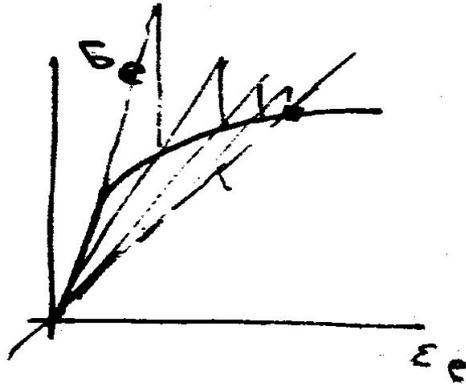
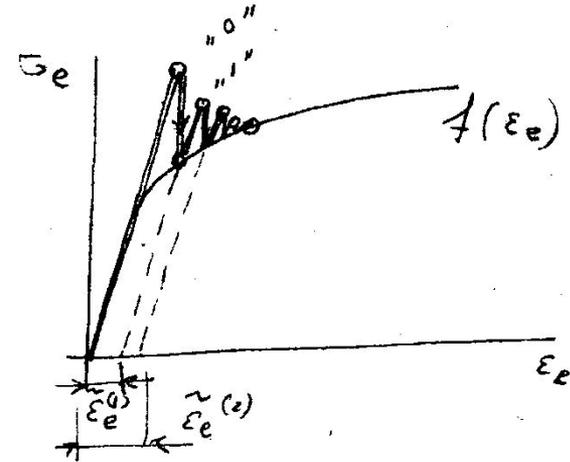


Приближенные методы решений задач по теории малых упругопластических деформаций

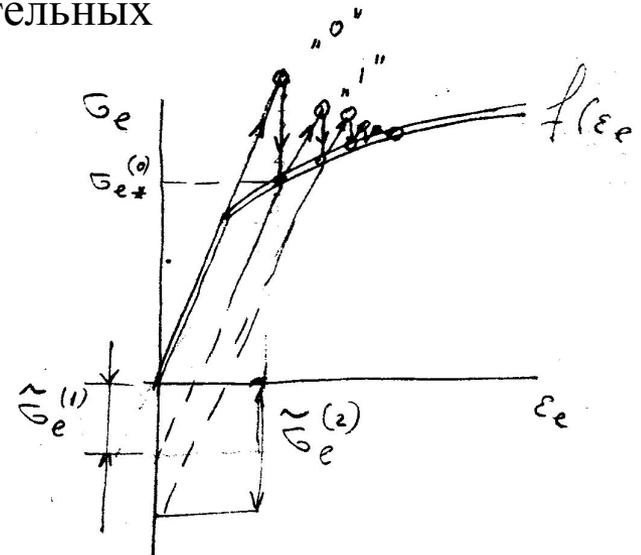
1. Метод переменных параметров упругости



2. Метод дополнительных деформаций



3. Метод дополнительных напряжений



Характеристики методов:

1. Скорость схождения
2. Устойчивость

Критерий остановки расчета

$$\delta < \delta^*$$

$$\delta = \frac{\Delta \sigma_e^{(k)}}{\sigma_e^{(k)}}$$

$$\delta = \frac{\Delta \varepsilon^{(k)}}{\varepsilon^{(k)}}$$

1. Метод переменных параметров упругости

Уравнение состояния

для ТМУПД:

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3 \cdot K} \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} - \frac{1}{3K} \right) \sigma_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\mu^*}{E^*} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} \\ \frac{3\mu^*}{E^*} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} - \frac{1}{3K} \end{array} \right. \longrightarrow$$

$$E^* = \frac{1}{\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} + \frac{1-2\mu}{3E}}$$

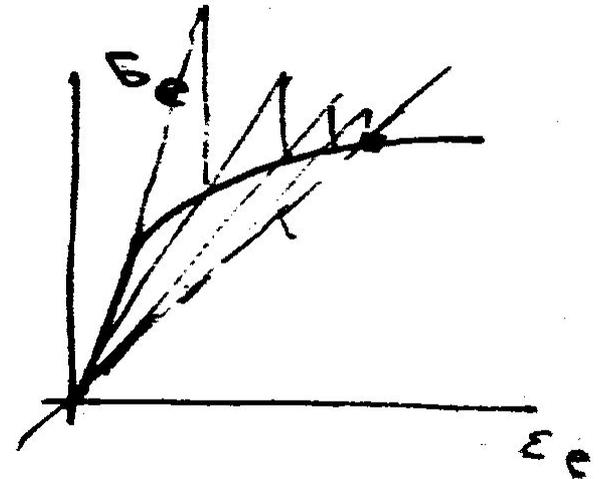
$$\mu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{E} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}}{1 + \frac{1-2\mu}{E} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}}$$

Уравнение состояния (упругое) –

Закон Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_{ij} - 3\mu\delta_{ij}\sigma_0]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\mu)}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{E} \sigma_0$$



2. Метод дополнительных деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

упругие деформации

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{ij} - 3\mu\delta_{ij}\sigma_0]$$

вектор дополнительных деформаций

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{ij} - 3\mu\delta_{ij}\sigma_0] + \tilde{\varepsilon}_{ij}$$

закон течения $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e^p}{\sigma_e} S_{ij}$

для ТМУПД:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e^e + \varepsilon_e^p \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \cdot (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$$

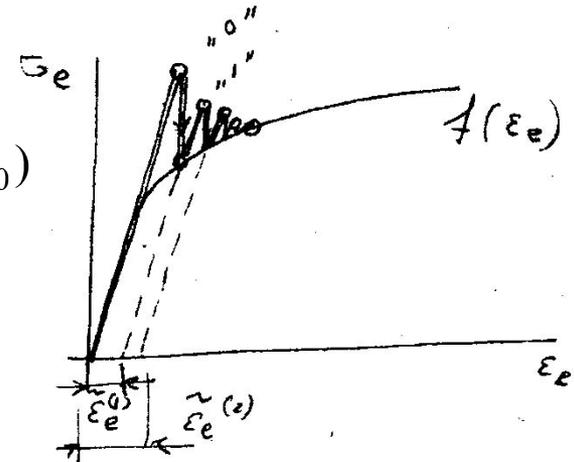
упругий закон

$$\varepsilon_e^e = \frac{\sigma_e}{3G}$$

$$\varepsilon_e^p = \varepsilon_e - \varepsilon_e^e$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\left(\varepsilon_e - \frac{\sigma_e}{3G}\right)}{\sigma_e} \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) \longrightarrow$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \left(1 - \frac{1}{3G} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\right) (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$$



3. Метод дополнительных напряжений

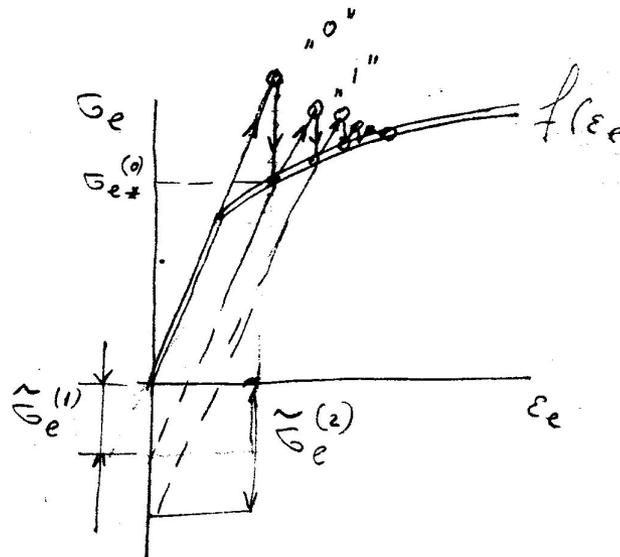
Уравнение состояния

для ТМУПД:

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0)$$

↓

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \cdot (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$$



при упругом поведении $S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e^e} \cdot (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$

$$\varepsilon_e^e = \frac{\sigma_e}{3G}$$

$$S_{ij} = 2G \cdot (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$$

тогда для упругопластического поведения пусть

$$S_{ij} = 2G \cdot (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) + \tilde{\sigma}_{ij}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left(\frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} - 2G \right) \cdot (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$$

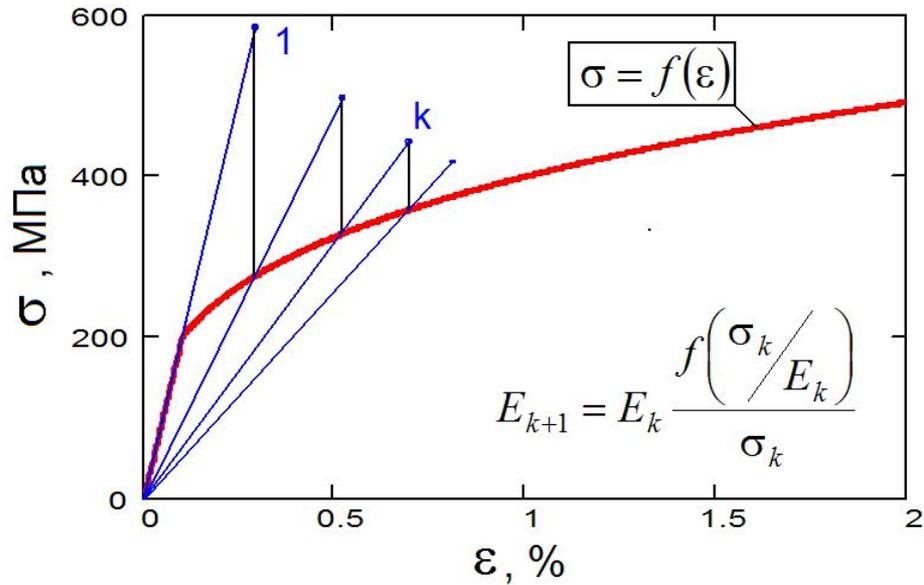
составляющая
связанная с
пластической
деформацией

Одноосное напряженное состояние

1. Метод переменных параметров упругости

Диаграмма растяжения (с
пластичностью):

$$\sigma = f(\varepsilon)$$



Закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

для k -ой итерации

$$\varepsilon_k = \frac{1}{E_k^*} \sigma_k$$

$$\sigma_k^* = f\left(\frac{1}{E_k^*} \sigma_k\right)$$

$$E_{k+1}^* = \frac{\sigma_k^*}{\varepsilon_k}$$

$$E_{k+1}^* = E_k^* \frac{f\left(\frac{\sigma_k}{E_k^*}\right)}{\sigma_k}$$

$$E_0^* = E$$

Одноосное напряженное состояние

2. Метод дополнительных деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

упругие деформации

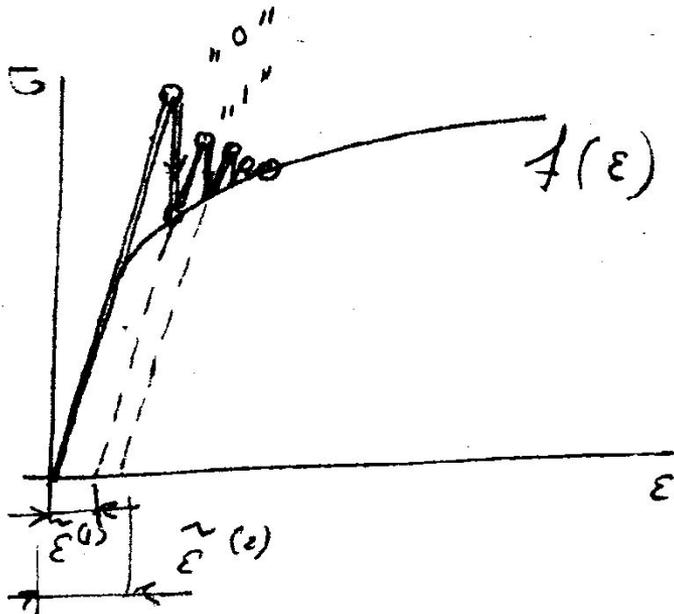
вектор дополнительных деформаций

$$\varepsilon^e = \frac{1}{E} \sigma$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^p$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{E} \sigma_k + \tilde{\varepsilon}_k$$

диаграмма растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$



$$\sigma_k^* = f(\varepsilon_k)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e = \varepsilon_k - \frac{\sigma_k^*}{E} = \frac{1}{E} \sigma_k + \tilde{\varepsilon}_k - \frac{\sigma_k^*}{E}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k+1} = \tilde{\varepsilon}_k + \frac{1}{E} (\sigma_k - f(\varepsilon_k))$$

Задание: рассчитать напряжения и деформации в стержнях

Условия задачи:

Несущие элементы – стержни 1-3:

-площадь сечения $F = 400 \text{ мм}^2$

-модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

-предел текучести $\sigma_t = 200 \text{ МПа}$

-касательный модуль $E_t = 10^4 \text{ МПа}$

Нагрузка – 155 кН

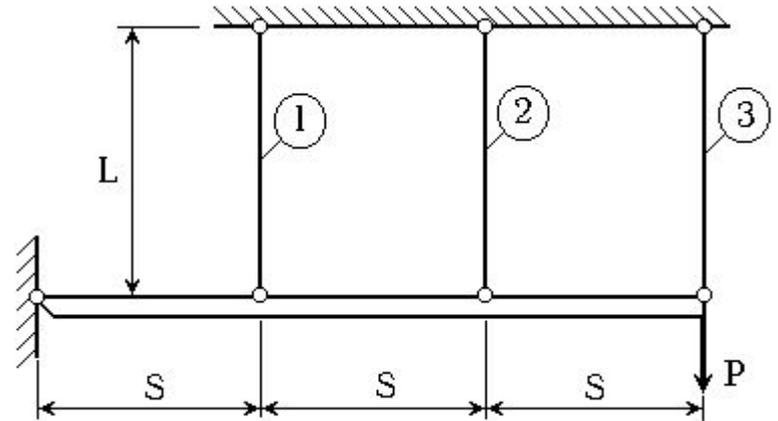
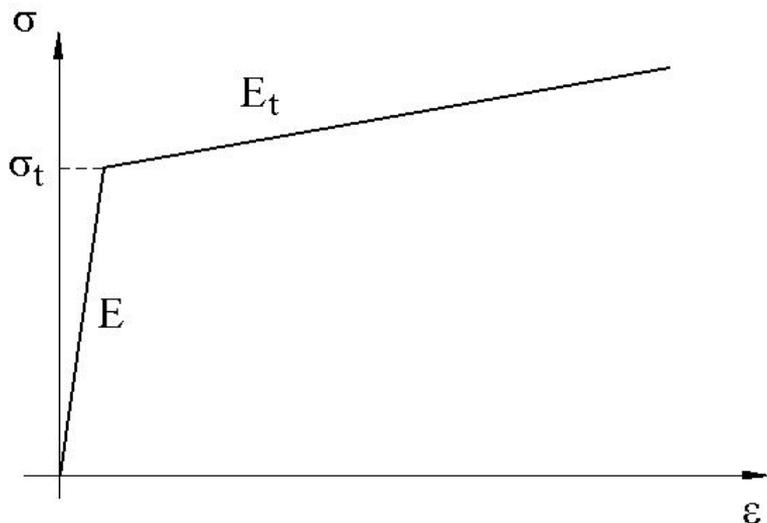


Диаграмма растяжения



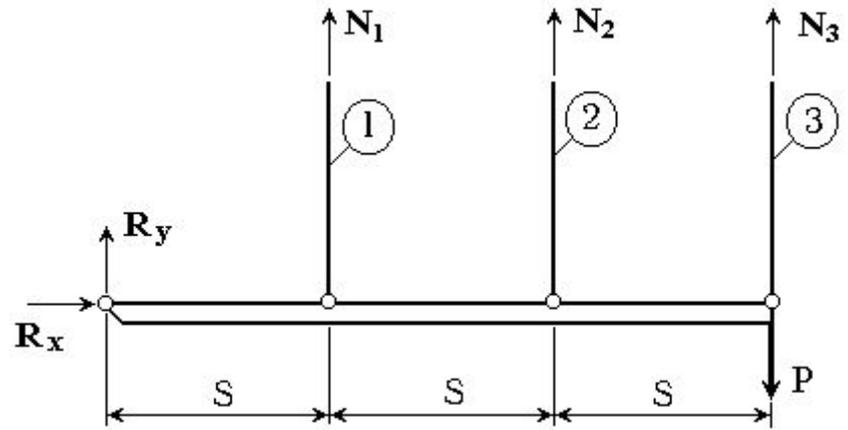
$$\sigma = f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{E} & \text{если } \varepsilon \leq \frac{\sigma_t}{E} \\ \sigma_t + E_t \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma_t}{E} \right) & \text{если } \varepsilon > \frac{\sigma_t}{E} \end{cases}$$

Уравнения равновесия:

по оси x: $R_x = 0$

по оси y: $R_y + N_1 + N_2 + N_3 = P$

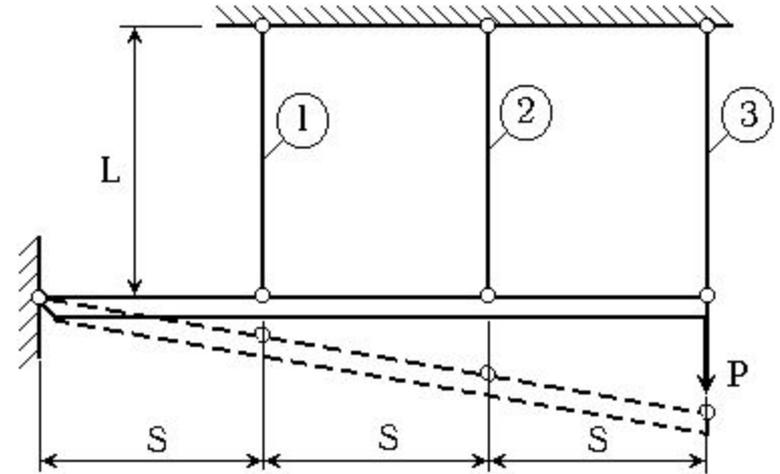
моменты: $S \cdot N_1 + 2S \cdot N_2 + 3S \cdot N_3 = 3P$



$\sigma_i = \frac{N_i}{F} \longrightarrow \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3 \frac{P}{F}$

Уравнения совместности перемещений:

$\begin{cases} \Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1 \\ \Delta l_3 = 3 \cdot \Delta l_1 \end{cases} \longrightarrow \Delta l_i = \varepsilon_i \cdot L \longrightarrow \begin{cases} \varepsilon_2 - 2 \cdot \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_3 - 3 \cdot \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$



1. Метод переменных параметров упругости

$$\varepsilon_{i(k)} = \frac{1}{E_{i(k)}^*} \sigma_{i(k)}$$

$$E_{i(k+1)}^* = E_{i(k)}^* \frac{f\left(\frac{\sigma_{i(k)}}{E_{i(k)}^*}\right)}{\sigma_{i(k)}}$$

$$E_{i(0)}^* = E$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - 2 \cdot \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_3 - 3 \cdot \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

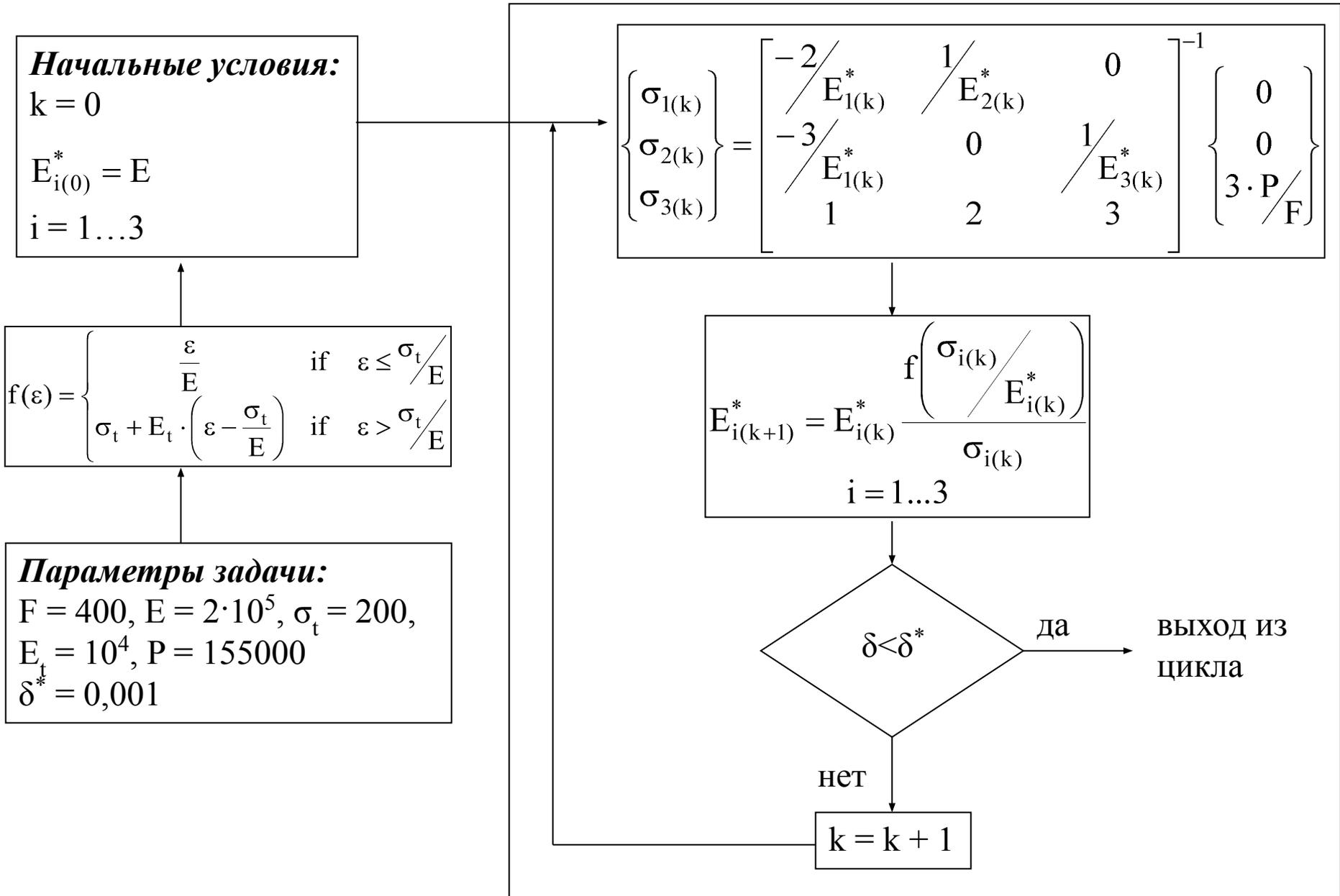
$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3 \frac{P}{F}$$

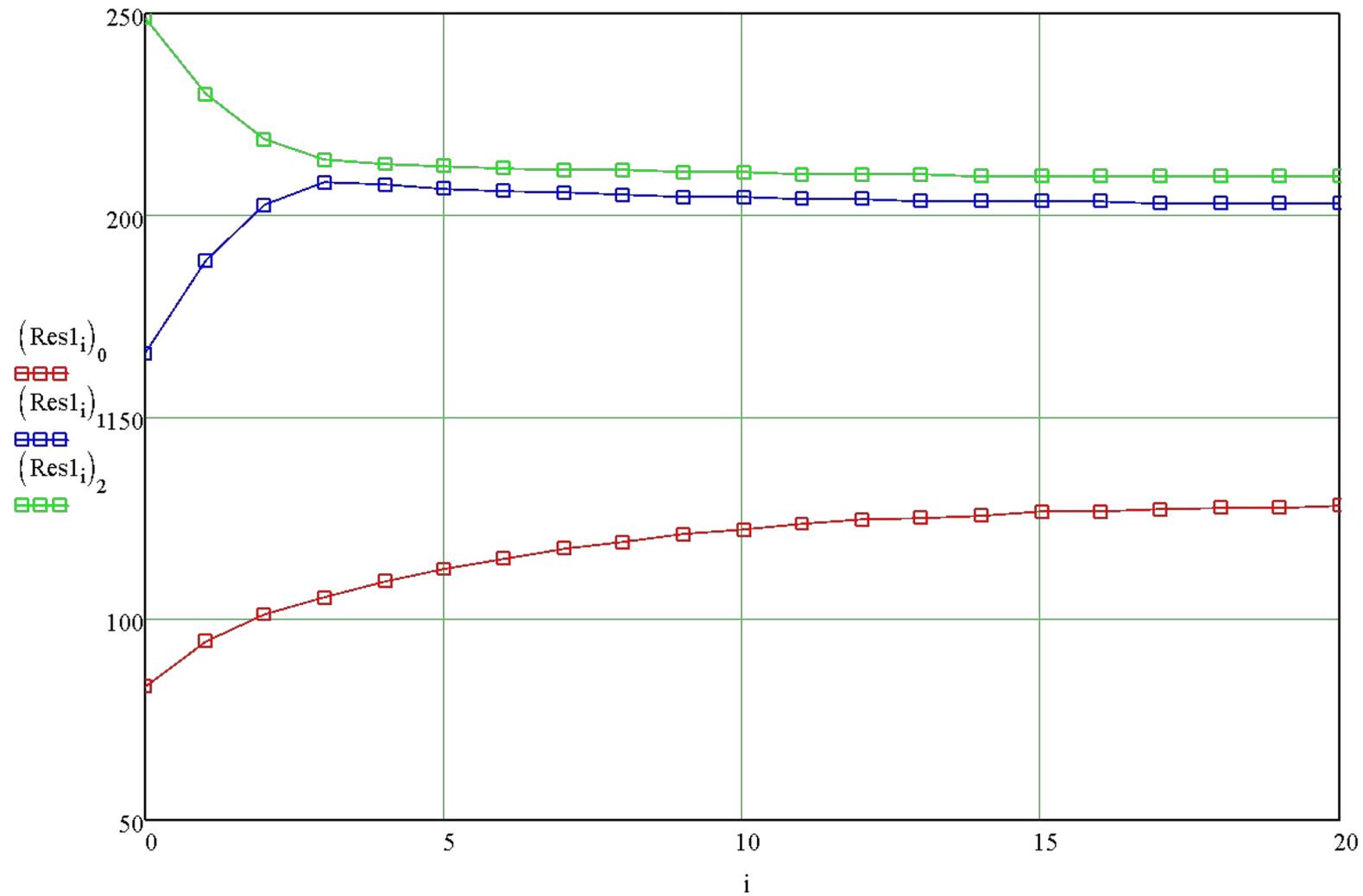
$$\begin{cases} \frac{1}{E_{2(k)}^*} \sigma_{2(k)} - 2 \frac{1}{E_{1(k)}^*} \sigma_{1(k)} = 0 \\ \frac{1}{E_{3(k)}^*} \sigma_{3(k)} - 3 \frac{1}{E_{1(k)}^*} \sigma_{1(k)} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{1(k)} + 2\sigma_{2(k)} + 3\sigma_{3(k)} = 3 \frac{P}{F}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1(k)} \\ \sigma_{2(k)} \\ \sigma_{3(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/E_{1(k)}^* & 1/E_{2(k)}^* & 0 \\ -3/E_{1(k)}^* & 0 & 1/E_{3(k)}^* \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot P/F \end{Bmatrix}$$

Алгоритм решения





2. Метод дополнительных деформаций

$$\varepsilon_{i(k)} = \frac{1}{E} \sigma_{i(k)} + \tilde{\varepsilon}_{i(k)}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{i(k+1)} = \tilde{\varepsilon}_{i(k)} + \frac{1}{E} (\sigma_{i(k)} - f(\varepsilon_{i(k)}))$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - 2 \cdot \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_3 - 3 \cdot \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

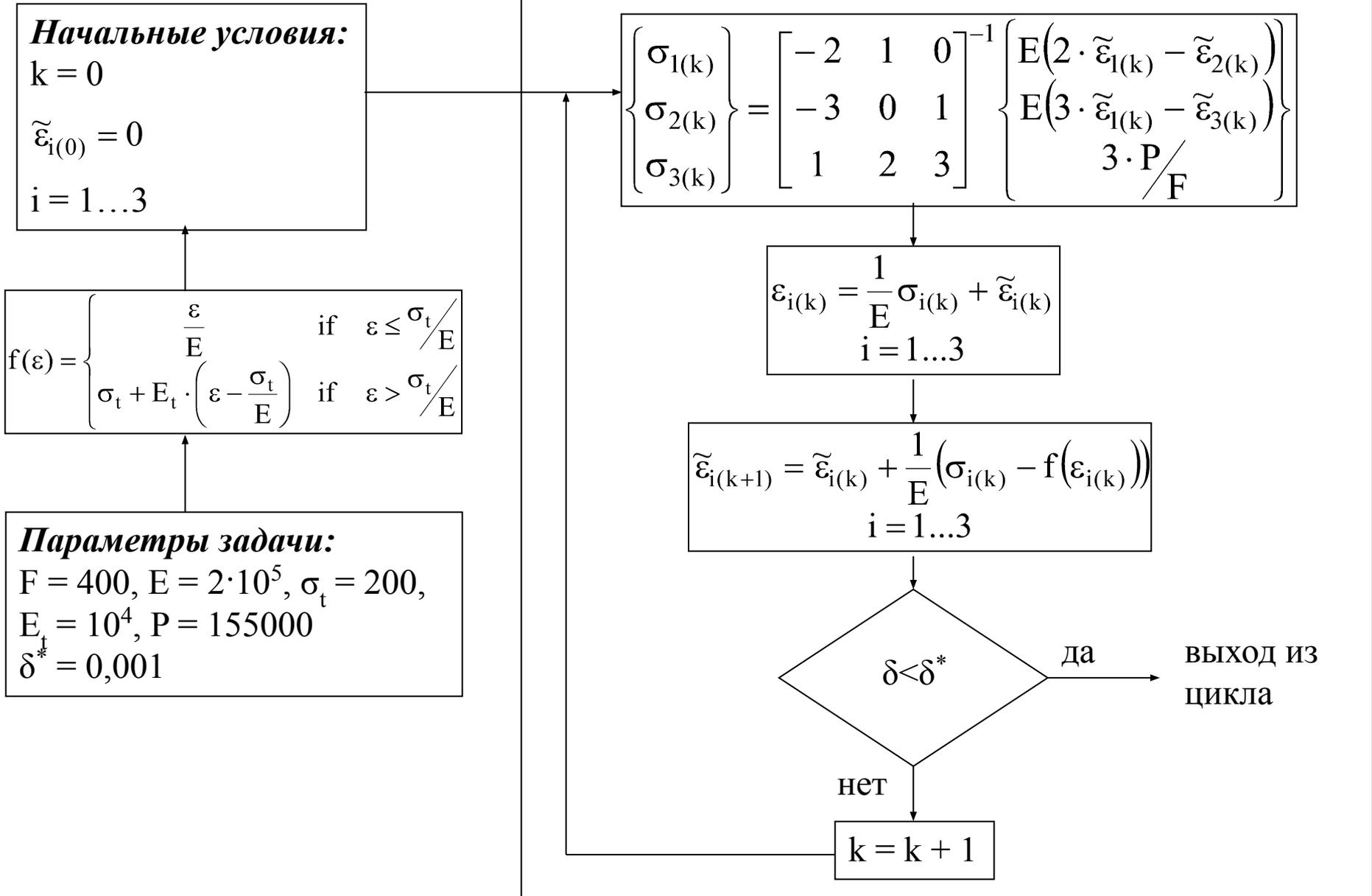
$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3 \frac{P}{F}$$

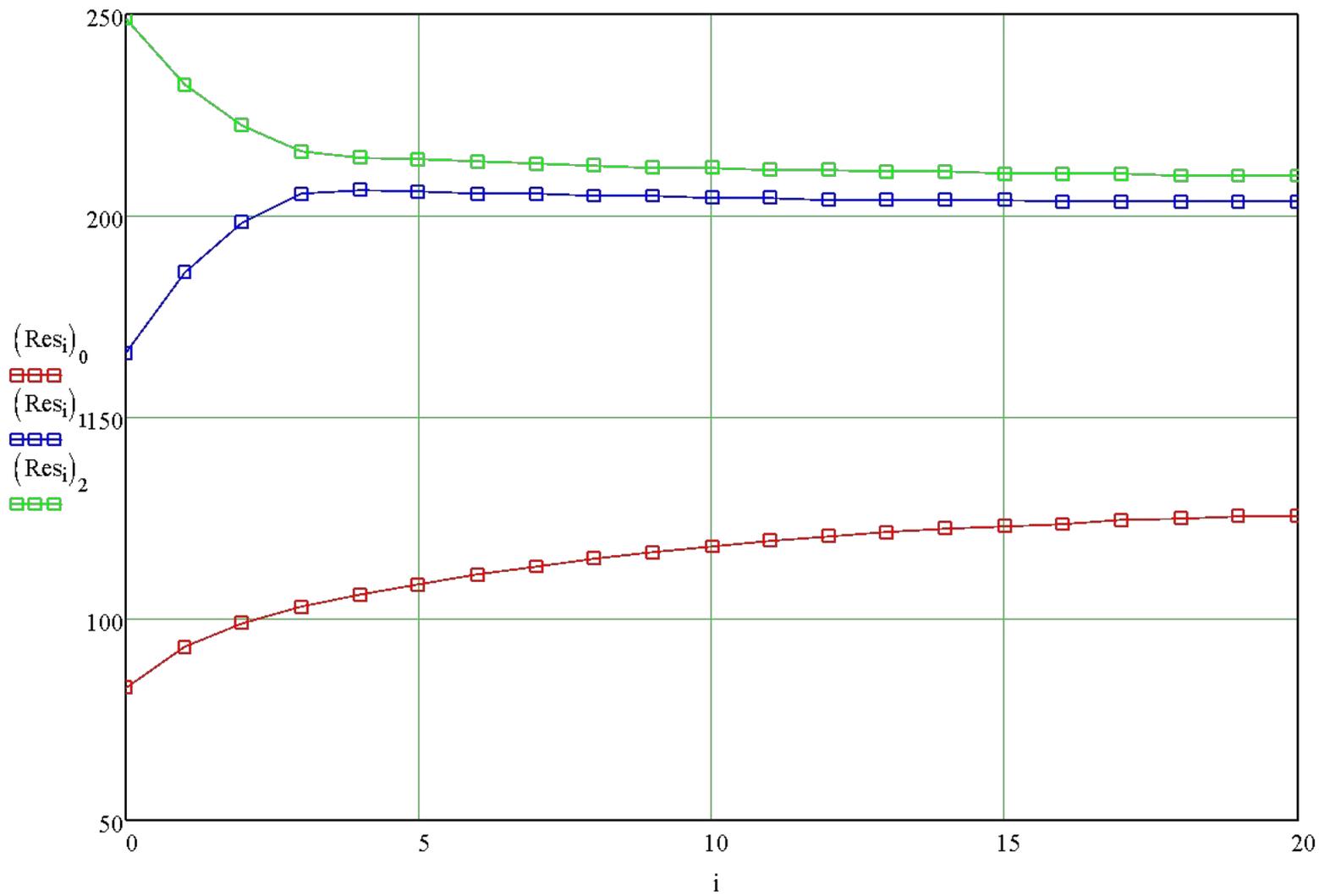
$$\begin{cases} \frac{1}{E} \sigma_{2(k)} - 2 \frac{1}{E} \sigma_{1(k)} = 2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{2(k)} \\ \frac{1}{E} \sigma_{3(k)} - 3 \frac{1}{E} \sigma_{1(k)} = 3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{3(k)} \end{cases}$$

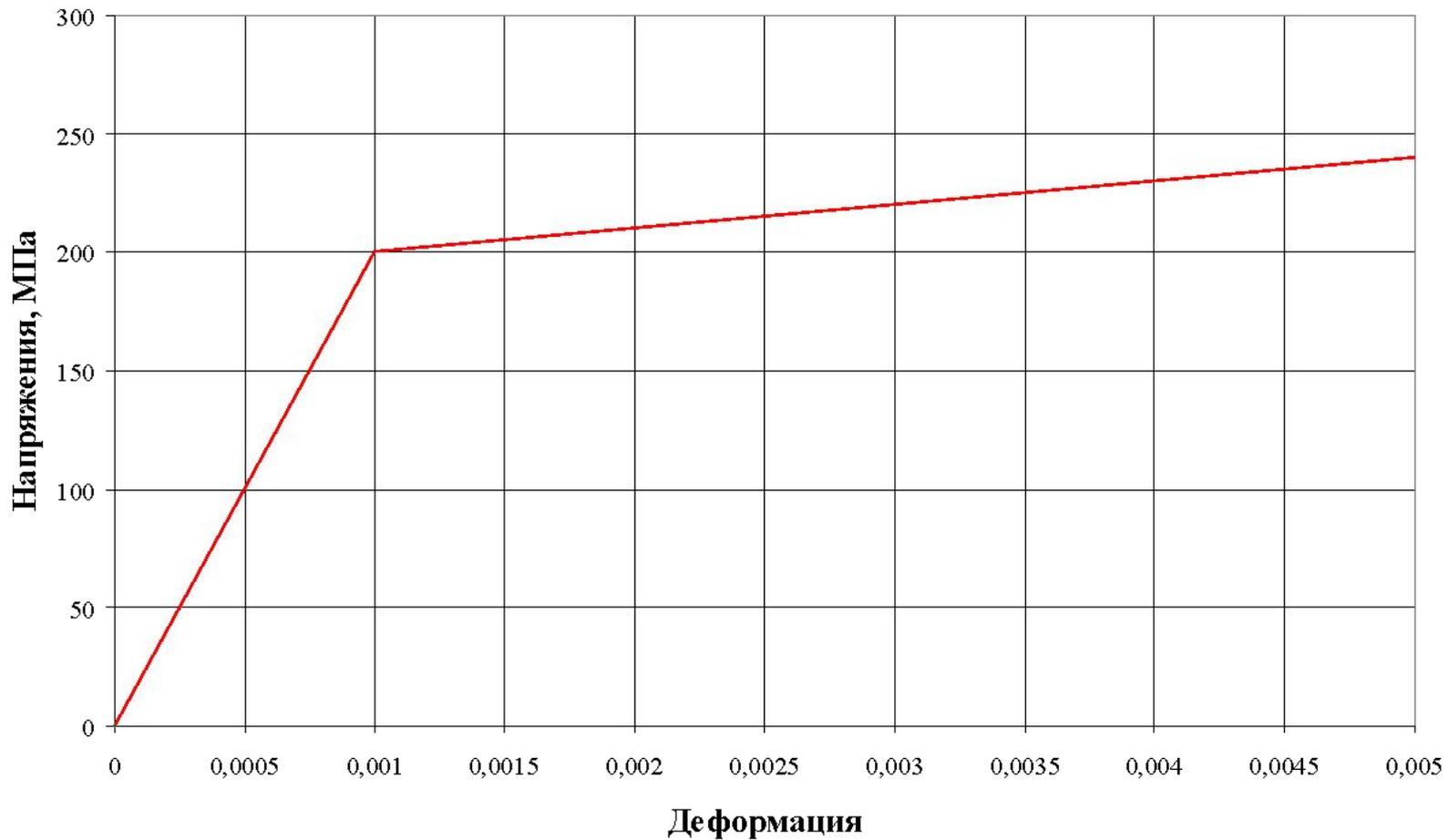
$$\sigma_{1(k)} + 2\sigma_{2(k)} + 3\sigma_{3(k)} = 3 \frac{P}{F}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1(k)} \\ \sigma_{2(k)} \\ \sigma_{3(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} E(2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{2(k)}) \\ E(3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{1(k)} - \tilde{\varepsilon}_{3(k)}) \\ 3 \cdot P/F \end{Bmatrix}$$

Алгоритм решения







— Диаграмма — Метод переменных параметров упругости — Метод дополнительных деформаций

Начало

>>

ЗАДАНИЕ

Вычислить напряжения в элементах стержневой конструкции.

Решение получить используя методы переменных параметров упругости (ППУ) и дополнительных деформаций (ДД).

Показать на графиках зависимость напряжений в стержнях от номера итерации отдельно для каждого метода решения. Для наиболее нагруженного стержня привести график «напряжение - номер итерации» сравнив методы ППУ и ДД.

Материал - идеально-упругопластический. Размеры, механические характеристики приведены под расчетной схемой.

Нагрузка $P = P_T + 0.8 \cdot (P_{пр} - P_T)$.

P_T - усилие, соответствующее появлению первых пластических деформаций,

$P_{пр}$ - усилие, соответствующее предельному состоянию конструкции.