Приклади до завдання 1

Приклад 1: Визначити множину Парето, якщо задані наступні цільові функції

$$f_1(x) = 1.5 + 0.5x^2 \qquad x \in [1; 5]$$

$$f_2(x) = 40 - 5x$$

- Порогові значення і обмеження задані:

$$f_1^* = 3.5 \quad f_2^* = 30$$

$$f_1(x) \le f_1^* \quad f_2(x) \le f_2^*$$

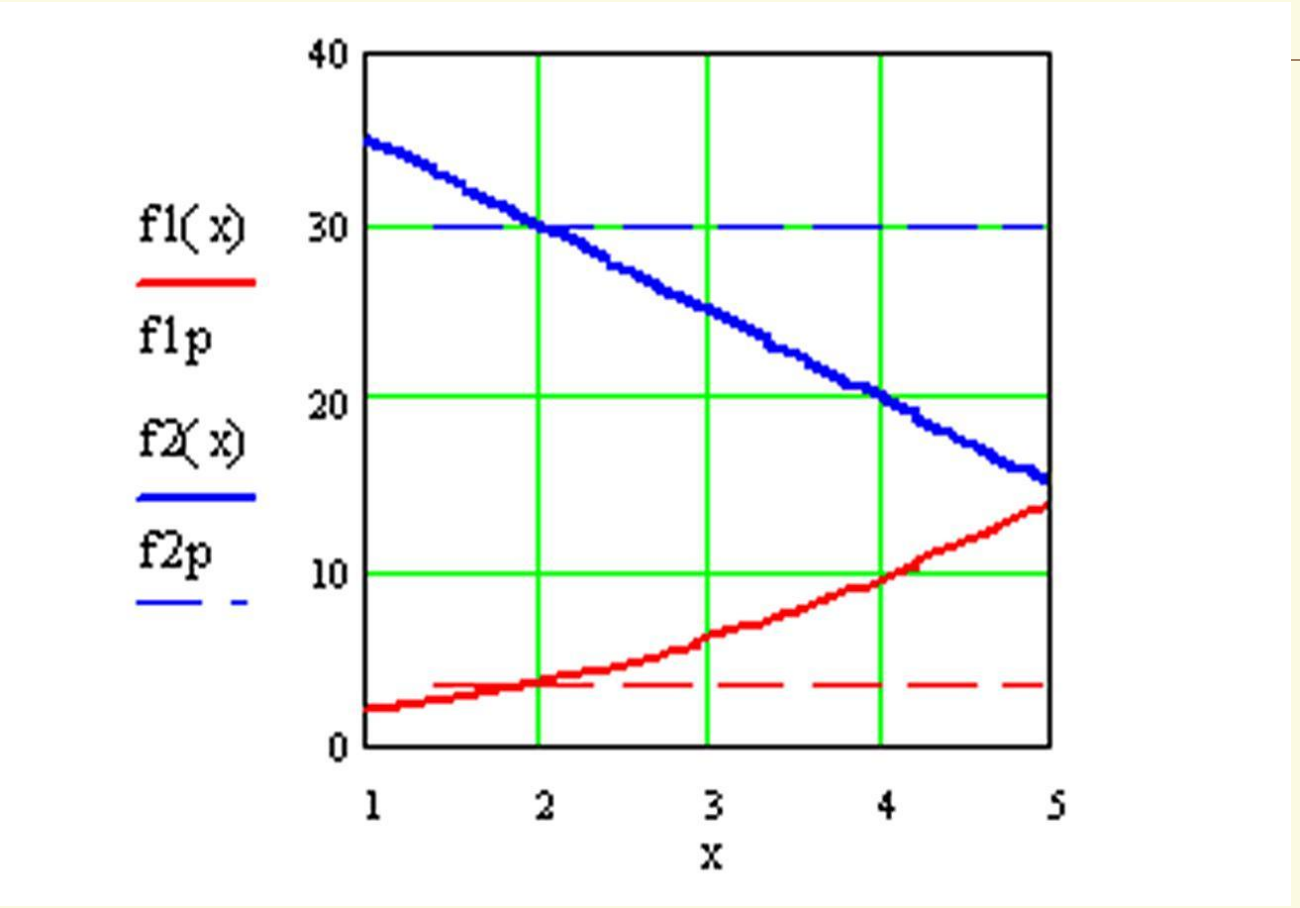

Рис.1.1

- Задачу вирішуємо графічно, для чого будуємо графіки f_1 і f_2.

- З рис.1.1 видно, що для виконання нерівності $f_1(x) \le f_1^*$ необхідно щоб $x \le 2$, а для $f_2(x) \le f_2^*$ необхідно $x \ge 2$. Тоді отримуємо, що множину Парето складає одна точка x=2.
- На цьому можна зупинитися, але корисно провести якийсь розрахунок, який дає підтвердження цього результату:

Табличне подання

x	1	2	3	4	5
$F_1 = f_1(x) / f_1^*$	0,571	1	1,714	2,714	4
$F_2 = f_2(x) / f_2^*$	1,167	1	0,833	0,667	0,5
$\min(F_1, F_2)$	0,571	1	0,833	0,667	0,5
$\max(F_1, F_2)$	1,167	1	1,714	2,714	4

- З таблиці видно, що

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} = \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

в крапці 2.

- В даному випадку ми просто звузили область [1; 5], використовуючи принципи мінімакса і максиміна для сітки з кроком 1. Робота полягала в нормуванні величин функцій у вузлах сітки, використовуючи технічні обмеження, після - виборі величин і

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \qquad \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

- Звужена область - та, яка між стратегіями, що дають ці величини.
- Отже, розумно припустити, що множина Парето x=2.

Приклад 2:

- Знайти область Парето і звузити її (хоч би з одного боку)

якщо дано

$$f_1(x) = 25 - 10x^2 \quad x \in [0;10]$$

$$f_2(x) = -5 + 10x + 0{,}5x^2$$

$$f_1^* = 15 \quad f_2^* = 107$$

$$f_1(x) \le f_1^* \quad f_2(x) \le f_2^*$$

- Область Парето шукаємо графічно. Будуємо графіки f_1 і f_2 (рис.1.2) .

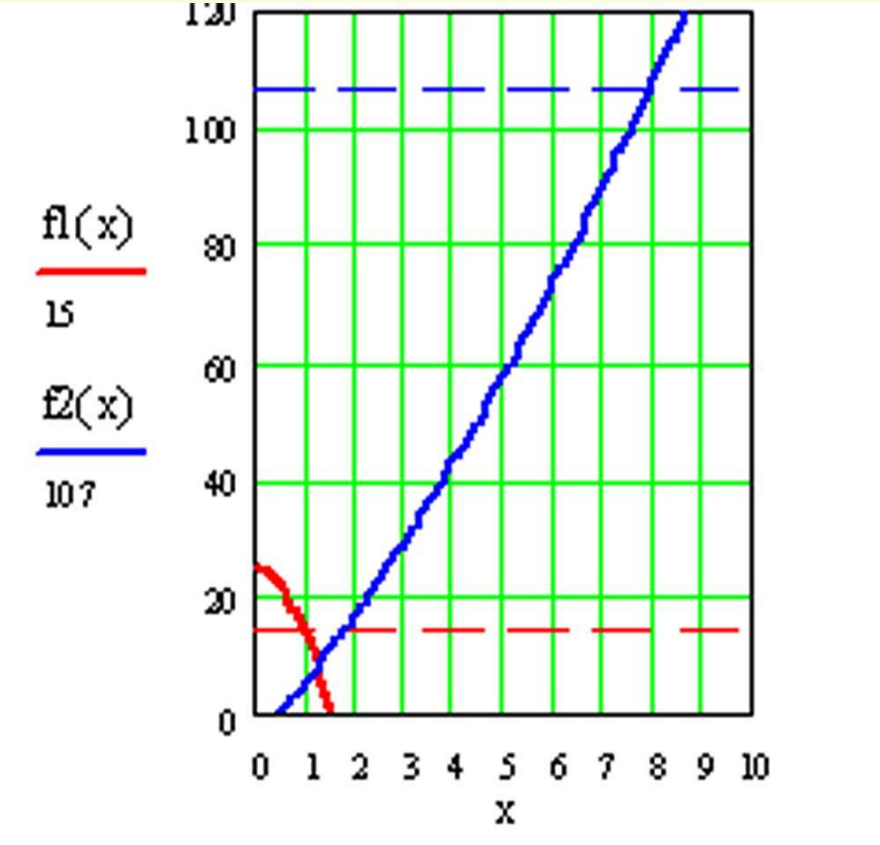

Рис.1.2

- а) Шукаємо область, що задовольняє нерівності для f_1:

$$25-10x^2 \le 15$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow x_{П\ f_1} = [1;10]$$

- б) Шукаємо область, що задовольняє нерівності для f_2:

$$-5+10x+0{,}5x^2 \le 107$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 9}{0{,}5} = 8 \Rightarrow x_{П\ f_2} = [0;8]$$

- в) Загальну область шукаємо як перетин: $[1;10] \cap [0;8]=[1;8]$, $x \in [1;8]$ - область Парето, яку за умовою завдання необхідно звузити.
- Звужуватимемо за принципом max min

$$F_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_i^*} -$$ віднормовані функції:

$$F_1(x) = \frac{25 - 10x^2}{15}$$

$$F_2(x) = \frac{-5 + 10x + 0{,}5x^2}{107}$$

Такбличне представлення

	F_1	F_1	$min\ (F_1, F_2)$
x=1	1	0,05	0,05
x=2	-1	0,158	-1
x=3	-4,3	0,275	-4,3
x=4	-10,3	0,4	-10,3
x=5	-15	0,537	-15
x=6	-22,3	0,682	-22,3
x=7	-31	0,836	-31
x=8	-41	1	-41

- Максимальним значенням з мінімальних є 0,05 .
- Наслідком цього є те, що відсікаємо всі x<1, це не призводить до звуження.
- Оскільки при вибраному кроці не відбулося звуження області, то зменшимо крок:

Табличне подання

	F_1	F_2	$min\ (F_1, F_2)$
X=1	1	0,05	0,05
X=1,1	0,86	0,06	0,06
X=1,2	0,706	0,072	0,072
X=1,3	0,54	0,082	0,082
X=1,4	0,36	0,093	0,093
X=1,5	0,166	0,103	0,103
X=1,6	-0,04	0,114	-0,04

- Максимальним значенням з мінімальних є 0,103 .
- Наслідком цього є те, що відсікаємо усі $x<1,5$.
- Тобто $x = [1,5;8]$ - звужена знизу область Парето.

Приклад 3

- Для заданих цільових функцій, граничних обмежень і нерівностей знайти область Парето і звузити її. Використовувати відомі принципи (при звуженні крок сітки брати рівним 0.1).

$$f_1(x) = 10 + 5x + 7x^2 \quad x \in [0; 2]$$

$$f_2(x) = 35 - 10x$$

якщо дано $f_1^* = 22 \quad f_2^* = 20$

$$f_1(x) \geq f_1^* \quad f_2(x) \geq f_2^*$$

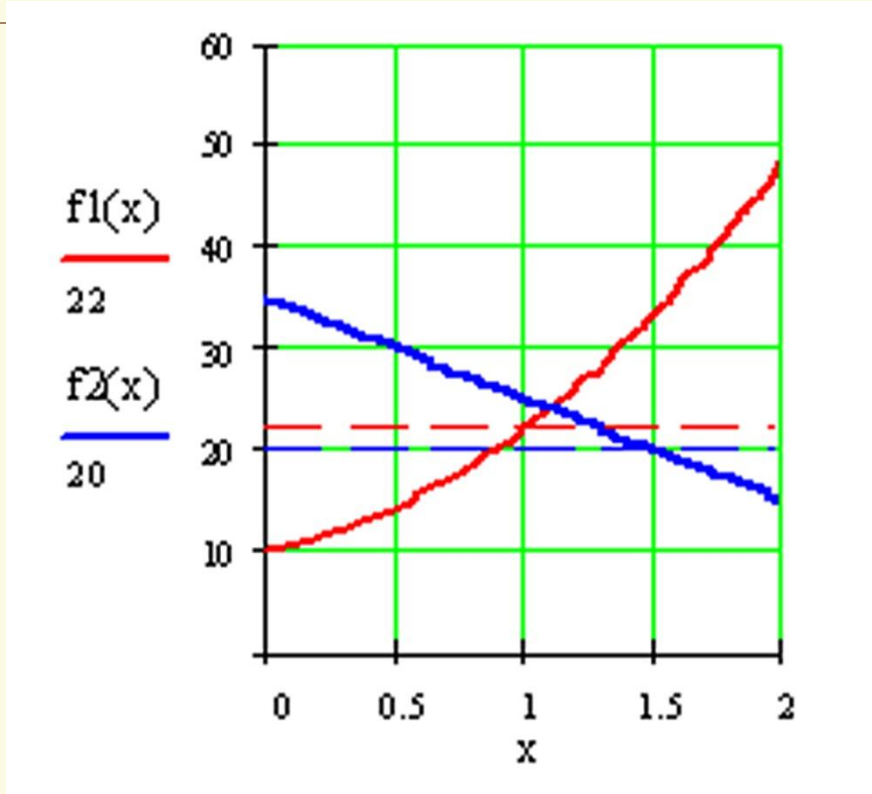

Рис.1.3

Шукаємо область Парето як множину, що задовольняє системі нерівностей:

$$\begin{cases} 7x^2 + 5x + 10 \geq 22 \\ 35 - 10x \geq 20 \end{cases}$$

- Аналітичне вирішення системи нерівностей: x є [1;1,5]. Це і є множина Парето.
- Звузимо його використовуючи принципи мінімакса і максміна, крок сітки рівний 0.1:

Табличне подання

X	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f_1(x)/f_1^*$	1	1.089	1.185	1.288	1.396	1.511
$f_2(x)/f_2^*$	1.25	1.2	1.15	1.1	1.05	1

- З таблиці видно, що

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} = \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

в точці x=1.2. Згідно теорії звужена область Парето лежить між крапками, в яких досягається

$$\min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \quad , \quad \max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

тобто між x=1.2 і x=1.2.

- Отже, відповідь x=1.2.

- ***Якщо в процесі вирішення системи нерівностей виходить декілька інтервалів множини Парето, то після їх визначення звужують кожен з них окремо.***