$
$$x1 \in [0;4] \quad x_2 \in [0;4]$$

- Далі ставитимемо завдання, які пропонується вирішити як контрольні, і вирішувати їх з докладними поясненнями.

- 1. Визначити гарантовані результати супротивників табличним методом, при цьому кроки сітки по стратегіях обох супротивників вважати рівними 1 (крок сітки вибраний великим в порівнянні з варіантами, що пропонується вирішити самостійно, але даний приклад носить показовий характер, при вирішенні контрольних завдань вказаний алгоритм треба буде програмувати).

- Рішення:
- гарантований результат визначається за допомогою таблиць досить просто за принципом max min:
- Для функції $f_{12}(x_1,x_2)$

| $x_1$ | 0 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{12}$ | 8 | 5 | ***4*** | 5 | 8 |

| $x_1$ | 1 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{12}$ | 9 | 6 | ***5*** | 6 | 9 |

| $x_1$ | 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{12}$ | 8 | 5 | ***4*** | 5 | 8 |

| $x_1$ | 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{12}$ | 5 | 2 | ***1*** | 2 | 5 |

| $x_1$ | 4 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{12}$ | 0 | -3 | ***-4*** | -3 | 0 |

- З таблиці видно, що

$$\max_{x_1}\min_{x_2} f_{12}(x_1, x_2) = f_{12}(1;2) = 5$$

- Знаходження гарантованого
- результату $f_{21}^{*}$

| $x_2$ | 0 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{21}$ | 2 | -3 | -6 | -7 | -6 |

| $x_2$ | 1 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{21}$ | 3 | -2 | -5 | ***-6*** | -5 |

| $x_2$ | 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{21}$ | 2 | -3 | -6 | **-7** | -6 |

| $x_2$ | 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{21}$ | -1 | -6 | -9 | ***-10*** | -9 |

| $x_2$ | 4 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f_{21}$ | -1 | -6 | -14 | -***15*** | -14 |

- З таблиці виходить, що
- $f_{21}{}^{*} = \max\limits_{x_2} \min\limits_{x_1} f_{21}(x_1, x_2) = f_{21}^{*}(3;1) = -6$

Тепер визначимо гарантовані результати **класичним методом,** що базується на дослідженні екстремальних властивостей функцій.

- Проведемо дослідження функції $f_{12}(x_1,x_2)$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 = 0$$

з даної умови отримуємо, що мінімум досягається при $x_2$=2.

Тепер необхідно знайти значення $x_1$, при якому наша функція досягатиме максимуму.

- У $f_{12}(x_1,x_2)$ підставимо знайдене значення $x_2$=2.
- Візьмемо похідну по $x_1$ і прирівняємо нулю:

$$\frac{\partial f_{12}(x_1,2)}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 = 0$$

- звідки виходить, що $x_1$ =1. З характеру функції знову виходить, що в крапці $x_1$ =1 будет максимум

- Отже, ми отримали, що

$$\max_{x_1}\min_{x_2} f_{12}(x_1, x_2) = f_{12}^{*}(1;2) = 5$$

Те ж саме, але вже без пояснення виконаємо для другого гравця, тобто для функції $f_{21}(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} = 2x_1 - 6 = 0$$

- Отримаємо, що в крапці $x_1$ =3 досягається мінімум

$$\frac{\partial f_{21}(3, x_2)}{\partial x_2} = -2x_2 + 2 = 0$$

- звідки витікає, що в крапці $x_2$=1 досягається максимум. Отже

$$f_{21}^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_{21}(x_1, x_2) = f_{21}^*(3;1) = -6$$

- І, нарешті, для визначення $f_{21}^{*}, f_{12}^{*}$

скористаємося графічним методом.

Для знаходження $f_{12}^{*}$, фіксуючи ряд значень $x_1$, будуються графіки функції $f_{12}(x_1, x_2)$ по $x_2$ (рис.1).

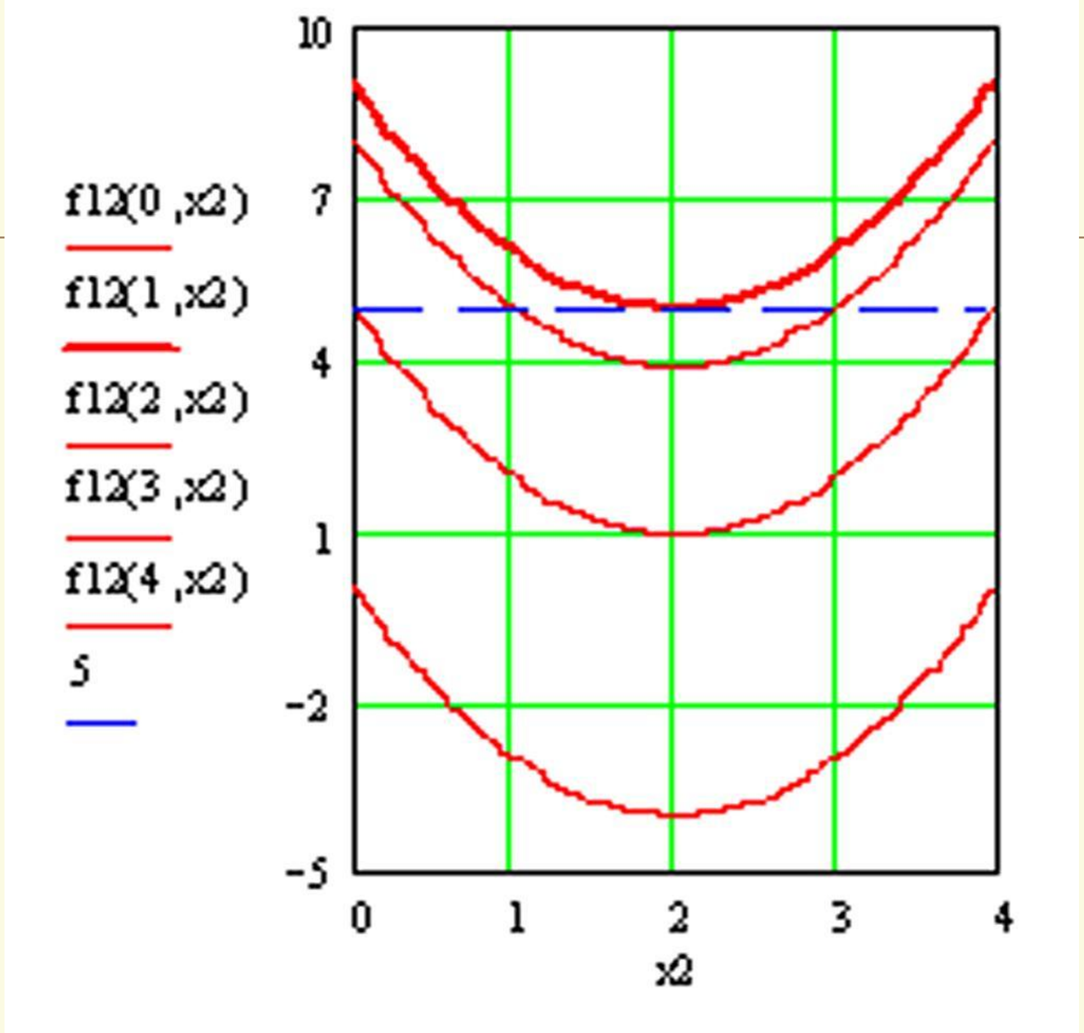


Рис.1

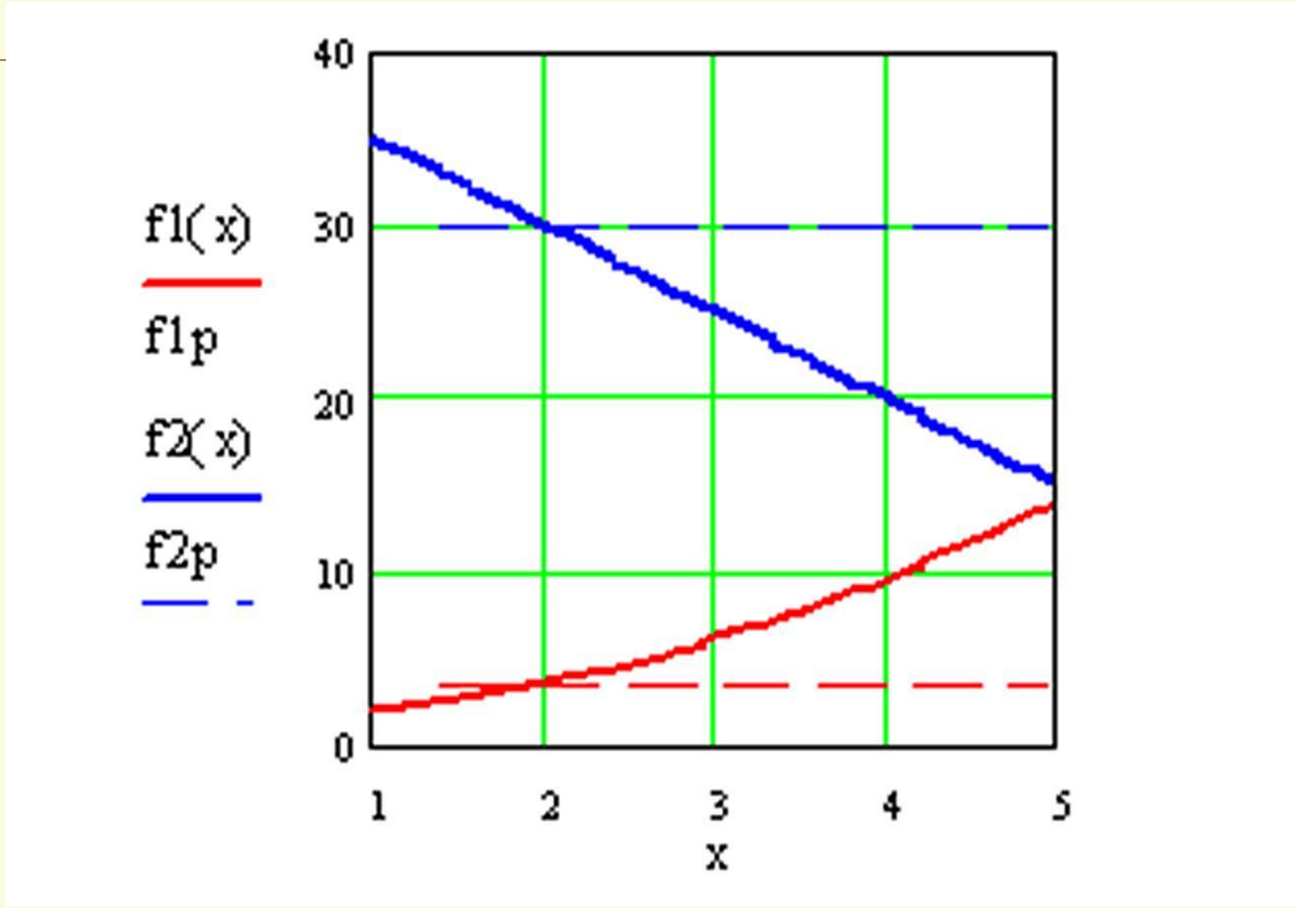


Рис.1.1