

Целые неотрицательные числа

Арифметические действия
с целыми неотрицательными числами

Умножение

Электронный конспект для студентов
педагогических колледжей

Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.



Содержание:

- Понятие произведения целых неотрицательных чисел;
- Свойства умножения;
- Изучение умножения в начальном курсе математики.

Множество \mathbb{N}_0

Сложение

Вычитание

Деление

С помощью этих кнопок можно перейти в электронные конспекты по указанным темам.

Для возвращения в данный конспект нажмите `<esc>`.

Завершение работы

Для продолжения работы щелкните мышкой по соответствующей теме

Определение 11: Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число c , которое является численностью декартова произведения множества A на множество B , где $n(A)=a$; $n(B)=b$.

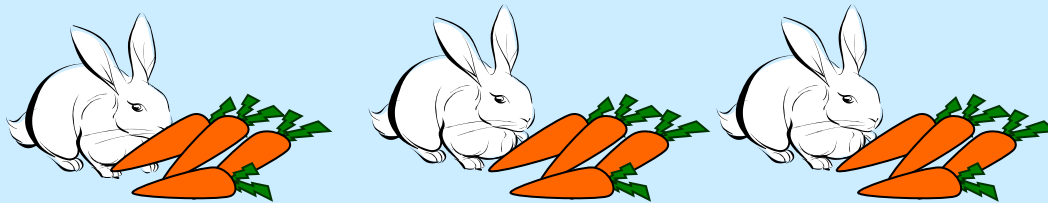
$$a \cdot b = n(A \times B)$$

Числа : a и b называются – *множители*, число c – *произведение*, запись $a \cdot b$ так же называется – *произведение*.

Определение 12: Действие, посредством которого находится произведение, называется **умножением**.

Данное определение соответствует представлению о числе как количественной характеристике множества, но не может являться основой методики изучения действия умножения в начальной школе. Смысл умножения дети усваивают, решая задачи на нахождение **?** суммы одинаковых слагаемых. Например:

Трем кроликам раздали по 4 морковки каждому. Сколько морковок раздали?



$$4 + 4 + 4 = 12 \text{ (м)}$$

Разбирая решение этой задачи, младшие школьники замечают, что все слагаемые данной суммы одинаковые, и учитель сообщает им, что решение этой задачи можно записать так:

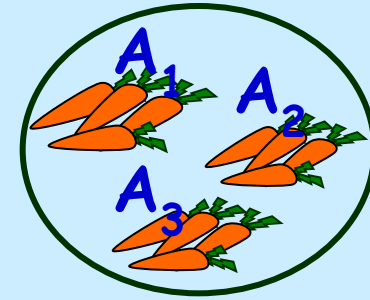
$$4 \cdot 3 = 12$$

Число 4 показывает, какое слагаемое складывали, а число 3 – сколько таких слагаемых взяли.

Продолжите предложение, чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с **Ваше предложение** и **Ваше решение** и щелкните мышкой по кнопке **Оценить**.



В данной задаче рассматриваются 3 равночисленных множества морковок: $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 4$. Решая задачу, дети находят ?



численность объединения множеств A_1, A_2, A_3 :

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 4 \cdot 3 = 12$$

Исходя из этого, понятие «произведение» можно определить так:

Определение 13: Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число c , которое является численностью объединения b непересекающихся множеств, численность каждого из которых равна a :

$$a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_b), \text{ где } n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_b) = a.$$

b множеств

По определению 13 нельзя найти произведение в особых случаях умножения:

- умножение на 0;
- умножение на 1, так как нельзя объединить 1 или **сложение**

Так как определение 13 рассматривает произведение **«сумма»** численности объединения равночисленных множеств, а объединение связано с действием **?**, то понятие «произведение» можно определить через понятие **?**.

Определение 14: Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число c , полученное по одному из следующих правил:

1. если $b = 0$, то $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$;
2. если $b = 1$, то $a \cdot b = a \cdot 1 = a$;
3. если $b > 1$, то $a \cdot b = a + a + a + \dots + a$

b слагаемых

Продолжите предложение, чтобы проверить себя, делайте кликом мышки по кнопкам с **Вперед** и **Назад**. Чтобы проверить себя, делайте кликом мышки по кнопке с **Далее** и **Назад**. Чтобы проверить себя, делайте кликом мышки по кнопке с **Далее** и **Назад**.

Для действия у

Для любых целых неотрицательных чисел a и b существует единственное целое неотрицательное число c , такое, что $c = a \cdot b$

Теорема: Для

только одно целое неотрицательное число c , которое является произведением чисел a и b . $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0) \exists! c \in \mathbb{N}_0: c = a \cdot b$



Задание 1: 1. Найдите значения данных выражений, заменив суммой;

$4 \cdot 5$

$3 \cdot 6$

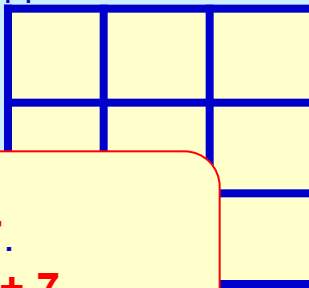
$6 \cdot 3$

$7 \cdot 4$

- 2. Запишите, что с точки зрения каждого определения произведения Вы нашли;
- 3. Сделайте рисунки, которые помогут детям найти эти произведения.

Задание 2: Составьте задачу на нахождение суммы одинаковых слагаемых. Сделайте рисунок к этой задаче. Что означает каждое число в записи решения Вашей задачи?

Задание 3: Сформулируйте задание на нахождение суммы одинаковых слагаемых, в котором в качестве наглядности использовался бы такой прямоугольник. Что означает каждое число в решении Вашего задания?



Задание 4: из цифр Скольк

- в выражении $6 \cdot 4$ число 6 повторили слагаемым 4 раза;
- в выражении $6 + 6 + 6 + 7$ тоже четыре слагаемых, но одно из них 7.
- 6 меньше 7, значит выражение $6 \cdot 4$ меньше выражения $6 + 6 + 6 + 7$.

Какое определение произведения лежит в основе ответа на этот вопрос?

Задание 5: Как будут рассуждать дети, сравнивая выражения:

Запишите это в тетрадь. Прочитайте выражение записанное символами. Если Вы затрудняетесь это сделать щелкните мышкой по знаку вопроса.

Запишите эти рассуждения. Если при выполнении задания щелкните мышкой по второму примеру. В этом случае советуем Вам записать, как читается это математическое предложение. Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана.



Для действия сложения справедливы следующие свойства (законы):

- Свойство коммутативности (переместительный закон);
- Свойство ассоциативности (сочетательный закон);
- Дистрибутивные свойства (распределительные законы)
умножения относительно сложения,
умножения относительно вычитания;
- Свойство монотонности.

Задание: Для данных выражений :

$$7 \cdot 4 \quad 43 \cdot 2 \quad 13 \cdot 20 \quad 47000 \cdot 5$$

- запишите развернутое решение и найдите значение;
- опишите, что с точки зрения всех определений произведения Вы нашли;
- определите какое свойство или свойства лежит в основе вычислительного приема;
- придумайте задачу или задание, иллюстрирующие данное свойство запишите все способы решения данной задачи (задания), составлением числовых выражений.

Запишите это в тетрадь.

Для продолжения работы щелкните мышкой по выделенному свойству.

Для продолжения работы кликните мышкой по любому полю экрана.



СВОЙСТВО

Для любых целых

$(\forall a, b \in \mathbb{N}_0) a \cdot b = b \cdot a$

В начальной школе

разными способами

Младшим школьникам

подсчитать разное

- сколько всего мячей?
- сколько квадратов в прямоугольнике?

В результате они могут получить следующие пары равенств:

Задание: Запишите рассуждения ученика по получению этих равенств. Чтобы проверить себя, щелкните мышкой по прямоугольнику. При повторном щелчке подсказка исчезнет.

Сравнивая полученные пары равенств:

- множители поменяли местами;
- результат (произведение) не изменился.

После рассмотрения достаточного количества примеров дети могут сделать вывод: ?

Это свойство лежит в основе изучения таблиц умножения. Каждая таблица умножения однозначного числа на однозначные числа начинается со случая умножения этого числа на себя. Например, таблица умножения числа 4 начинается с выражения $4 \cdot 4$ и выглядит так:

Случаи умножения $4 \cdot 2$, $4 \cdot 3$ рассматриваются в таблицах умножения чисел 2 и 3: $2 \cdot 4$, $3 \cdot 4$

Запишите это в тетрадь, продолжив предложение. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с вопросом. При повторном щелчке подсказка исчезнет.

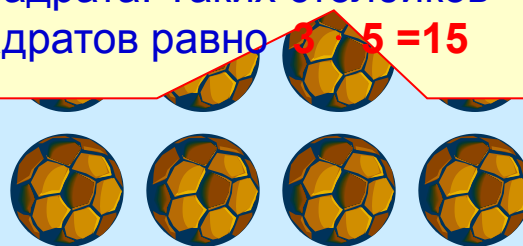
Для продолжения работы щелкните мышкой по любому из кнопок экрана

I способ:

В одном ряду 5 квадратов. Таких рядов – 3, значит количество квадратов равно $5 \cdot 3 = 15$

II способ:

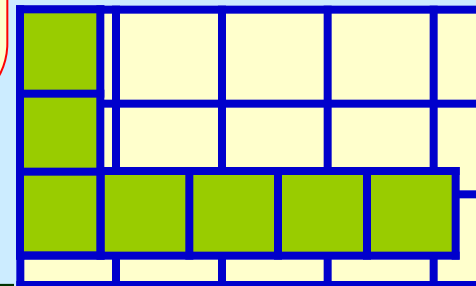
В одном столбике 3 квадрата. Таких столбиков – 5, значит количество квадратов равно $3 \cdot 5 = 15$



$4 \cdot 2 = 8$ и $2 \cdot 4 = 8$

$b = b \cdot a$

можно считать при подсчете квадратов. Например:



$5 \cdot 3 = 15$ и $3 \cdot 5 = 15$

От перестановки множителей произведение не меняется.

$4 \cdot 4 =$

16

$4 \cdot 5 =$

20

$4 \cdot 6 =$

24

$4 \cdot 7 =$

28

СВОЙСТВО АССОЦИАТИВНОСТИ

Для любых целых неотрицательных чисел a , b и c верно равенство: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

ЭТО СВОЙСТВО

I способ:

умножения

Сначала подсчитаем количество кубиков в одном горизонтальном слое:

Чтобы умножить

- в одном ряду 5 кубиков;

- можно умножить

- в одном слое 3 таких ряда, значит количество кубиков в одном горизонтальном слое равно $5 \cdot 3$

множителем

умножить

- можно умножить

Таких слоев у нас 2, следовательно всего кубиков $(5 \cdot 3) \cdot 2 = 30$

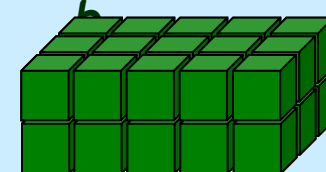
множителем

умножить на 1-ый множитель

умножить на 1-ый множитель

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = (b \cdot c) \cdot a \quad | \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$$

Для иллюстрации данного свойства можно различными способами подсчитать количество кубиков, составляющих прямоугольный параллелепипед.



Задание: Запишите способы рассуждения для получения различных равенств при подсчете кубиков в данном параллелепипеде: $(5 \cdot 3) \cdot 2 = 30$ $(5 \cdot 2) \cdot 3 = 30$ $(3 \cdot 2) \cdot 5 = 30$, иллюстрирующих свойство ассоциативности. Чтобы проверить себя и посмотреть один из способов, щелкните мышкой по вопросительному знаку.

Сформулируйте закон в виде предложения.

Для быстрой навигации используйте панель управления в нижней части экрана.



Свойство ассоциативности и соответствующие ему правила в явном виде не изучаются в начальной школе, но на них основано изучение вычислительных приемов умножения круглых чисел. Например, при вычислении значения выражения $87000 \cdot 4$ дети могут рассуждать так: *Чтобы 87000 умножить на 4 можно 87 умножить на 4 и полученный результат 348 умножить на 1000, т. е. приписать к числу 348 три нуля.*

Этому рассуждению соответствует такая цепочка равенств:

$$87000 \cdot 4 = (87 \cdot 1000) \cdot 4 = (87 \cdot 4) \cdot 1000 = 348000$$

Задания: 1. Какое правило лежит в основе данного рассуждения?

2. Запишите рассуждения ученика при решении примера $87 \cdot 400$.

Запишите соответствующую ему цепочку равенств. Какое правило применяется в этом случае?

Свойство ассоциативности лежит в основе алгоритма письменного умножения круглых чисел и правила записи этих чисел. Например, для вычисления значения выражения $8730 \cdot 4200$, дети его запишут столбиком так.

	8	7	3	0	
×		4	2	0	0

Выполняя вычисления, они 837 умножат на 42 и к полученному результату припишут столько нулей, сколько их было в 1-ом и 2-ом множителях вместе, то есть три нуля.

Данное решение соответствует такой записи с использованием свойства ассоциативности:

$$8730 \cdot 4200 = (873 \cdot 10) \cdot 4200 = (873 \cdot 4200) \cdot 10 = (843 \cdot (42 \cdot 100)) \cdot 10 =$$

Задание: Закончите цепочку равенств, иллюстрирующую применение свойства ассоциативности в данном случае.

Дистрибутивный закон умножения относительно сложения

Для любых целых неотрицательных чисел a , b и c верно равенство:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

В начальной школе знакомство с данным свойством сводится к знакомству с правилом

Умножение суммы на число:

- Чтобы умножить сумму на число можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.



Для знакомства с данным правилом можно предложить детям задачу, имеющую два способа решения. Числа в условии подбирают так, чтобы все вычисления проходили в пределах таблицы умножения. Например:

В четырех корзинах лежало по 3 яблока и 2 груши в каждой. Сколько всего фруктов лежало в корзинах?



Задание:

- Решите задачу различными способами, записав решение выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.
- Запишите систему вопросов ученикам на сравнение полученных равенств, которые приведут их к выводу правила «Умножение суммы на число». Рядом с вопросами запишите предполагаемые ответы учеников.

Сформулируйте и запишите это правило.

Выбрав правильный вариант ответа, щелкните мышкой по знаку вопроса.

Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана



Правило «**Умножение суммы на число**» используют для ознакомления с вычислительным приемом умножения двузначного числа на однозначное. Например:

$$27 \cdot 3 = (20 + 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 60 + 21 = 81$$

Рассуждения ученика:

- представляю число **27** в виде суммы разрядных (удобных) слагаемых **20 + 7**;
- нам удобно сначала **20** умножить на **3** – получится **60**, а затем **7** умножить на **3** – получится **21**;
- к **60** прибавим **21** – получится **81**.

Задание:

- Составьте свою задачу, иллюстрирующую правило **Умножения суммы на число**;
- Решите ее различными способами, записав решение выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.



Дистрибутивный закон умножения относительно вычитания

Для любых целых неотрицательных чисел a , b и c верно равенство:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Этому свойству соответствует правило **Умножение разности на число**

- Чтобы умножить разность на число, можно умножить на это число сначала уменьшаемое, а затем вычитаемое, и из первой разности вычесть вторую.



Данное правило в явном виде не изучается в начальной школе, но при решении задач разными способами, дети могут получить представление об этом правиле.

Задание: Составьте и запишите задачу по иллюстрации, которая появится на экране, так, чтобы с ее помощью можно было познакомиться с правилом **Умножение разности на число**. Для того, чтобы появилась иллюстрация задачи, щелкните мышкой по оранжевому кругу. При повторном щелчке действие повторится.



Задание:

- Решите составленную задачу различными способами, записав решение выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.



Правило «**Умножение разности на число**» можно использовать для показа следующего вычислительного приема: $29 \cdot 3 = (30 - 1) \cdot 3 = 30 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 90 - 3 = 87$

Задание: Запишите рассуждения ученика при решении примера таким способом.

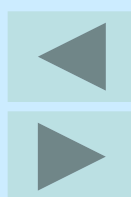
Составьте два подобных примера и решите их.

Сформулируйте и запишите это правило.

Чтобы проверить себя щелкните мышкой по знаку вопроса.

Выполните это задание.

Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому палю экрана



СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ

Если один из множителей увеличить (уменьшить) в несколько раз, то и произведение увеличится (уменьшится) во столько же раз.

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) (a > b) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

В начальной школе знакомство с данным свойством происходит опосредовано при выполнении различных заданий, связанных с прямо-пропорциональной зависимостью.

Например: 1. Заполни таблицу:

Выполняя это задание, дети замечают, что 1-ый множитель увеличивается, а 2-ой остается без изменения, при этом произведение также увеличивается

1-ый множитель	2	4	6	8	10	12	16
2-ой множитель	6	6	6	6	6	6	6
произведение							

2. Какое произведение больше? Не вычисляя значения выражений, выясни во сколько раз одно произведение больше другого.

$$3 \cdot 6 \dots 3 \cdot$$

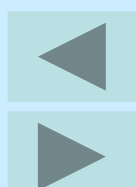
$$12 \cdot 4 \dots 7 \cdot 4$$

$$24 \cdot 39 \dots 24 \cdot 13$$

В выражении ..., стоящем справа, первый множитель (не изменился, увеличился (уменьшился) в ... раз(a)), второй множитель (не изменился, увеличился (уменьшился) в ... раз(a)), следовательно произведение увеличится (уменьшится) в ... раз(a), значит выражение ... в ... раз(a) больше (меньше) выражения

Выполните это задание! Какое у вас получилось выражение при этом?

Для удобства просмотра таблицы можно использовать кнопки управления курсором



Изучение умножения в начальном курсе математики

I этап. Ознакомление с умножением. На этом этапе дети знакомятся:

- с конкретным смыслом умножения – суммой одинаковых слагаемых. Результат действия умножения на этом этапе находят, заменяя умножение сложением. Например: $5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15$;
 - с записью арифметического действия;
 - с чтением выражений. Например: $5 \cdot 3$: «Пять умножить на три», «Пять взять три раза».
 - знакомятся с названием компонентов «множитель» и «произведение».
- После этого знакомства выражение $5 \cdot 3$ может быть прочитано: «Произведение пяти и трех», «Первый множитель – 5, второй – 3, найти произведение».

II этап. Изучение таблиц умножения. На этом этапе дети:

- изучают переместительный закон умножения;
- составляют и заучивают наизусть таблицы умножения чисел **2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**. Каждая таблица начинается со случая умножения числа самого на себя;
- знакомятся с особыми случаями умножения: **умножение на 1; умножение на 0**;
- знакомятся с отношением **«больше в ...»**. После этого знакомства добавляются варианты чтения выражений. Например: $5 \cdot 3$: «Пять увеличить в три раза»;

III этап. Изучение приемов внетабличного умножения. На этом этапе дети знакомятся:

- со свойствами умножения в явной или опосредованной форме;
- с приемами внетабличного умножения:
 - умножение круглых чисел, например: $50 \cdot 3$. $5 \cdot 30$;
 - умножение двузначного числа на однозначное, например: $24 \cdot 3$;

Задание: какое свойство лежит в основе каждого вычислительного приема?



IV этап. Изучение приемов умножения чисел до 1000 и многозначных чисел. На этом этапе дети:

- закрепляют вычислительные приемы умножения, основанные на знании свойств умножения. Например: $80 \cdot 3$, $84 \cdot 4$, $36 \cdot 600$, $3600 \cdot 3$;

Задание: запишите рассуждения учеников при решении каждого из этих примеров.

- знакомятся с алгоритмами письменного умножения:

умножение многозначного числа на однозначное;

умножение многозначного числа на круглое число, содержащее только одну цифру, отличную от нуля;

умножение многозначного числа на двузначное, трехзначное, многозначное число;

умножение круглых многозначных чисел.



$$\begin{array}{r} 873 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ \times 600 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 649 \\ \times 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3570 \\ \times 8700 \\ \hline \end{array}$$

Задание: вычислите значения данных выражений.

Для знакомства с алгоритмами письменного умножения, щелкните по кнопке со **Выполнить задание**.

Для продолжения работы щелкните мышью по любой области экрана.



Алгоритмы письменного умножения

Алгоритм умножения многозначного числа на однозначное:

1. Запишите второй множитель под разрядом единиц первого множителя
2. Умножьте сначала единицы первого разряда.
 - а) Если полученное произведение меньше 10, то запишите его в соответствующий разряд ответа;
 - б) Если полученное произведение больше 10, то выделите в ответе полное количество десятков и оставшееся количество единиц. Полученные единицы запишите в соответствующий разряд ответа, а количество десятков перейдет в следующий разряд (их нужно запомнить);
3. Повторяйте те же действия со всеми разрядами числа, добавляя к полученному произведению запомненные единицы из предыдущих разрядов.

Алгоритм умножения многозначного числа на круглое число, содержащее только одну цифру, отличную от нуля:

1. Запишите второй множитель под первым так, чтобы его отличная от нуля значащая цифра стояла под разрядом единиц первого множителя.
2. Умножьте первый множитель на эту цифру по алгоритму умножения многозначного числа на однозначное
3. К полученному результату припишите столько нулей, сколько их было во втором множителе.



Алгоритм умножения многозначного числа на многозначное :

1. Запишите второй множитель под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом;
2. Последовательно умножьте первый множитель сначала на единицы, потом на десятки, сотни и т. д. второго множителя по алгоритму умножения многозначного числа на однозначное.

Полученные **неполные произведения** начинайте писать под тем разрядом, на который умножаете.

Если во втором множителе один из разрядов равен нулю, то умножение на этот разряд пропускается. При этом нужно помнить, что следующее неполное произведение нужно начать писать под тем разрядом, на цифру которого производится умножение.

3. Сложите полученные неполные произведения по алгоритму письменного сложения.

Алгоритм умножения круглых многозначных чисел:

1. Запишите второй множитель под первым так, чтобы первая справа отличная от нуля цифра второго множителя стояла под первой справа отличной от нуля цифрой первого множителя
2. Мысленно отбрасываем нули, стоящие в конце множителей и умножаем полученные числа по алгоритму умножения многозначного числа на многозначное.
3. К полученному результату приписываем столько нулей, сколько их было в двух множителях вместе.



Действия с целыми неотрицательными числами.

Умножение

Вы завершили знакомство с данной темой.

Если Вы хотите завершить работу – нажмите клавишу **<ESC>**

Если Вы хотите вернуться в оглавление – щелкните мышкой по управляющей кнопке

