# *Приклади до завдання 1*

# **Приклад 1:** Визначити множину Парето, якщо задані наступні цільові функції

$$f_1(x) = 1.5 + 0.5x^2 \qquad x \in [1; 5]$$

$$f_2(x) = 40 - 5x$$

- Порогові значення і обмеження задані:

$$f_1^* = 3.5 \quad f_2^* = 30$$

$$f_1(x) \le f_1^* \quad f_2(x) \le f_2^*$$

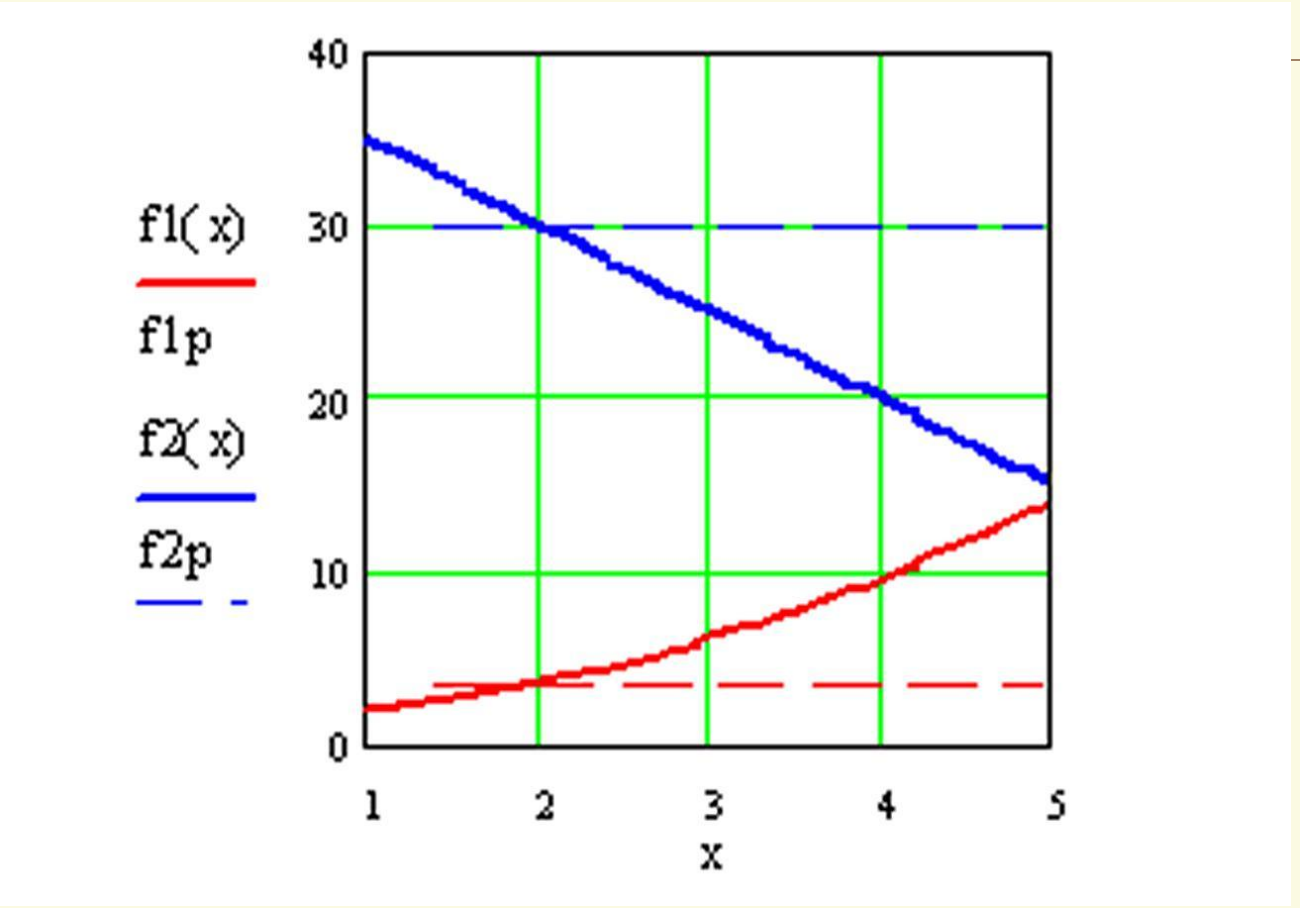


Рис.1.1

- Задачу вирішуємо графічно, для чого будуємо графіки $f_1$ і $f_2$.

---

- З рис.1.1 видно, що для виконання нерівності $f_1(x) \le f_1^*$ необхідно щоб $x \le 2$, а для $f_2(x) \le f_2^*$ необхідно $x \ge 2$. Тоді отримуємо, що множину Парето складає одна точка x=2.
- На цьому можна зупинитися, але корисно провести якийсь розрахунок, який дає підтвердження цього результату:

# Табличне подання

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1 = f_1(x) / f_1^*$ | 0,571 | 1 | 1,714 | 2,714 | 4 |
| $F_2 = f_2(x) / f_2^*$ | 1,167 | 1 | 0,833 | 0,667 | 0,5 |
| $\min(F_1, F_2)$ | 0,571 | 1 | 0,833 | 0,667 | 0,5 |
| $\max(F_1, F_2)$ | 1,167 | 1 | 1,714 | 2,714 | 4 |

- З таблиці видно, що

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} = \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

в крапці 2.

- В даному випадку ми просто звузили область [1; 5], використовуючи принципи мінімакса і максиміна для сітки з кроком 1. Робота полягала в нормуванні величин функцій у вузлах сітки, використовуючи технічні обмеження, після - виборі величин і

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \qquad \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

- Звужена область - та, яка між стратегіями, що дають ці величини.
- Отже, розумно припустити, що множина Парето x=2.

# Приклад 2:

- Знайти область Парето і звузити її (хоч би з одного боку)

якщо дано

$$f_1(x) = 25 - 10x^2 \quad x \in [0;10]$$

$$f_2(x) = -5 + 10x + 0{,}5x^2$$

$$f_1^* = 15 \quad f_2^* = 107$$

$$f_1(x) \le f_1^* \quad f_2(x) \le f_2^*$$

- Область Парето шукаємо графічно. Будуємо графіки $f_1$ і $f_2$ (рис.1.2) .

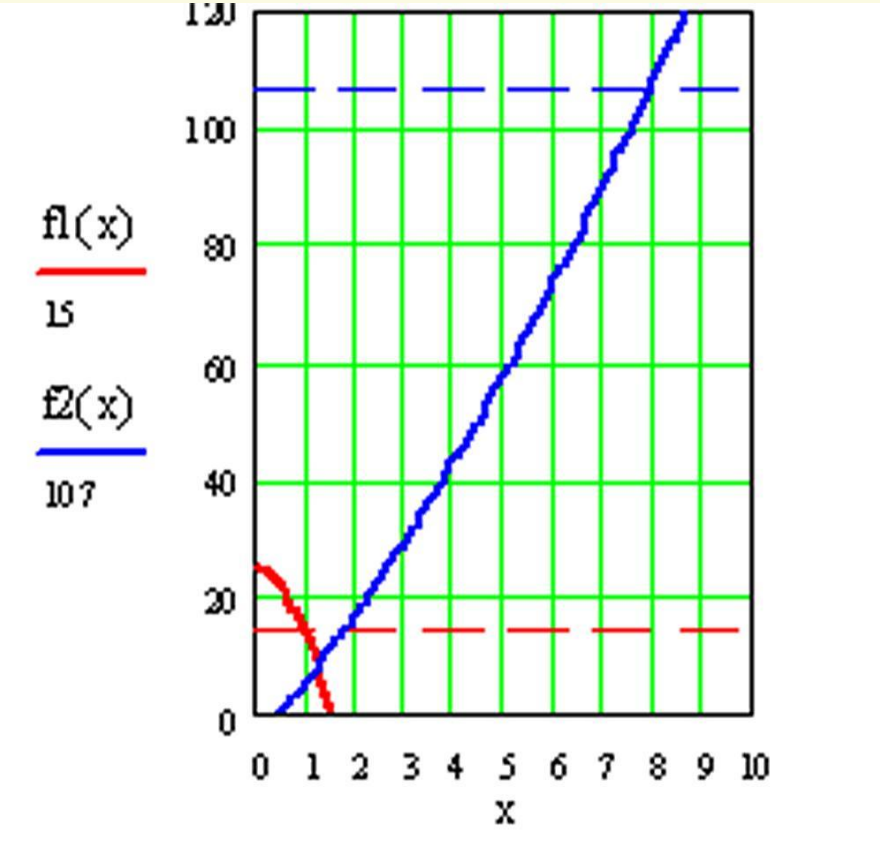


Рис.1.2

- а) Шукаємо область, що задовольняє нерівності для $f_1$:

$$25-10x^2 \le 15$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow x_{П\ f_1} = [1;10]$$

- б) Шукаємо область, що задовольняє нерівності для $f_2$:

$$-5+10x+0{,}5x^2 \le 107$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 9}{0{,}5} = 8 \Rightarrow x_{П\ f_2} = [0;8]$$

- в) Загальну область шукаємо як перетин: $[1;10] \cap [0;8]=[1;8]$ , $x \in [1;8]$ - область Парето, яку за умовою завдання необхідно звузити.
- Звужуватимемо за принципом max min

$$F_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_i^*} -$$ віднормовані функції:

$$F_1(x) = \frac{25 - 10x^2}{15}$$

$$F_2(x) = \frac{-5 + 10x + 0{,}5x^2}{107}$$

# Такбличне представлення

| | $F_1$ | $F_1$ | $min\ (F_1, F_2)$ |
|---|---|---|---|
| x=1 | 1 | 0,05 | 0,05 |
| x=2 | -1 | 0,158 | -1 |
| x=3 | -4,3 | 0,275 | -4,3 |
| x=4 | -10,3 | 0,4 | -10,3 |
| x=5 | -15 | 0,537 | -15 |
| x=6 | -22,3 | 0,682 | -22,3 |
| x=7 | -31 | 0,836 | -31 |
| x=8 | -41 | 1 | -41 |

- Максимальним значенням з мінімальних є 0,05 .
- Наслідком цього є те, що відсікаємо всі x<1, це не призводить до звуження.
- Оскільки при вибраному кроці не відбулося звуження області, то зменшимо крок:

# Табличне подання

| | $F_1$ | $F_2$ | $min\ (F_1, F_2)$ |
|---|---|---|---|
| **X=1** | 1 | 0,05 | 0,05 |
| **X=1,1** | 0,86 | 0,06 | 0,06 |
| **X=1,2** | 0,706 | 0,072 | 0,072 |
| **X=1,3** | 0,54 | 0,082 | 0,082 |
| **X=1,4** | 0,36 | 0,093 | 0,093 |
| **X=1,5** | 0,166 | 0,103 | 0,103 |
| **X=1,6** | -0,04 | 0,114 | -0,04 |

- Максимальним значенням з мінімальних є 0,103 .
- Наслідком цього є те, що відсікаємо усі $x<1,5$ .
- Тобто $x = [1,5;8]$ - звужена знизу область Парето.

# Приклад 3

- Для заданих цільових функцій, граничних обмежень і нерівностей знайти область Парето і звузити її. Використовувати відомі принципи (при звуженні крок сітки брати рівним 0.1).

$$f_1(x) = 10 + 5x + 7x^2 \quad x \in [0; 2]$$

$$f_2(x) = 35 - 10x$$

якщо дано $f_1^* = 22 \quad f_2^* = 20$

$$f_1(x) \geq f_1^* \quad f_2(x) \geq f_2^*$$

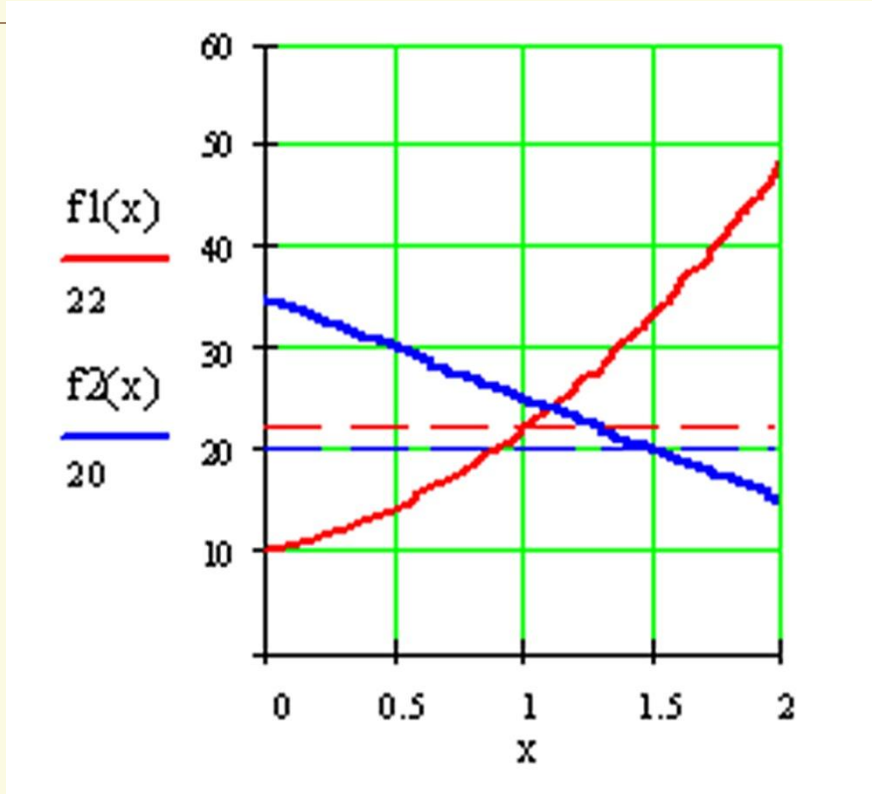


Рис.1.3

Шукаємо область Парето як множину, що задовольняє системі нерівностей:

$$\begin{cases} 7x^2 + 5x + 10 \geq 22 \\ 35 - 10x \geq 20 \end{cases}$$

- Аналітичне вирішення системи нерівностей: x є [1;1,5]. Це і є множина Парето.
- Звузимо його використовуючи принципи мінімакса і максміна, крок сітки рівний 0.1:

# Табличне подання

| X | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)/f_1^*$ | 1 | 1.089 | 1.185 | 1.288 | 1.396 | 1.511 |
| $f_2(x)/f_2^*$ | 1.25 | 1.2 | 1.15 | 1.1 | 1.05 | 1 |

- З таблиці видно, що

$$\max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} = \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

в точці x=1.2. Згідно теорії звужена область Парето лежить між крапками, в яких досягається

$$\min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \quad , \quad \max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

тобто між x=1.2 і x=1.2.

- Отже, відповідь x=1.2.

- ***Якщо в процесі вирішення системи нерівностей виходить декілька інтервалів множини Парето, то після їх визначення звужують кожен з них окремо.***