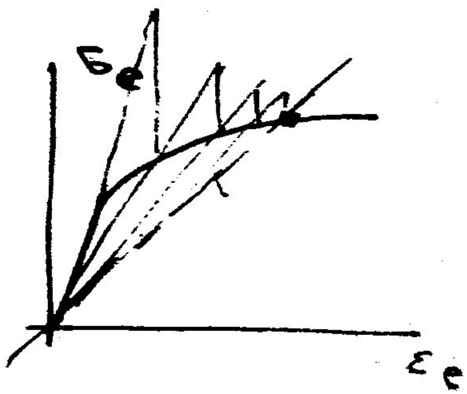
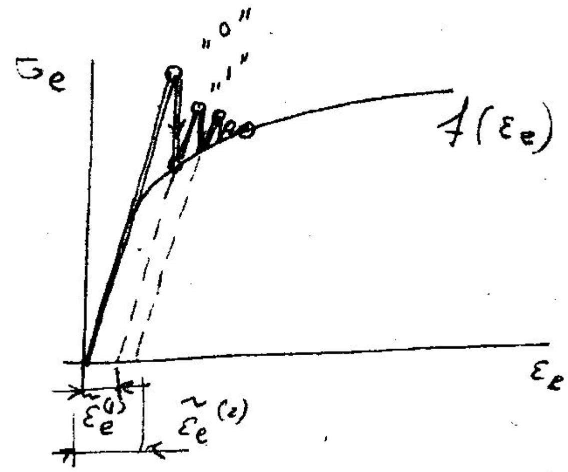
Приближенные методы решений задач по теории малых упругопластических деформаций

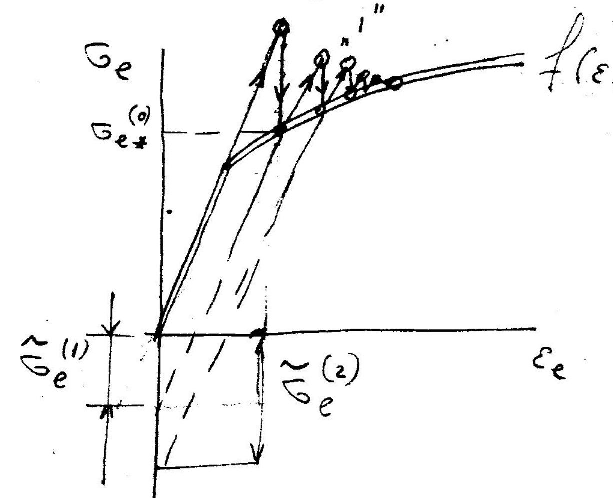
1. Метод переменных параметров упругости



2. Метод дополнительных деформаций



3. Метод дополнительных напряжений



Характеристики методов:

1. Скорость схождения
2. Устойчивость

Критерий остановки расчета

$$\boxed{\delta < \delta^*}$$

$$\delta = \frac{\Delta\sigma_e^{(k)}}{\sigma_e^{(k)}} \qquad \delta = \frac{\Delta\varepsilon^{(k)}}{\varepsilon^{(k)}}$$

1. Метод переменных параметров упругости

Уравнение состояния
<u>для ТМУПД</u>:

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3 \cdot K} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\left(\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} - \frac{1}{3K}\right)\sigma_0}$$

Уравнение состояния (упругое) –
Закон Гука:

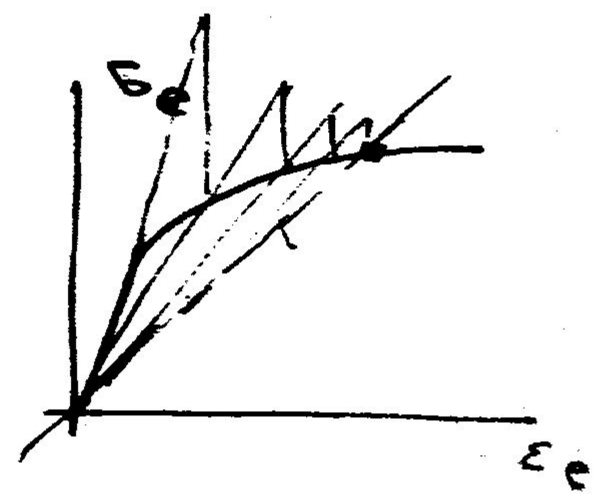
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_{ij} - 3\mu\delta_{ij}\sigma_0\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\mu)}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{3\mu}{E}\sigma_0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+\mu^*}{E^*} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_e}{\sigma_e} \\ \dfrac{3\mu^*}{E^*} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_e}{\sigma_e} - \dfrac{1}{3K} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boxed{E^* = \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_e}{\sigma_e} + \dfrac{1-2\mu}{3E}}}$$

$$\boxed{\mu^* = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1-2\mu}{E}\dfrac{\sigma_e}{\varepsilon_e}}{1 + \dfrac{1-2\mu}{E}\dfrac{\sigma_e}{\varepsilon_e}}}$$



2. Метод дополнительных деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$$

упругие деформации

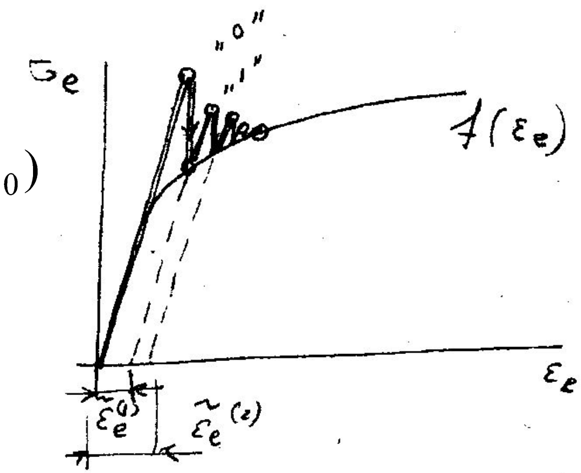
$$\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_{ij} - 3\mu\delta_{ij}\sigma_0\right]$$

вектор дополнительных деформаций

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_{ij} - 3\mu\delta_{ij}\sigma_0\right] + \tilde{\varepsilon}_{ij}}$$

закон течения $\quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_e^{p}}{\sigma_e} S_{ij}$



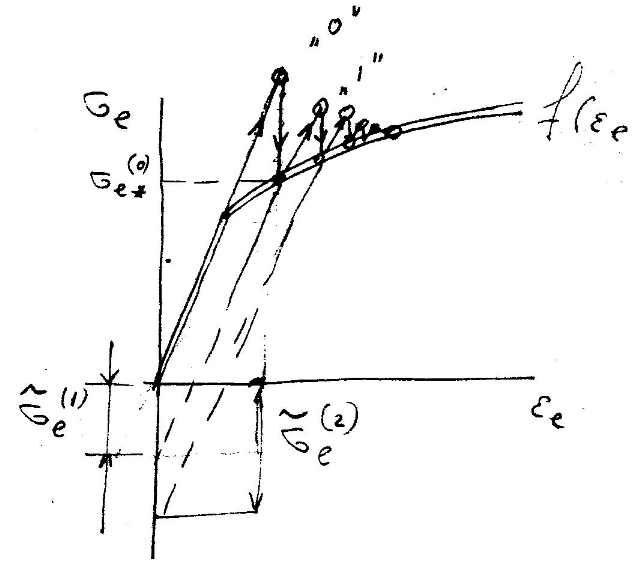
для ТМУПД: $\quad \varepsilon_e = \varepsilon_e^{e} + \varepsilon_e^{p} \qquad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\cdot(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$

упругий закон

$$\varepsilon_e^{e} = \frac{\sigma_e}{3G} \qquad \varepsilon_e^{p} = \varepsilon_e - \varepsilon_e^{e}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\left(\varepsilon_e - \dfrac{\sigma_e}{3G}\right)}{\sigma_e}\frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) \longrightarrow \boxed{\tilde{\varepsilon}_{ij} = \left(1 - \frac{1}{3G}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\right)(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)}$$

3. Метод дополнительных напряжений



Уравнение состояния
для ТМУПД:

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right)$$

$$\downarrow$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\cdot(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$$

при упругом поведении $S_{ij} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e^e}\cdot(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$ $\quad \varepsilon_e^e = \frac{\sigma_e}{3G}$ $\quad S_{ij} = 2G\cdot(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$

тогда для упругопластического поведения пусть $S_{ij} = 2G\cdot(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) + \tilde{\sigma}_{ij}$

$$\boxed{\tilde{\sigma}_{ij} = \left(\frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} - 2G\right)\cdot(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)}$$

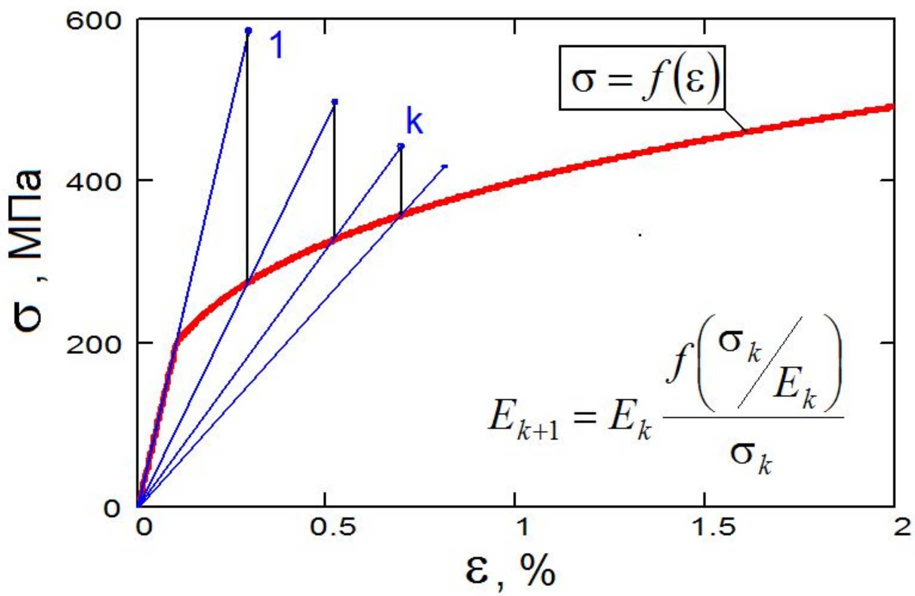
составляющая связанная с пластической деформацией

Одноосное напряженное состояние

1. Метод переменных параметров упругости

Диаграмма растяжения (с пластичностью):

$$\sigma = f(\varepsilon)$$



Закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

для k-ой итерации

$$\boxed{\varepsilon_k = \frac{1}{E_k^*}\sigma_k}$$

$$\sigma_k^* = f\left(\frac{1}{E_k^*}\sigma_k\right) \qquad E_{k+1}^* = \frac{\sigma_k^*}{\varepsilon_k}$$

$$\boxed{E_{k+1}^* = E_k^* \frac{f\left(\sigma_k / E_k^*\right)}{\sigma_k}} \qquad \boxed{E_0^* = E}$$

Одноосное напряженное состояние

2. Метод дополнительных деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p}$$

упругие деформации

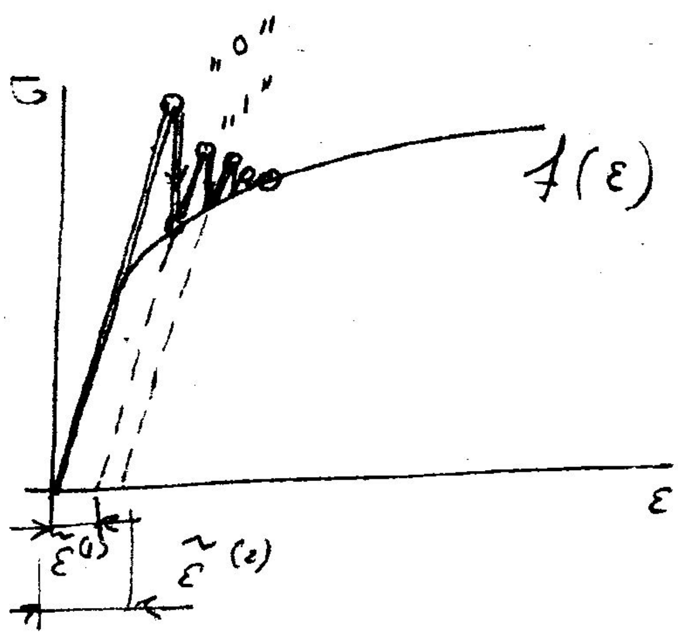
$$\varepsilon^{e} = \frac{1}{E}\sigma$$

вектор дополнительных деформаций

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{p}$$

$$\boxed{\varepsilon_k = \frac{1}{E}\sigma_k + \tilde{\varepsilon}_k}$$

диаграмма растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$



$$\sigma_k^{*} = f(\varepsilon_k)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon^{p} = \varepsilon - \varepsilon^{e} = \varepsilon_k - \frac{\sigma_k^{*}}{E} = \frac{1}{E}\sigma_k + \tilde{\varepsilon}_k - \frac{\sigma_k^{*}}{E}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\tilde{\varepsilon}_{k+1} = \tilde{\varepsilon}_k + \frac{1}{E}\left(\sigma_k - f(\varepsilon_k)\right)}$$

Задание: рассчитать напряжения и деформации в стержнях

Условия задачи:

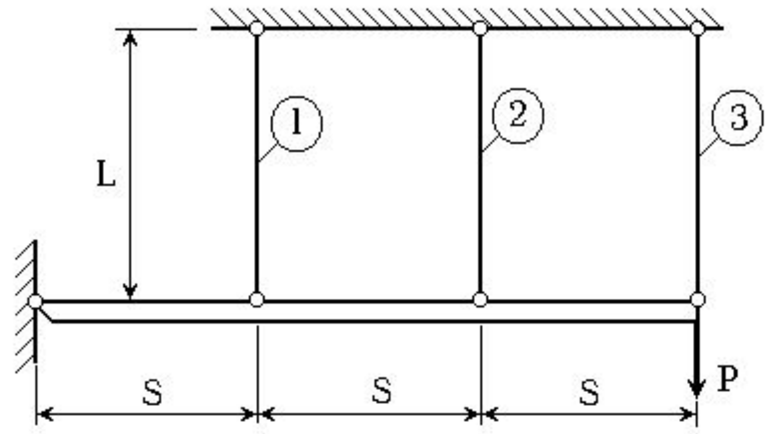
Несущие элементы – стержни 1-3:

-площадь сечения $F = 400$ мм^2

-модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа

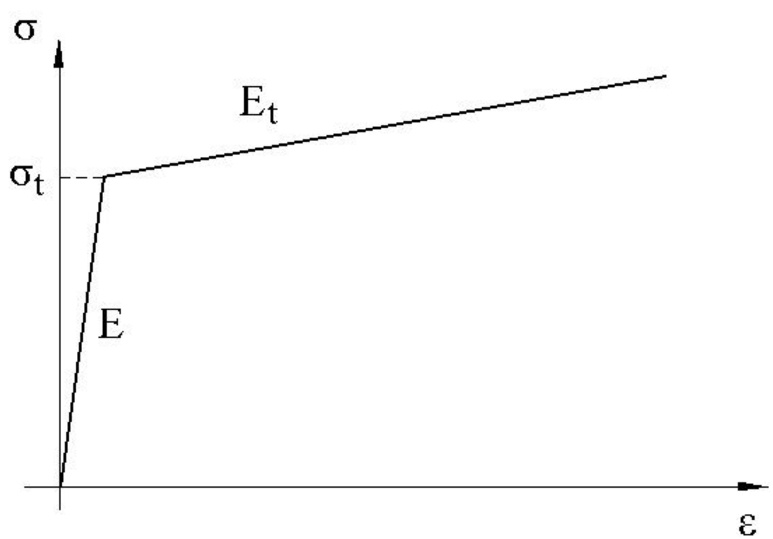
-предел текучести $\sigma_t = 200$ МПа

-касательный модуль $E_t = 10^4$ МПа

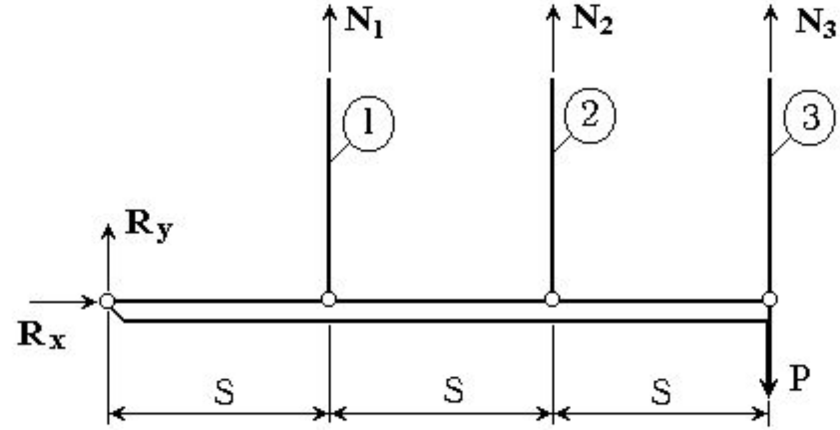


Нагрузка – 155 кН

Диаграмма растяжения



$$\sigma = f(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{E} & \text{если} \quad \varepsilon \le \sigma_t / E \\ \sigma_t + E_t \cdot \left(\varepsilon - \dfrac{\sigma_t}{E} \right) & \text{если} \quad \varepsilon > \sigma_t / E \end{cases}$$



Уравнения равновесия:

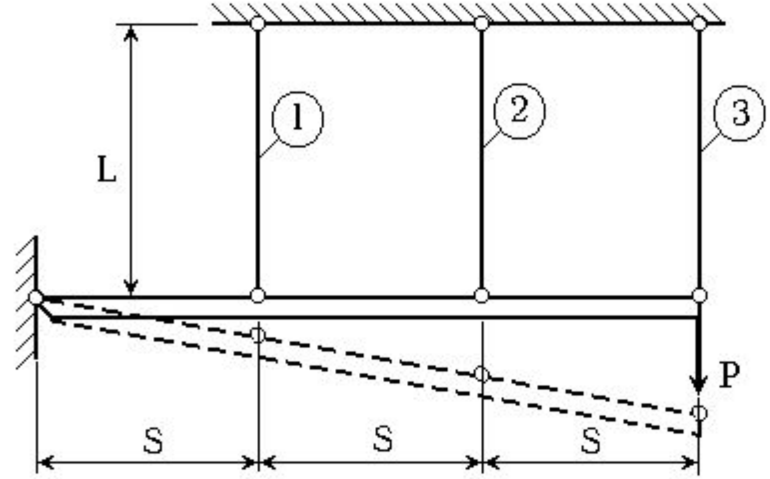
по оси x: $R_x = 0$

по оси y: $R_y + N_1 + N_2 + N_3 = P$

моменты: $S \cdot N_1 + 2S \cdot N_2 + 3S \cdot N_3 = 3P$

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F} \longrightarrow \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3\frac{P}{F}$$

Уравнения совместности перемещений:



$$\begin{cases} \Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1 \\ \Delta l_3 = 3 \cdot \Delta l_1 \end{cases} \longrightarrow \Delta l_i = \varepsilon_i \cdot L \longrightarrow \begin{cases} \varepsilon_2 - 2 \cdot \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_3 - 3 \cdot \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

1. Метод переменных параметров упругости

$$\boxed{\varepsilon_{i(k)} = \frac{1}{E^*_{i(k)}}\sigma_{i(k)}}$$

$$\boxed{E^*_{i(k+1)} = E^*_{i(k)}\frac{f\left(\sigma_{i(k)}\big/E^*_{i(k)}\right)}{\sigma_{i(k)}}}$$

$$\boxed{E^*_{i(0)} = E}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_2 - 2\cdot\varepsilon_1 = 0\\ \varepsilon_3 - 3\cdot\varepsilon_1 = 0\end{cases}$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3\frac{P}{F}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{E^*_{2(k)}}\sigma_{2(k)} - 2\dfrac{1}{E^*_{1(k)}}\sigma_{1(k)} = 0\\ \dfrac{1}{E^*_{3(k)}}\sigma_{3(k)} - 3\dfrac{1}{E^*_{1(k)}}\sigma_{1(k)} = 0\end{cases}$$

$$\sigma_{1(k)} + 2\sigma_{2(k)} + 3\sigma_{3(k)} = 3\frac{P}{F}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix}\sigma_{1(k)}\\ \sigma_{2(k)}\\ \sigma_{3(k)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\big/E^*_{1(k)} & 1\big/E^*_{2(k)} & 0\\ -3\big/E^*_{1(k)} & 0 & 1\big/E^*_{3(k)}\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 3\cdot P\big/F\end{Bmatrix}}$$

Алгоритм решения

Начальные условия:

$k = 0$

$E^*_{i(0)} = E$

$i = 1\ldots3$

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{E} & \text{if} \quad \varepsilon \le \sigma_t / E \\ \sigma_t + E_t \cdot \left(\varepsilon - \dfrac{\sigma_t}{E} \right) & \text{if} \quad \varepsilon > \sigma_t / E \end{cases}$$

Параметры задачи:

$F = 400$, $E = 2\cdot 10^5$, $\sigma_t = 200$,

$E_t = 10^4$, $P = 155000$

$\delta^* = 0{,}001$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1(k)} \\ \sigma_{2(k)} \\ \sigma_{3(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 / E^*_{1(k)} & 1 / E^*_{2(k)} & 0 \\ -3 / E^*_{1(k)} & 0 & 1 / E^*_{3(k)} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot P / F \end{Bmatrix}$$

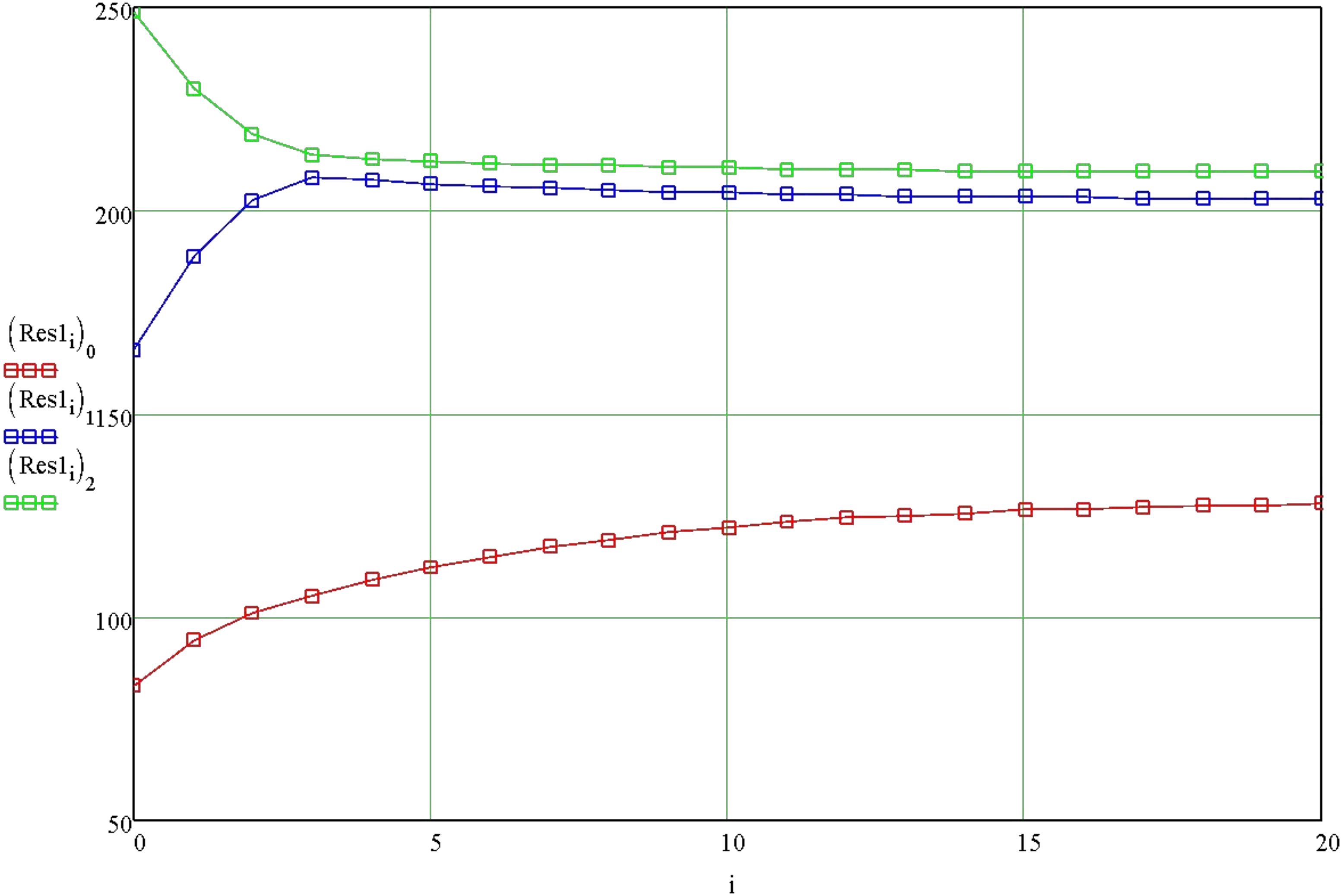
$$E^*_{i(k+1)} = E^*_{i(k)} \frac{f\left(\sigma_{i(k)} / E^*_{i(k)} \right)}{\sigma_{i(k)}}$$

$i = 1\ldots3$

$\delta < \delta^*$

да — выход из цикла

нет — $k = k + 1$


250
200
150
100
50
0
5
10
15
20
i
$(Res1_i)_0$
$(Res1_i)_1$
$(Res1_i)_2$

2. Метод дополнительных деформаций

$$\boxed{\varepsilon_{i(k)} = \frac{1}{E}\sigma_{i(k)} + \tilde{\varepsilon}_{i(k)}}$$

$$\boxed{\tilde{\varepsilon}_{i(k+1)} = \tilde{\varepsilon}_{i(k)} + \frac{1}{E}\left(\sigma_{i(k)} - f\left(\varepsilon_{i(k)}\right)\right)}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - 2\cdot\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_3 - 3\cdot\varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{E}\sigma_{2(k)} - 2\frac{1}{E}\sigma_{1(k)} = 2\cdot\tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{2(k)} \\ \frac{1}{E}\sigma_{3(k)} - 3\frac{1}{E}\sigma_{1(k)} = 3\cdot\tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{3(k)} \end{cases}$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3\frac{P}{F}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_{1(k)} + 2\sigma_{2(k)} + 3\sigma_{3(k)} = 3\frac{P}{F}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \sigma_{1(k)} \\ \sigma_{2(k)} \\ \sigma_{3(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} E\left(2\cdot\tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{2(k)}\right) \\ E\left(3\cdot\tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{3(k)}\right) \\ 3\cdot P/F \end{Bmatrix}}$$

Алгоритм решения

Параметры задачи:

$F = 400$, $E = 2\cdot 10^5$, $\sigma_t = 200$,

$E_t = 10^4$, $P = 155000$

$\delta^* = 0{,}001$

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{E} & \text{if} \quad \varepsilon \le \sigma_t / E \\ \sigma_t + E_t \cdot \left(\varepsilon - \dfrac{\sigma_t}{E}\right) & \text{if} \quad \varepsilon > \sigma_t / E \end{cases}$$

Начальные условия:

$k = 0$

$\tilde{\varepsilon}_{i(0)} = 0$

$i = 1\ldots3$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1(k)} \\ \sigma_{2(k)} \\ \sigma_{3(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} E\left(2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{2(k)}\right) \\ E\left(3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{3(k)}\right) \\ 3 \cdot P / F \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{i(k)} = \frac{1}{E}\sigma_{i(k)} + \tilde{\varepsilon}_{i(k)}$$
$$i = 1\ldots3$$

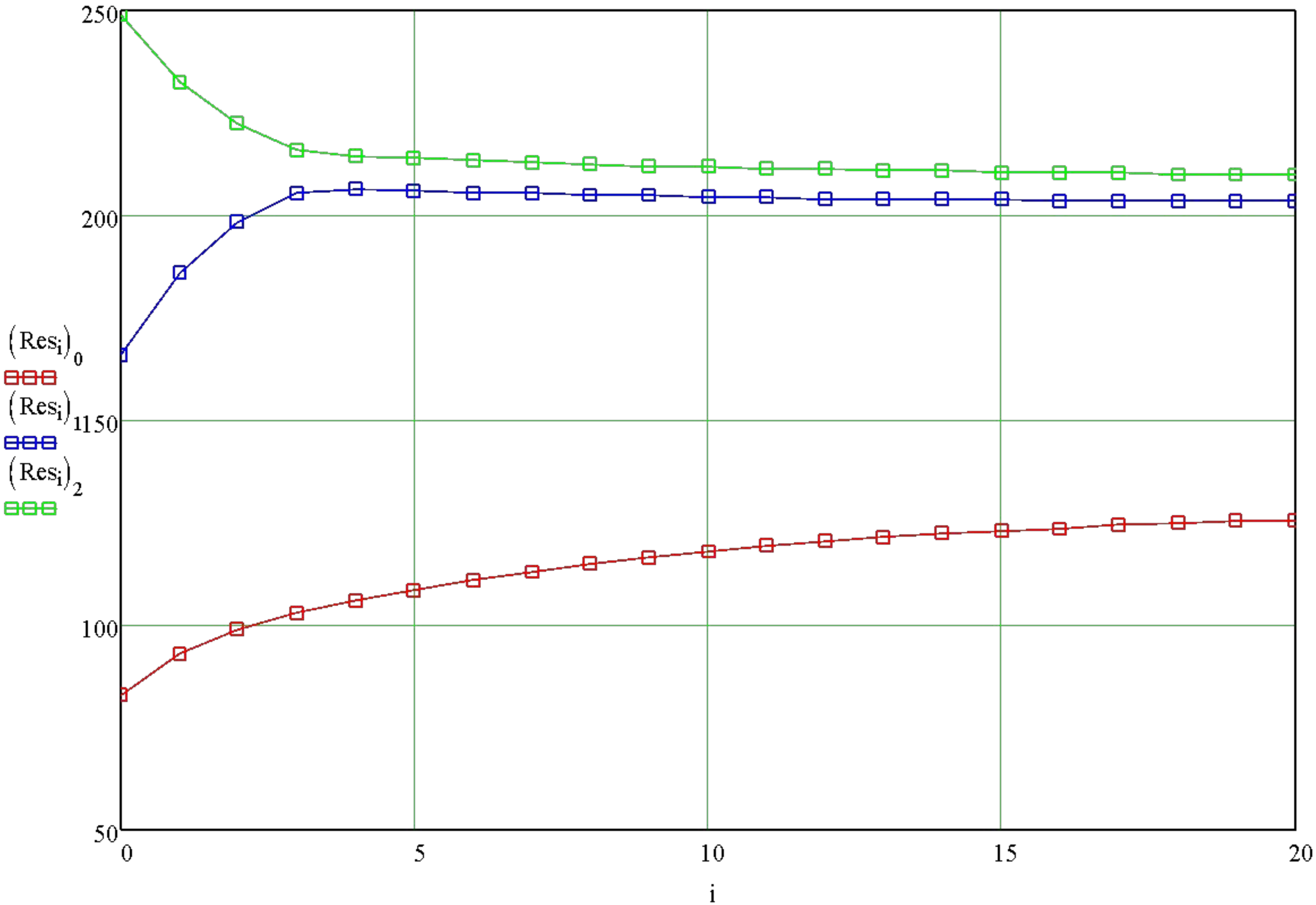
$$\tilde{\varepsilon}_{i(k+1)} = \tilde{\varepsilon}_{i(k)} + \frac{1}{E}\left(\sigma_{i(k)} - f\left(\varepsilon_{i(k)}\right)\right)$$
$$i = 1\ldots3$$

$\delta < \delta^*$

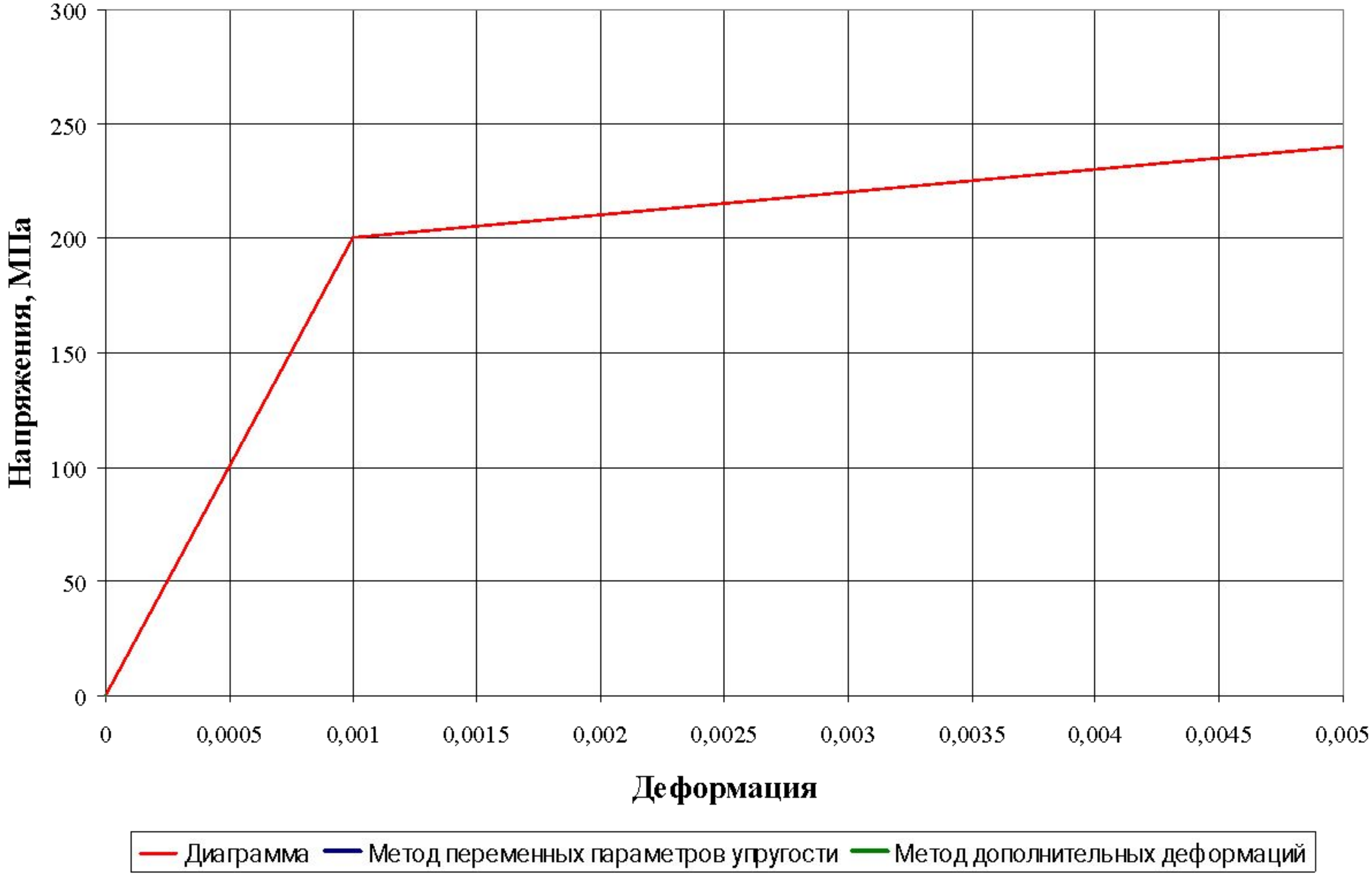
да → выход из цикла

нет

$k = k + 1$



250
200
150
100
50
0
5
10
15
20
i
$(Res_i)_0$
$(Res_i)_1$
$(Res_i)_2$



300
250
200
150
100
50
0
Напряжения, МПа
0
0,0005
0,001
0,0015
0,002
0,0025
0,003
0,0035
0,004
0,0045
0,005
Деформация
Диаграмма
Метод переменных параметров упругости
Метод дополнительных деформаций

Начало

>>

ЗАДАНИЕ

Вычислить напряжения в элементах стержневой конструкции.
Решение получить используя методы переменных параметров упругости (ППУ) и дополнительных деформаций (ДД).
Показать на графиках зависимость напряжений в стержнях от номера итерации отдельно для каждого метода решения. Для наиболее нагруженного стержня привести график «напряжение - номер итерации» сравнив методы ППУ и ДД.
Материал - идеально-упругопластический. Размеры, механические характеристики приведены под расчетной схемой.
Нагрузка P=PT+0.8·(Pпр-PT).
PT - усилие, соответствующее появлению первых пластических деформаций,
Pпр - усилие, соответствующее предельному состоянию конструкции.