Целые неотрицательные числа

Арифметические действия с целыми неотрицательными числами

Умножение

Электронный конспект для студентов педагогических колледжей

Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке.

Содержание:

- Понятие произведения целых неотрицательных чисел;
- Свойства умножения;
- Изучение умножения в начальном курсе математики.

Множество No

Сложение

Вычитание

Деление

С помощью этих кнопок можно перейти в электронные конспекты по указанным темам.

Для возвращения в данный конспект нажмите <esc>.

Завершение работы

Для продолжения работы щелкните мышкой по соответствующей теме

Умножение целых неотрицательных чисел

Возврат в оглавление

Определение 11: Произведением целых неотрицательных чисел ***a*** и ***b*** называется целое неотрицательное число ***c*,** которое является численностью декартова произведения множества **А** на множество **В**, где **n(A)=*a*; n(B)=*b*.**

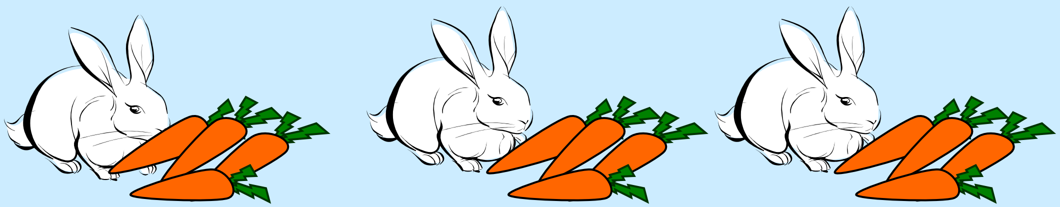
$$a \cdot b = n(A \times B)$$

Числа : ***a*** и ***b*** называются – ***множители,*** число ***c*** – ***произведение,*** запись ***a · b*** так же называется – ***произведение.***

Определение 12: Действие, посредством которого находится произведение, называется **умножением**.

Данное определение соответствует представлению о числе как количественной характеристике множества, но не может являться основой методики изучения действия умножения в начальной школе. Смысл умножения дети усваивают, решая задачи на нахождение суммы одинаковых слагаемых. Например:

Трем кроликам раздали по 4 морковки каждому. Сколько морковок раздали?



4 + 4 + 4 = 12 (м)

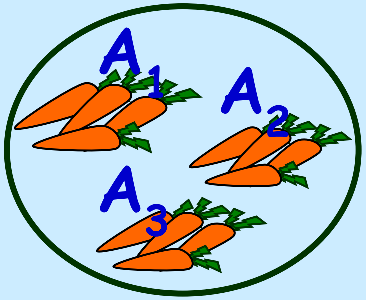
Разбирая решение этой задачи, младшие школьники замечают, что все слагаемые данной суммы одинаковые, и учитель сообщает им, что решение этой задачи можно записать так:

4 · 3 = 12

Число **4** показывает, какое слагаемое складывали, а число **3** – сколько таких слагаемых взяли.

Продолжите предложение, чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с

[illegible]



В данной задаче рассматриваются 3 равночисленных множества морковок: $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 4$. Решая задачу, дети находят ? численность объединения множеств A_1, A_2, A_3:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 4 \cdot 3 = 12$$

Исходя из этого, понятие «произведение» можно определить так:

Определение 13: Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число c, которое является численностью объединения b непересекающихся множеств, численность каждого из которых равна a:

$$a \cdot b = n(\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b}_{b \text{ множеств}}), \text{ где } n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b) = a.$$

По определению 13 нельзя найти произведение в особых случаях умножения:

- умножение на **0**;
- умножение на **1**, так как нельзя объединить 1 или

Так как определение 13 рассматривает произведени «сумма» ость объединения равночисленных множеств, а объединение связано с действием ?, то понятие «произведение» можно определить через понятие ?.

сложение

Определение 14: Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется целое неотрицательное число c, полученное по одному из следующих правил:

1. если $b = 0$, то $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$; 2. если $b = 1$, то $a \cdot b = a \cdot 1 = a$;
3. если $b > 1$, то $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}$

Ответы в особых случаях находятся по данному определению.

Продолжите предложение. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопкам с вопросами.

щелкните мышкой по кнопке с

левой кнопкой мыши по любому полю экрана.

Возврат в оглавление

Для действия у

Для любых целых неотрицательных чисел **a** и **b** существует единственное целое неотрицательное число **c**, такое, что **c** = **a** · **b**

Теорема: Для

только одно целое неотрицательное число *c*, которое является произведением чисел *a* и *b* . $(\forall a,b \in N_0)\ \exists!\ c \in N_0:\ c = a \cdot b$

?

Задание 1: 1. Найдите значения данных выражений, заменив суммой;

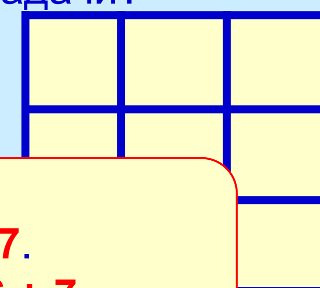
4 · 5 **3 · 6** **6 · 3** **7 · 4**

2. Запишите, что с точки зрения каждого определения произведения Вы нашли;

3. Сделайте рисунки, которые помогут детям найти эти произведения.

Задание 2: Составьте задачу на нахождение суммы одинаковых слагаемых. Сделайте рисунок к этой задаче. Что означает каждое число в записи решения Вашей задачи?

Задание 3: Сформулируйте задание на нахождение суммы одинаковых слагаемых, в котором в качестве наглядности использовался бы такой прямоугольник. Что означает каждое число в решении Вашего задания?



Задание

из цифр

Сколько

- в выражении **6 · 4** число 6 повторили слагаемым 4 раза;
- в выражении **6 + 6 + 6 + 7** тоже четыре слагаемых, но одно из них **7**.
- **6** меньше **7**, значит выражение **6 · 4** меньше выражения **6 + 6 + 6 + 7**.

Какое определение произведения лежит в основе ответа на этот вопрос?

Задание 5: Как будут рассуждать дети, сравнивая выражения:

7 · 5 … 7 + 7 + 7 + 7 **6 · 4 … 6 + 6 + 6 + 7**

Запишите это в тетрадь. Прочитайте выражение записанное символами.

Если Вы затрудняетесь это сделать щелкните мышкой по знаку вопроса.

В этом случае, советуем Вам записать, как читается это математическое предложение.

Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю.

Запишите эти рассуждения.

Чтобы проверить себя щелкните мышкой по второму примеру.

Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана

Свойства умножения

Возврат в оглавление

Для действия сложения справедливы следующие свойства (законы):

- Свойство **коммутативности** (переместительный закон);
- Свойство **ассоциативности** (сочетательный закон);
- Дистрибутивные свойства (распределительные законы) **умножения относительно сложения**, **умножения относительно вычитания**;
- Свойство **монотонности**.

Задание: Для данных выражений :

7 · 4 43 · 2 13 · 20 47000 · 5

- запишите развернутое решение и найдите значение;
- опишите, что с точки зрения всех определений произведения Вы нашли;
- определите какое свойство или свойства лежит в основе вычислительного приема;
- придумайте задачу или задание, иллюстрирующие данное свойство запишите все способы решения данной задачи (задания), составлением числовых выражений.

Запишите это в тетрадь.

Для продолжения работы щелкните мышкой по выделенному свойству.

После ознакомления щелкните мышкой по голубому полю экрана.

Для продолжения работы вернитесь в оглавление.

Возврат в оглавление

Свойство

Для любых цел ... $b = b \cdot a$

(∀a,b∈№) a ·

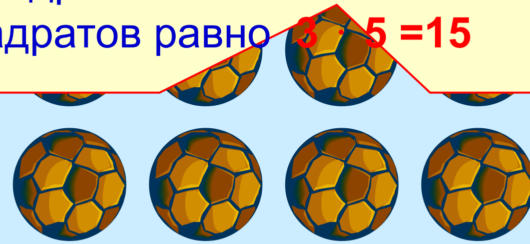
В начальной ш ... дить при подсчете разными способ ... ик. Например:

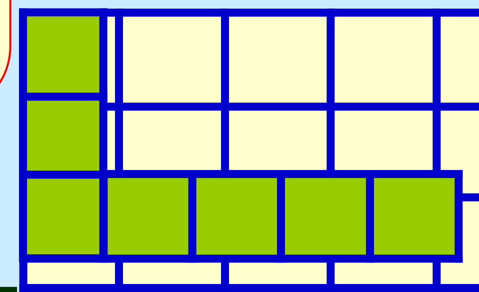
I способ:
В одном ряду 5 квадратов. Таких рядов – 3, значит количество квадратов равно **5 · 3 =15**

II способ:
В одном столбике 3 квадрата. Таких столбиков – 5, значит количество квадратов равно **3 · 5 =15**

Младшим школь ... подсчитать разны ...

- сколько всего мячей?
- сколько квадратов в прямоугольнике?





В результате они могут получить следующие пары равенств:

4 · 2 = 8 и 2 · 4 = 8

5 · 3 =15 и 3 · 5 = 15

Задание: Запишите рассуждения ученика по получению этих равенств. Чтобы проверить себя, щелкните мышкой по прямоугольнику. При повторном щелчке подсказка исчезнет.

Сравнивая полученные п ...

- множители поменяли местами;
- результат (произведение) не изменился.

От перестановки множителей произведение не меняется.

После рассмотрения достаточного количества примеров дети могут сделать вывод: ?

Это свойство лежит в основе изучения таблиц умножения. Каждая таблица умножения однозначного числа на однозначные числа начинается со случая умножения этого числа на себя. Например, таблица умножения числа **4** начинается с выражения **4 · 4** и выглядит так:

4 · 4 = 16
4 · 5 = 20
4 · 6 = 24
4 · 7 = 28

Случаи умножения **4 · 2**, **4 · 3** рассматриваются в таблицах умножения чисел **2** и **3**: **2 · 4**, **3 · 4**

Запишите это в тетрадь, продолжив предложение. Чтобы проверить себя щелкните мышкой по кнопке с вопросом. При повторном щелчке подсказка исчезнет.

Возврат в оглавление

Свойство ассоциативности

Для любых целых неотрицательных чисел ***a, b*** и ***c*** верно равенство: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(\forall a, b, c \in N_0)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Это свойств…

умножени…

Чтобы умн…

- *можно умн… множител… умножить …*
- *можно умн… множитель … и полученный … умножить на 1-ый множитель*

умножить на 1-ый множитель

I способ:

Сначала подсчитаем количество кубиков в одном горизонтальном слое:

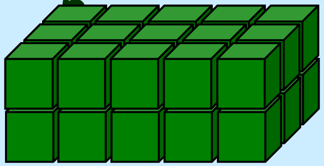
- в одном ряду 5 кубиков;
- в одном слое 3 таких ряда, значит количество кубиков одном горизонтальном слое равно **5 · 3**

Таких слоев у нас 2, следовательно всего кубиков **(5 · 3) · 2 = 30**

$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = (b \cdot c) \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$

Для иллюстрации данного свойства можно различными способами подсчитать количество кубиков, составляющих прямоугольный параллелепипед.



Задание: Запишите способы рассуждения для получения различных равенств при подсчете кубиков в данном параллелепипеде: **(5 · 3) · 2 = 30** **(5 · 2) · 3 = 30** **(3 · 2) · 5 = 30**, иллюстрирующих свойство ассоциативности. Чтобы проверить себя и посмотреть один из способов, щелкните мышкой по вопросительному знаку.

?

Запишите составленные Вами рассуждения.

… щелкните мышкой по голубому полю экрана

Свойство ассоциативности и соответствующие ему правила в явном виде не изучаются в начальной школе, но на них основано изучение вычислительных приемов умножения круглых чисел. Например, при вычислении значения выражения **87000 · 4** дети могут рассуждать так: *Чтобы **87000** умножить на **4** можно **87** умножить на **4** и полученный результат **348** умножить на **1000**, т. е. приписать к числу **348** три нуля.*

Этому рассуждению соответствует такая цепочка равенств:

87000 · 4 = (87 · 1000) · 4 = (87 · 4) · 1000 = 348000

Задания: 1. Какое правило лежит в основе данного рассуждения?

2. Запишите рассуждения ученика при решении примера **87 · 400**.

Запишите соответствующую ему цепочку равенств. Какое правило применяется в этом случае?

Свойство ассоциативности лежит в основе алгоритма письменного умножения круглых чисел и правила записи этих чисел. Например, для вычисления значения выражения **8730 · 4200**, дети его запишут столбиком так.

```
  8 7 3 0
×   4 2 0 0
```

Выполняя вычисления, они **837** умножат на **42** и к полученному результату припишут столько нулей, сколько их было в 1-ом и 2-ом множителях вместе, то есть три нуля.

Данное решение соответствует такой записи с использование свойства ассоциативности:

8730 · 4200 = (873 · 10) · 4200 = (873 · 4200) · 10 = (843 · (42 · 100)) · 10 =

Задание: Закончите цепочку равенств, иллюстрирующую применение свойства ассоциативности в данном случае.

Возврат в оглавление

Дистрибутивный закон умножения относительно сложения

Для любых целых неотрицательных чисел ***a*, *b*** и ***c*** верно равенство:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

В начальной школе знакомство с данным свойством сводится к знакомству с правилом ***Умножение суммы на число:***

?

- *Чтобы умножить сумму на число можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.*

Для знакомства с данным правилом можно предложить детям задачу, имеющую два способа решения. Числа в условии подбирают так, чтобы все вычисления проходили в пределах таблицы умножения. Например:

В четырех корзинах лежало по 3 яблока и 2 груши в каждой. Сколько всего фруктов лежало в корзинах?

Задание:

- Решите задачу различными способами, записав решение выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.
- Запишите систему вопросов ученикам на сравнение полученных равенств, которые приведут их к выводу правила «Умножение суммы на число». Рядом с вопросами запишите предполагаемые ответы учеников.

Сформулируйте и запишите это правило.

Выполните это задание.

Чтобы проверить себя щелкните мышкой по знаку вопроса.

Запишите это в тетрадь и щелкните мышкой по голубому полю экрана

Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке

Правило «**Умножение суммы на число**» используют для ознакомления с вычислительным приемом умножения двузначного числа на однозначное. Например:

$27 \cdot 3 = (20 + 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 60 + 21 = 81$

Рассуждения ученика:

- представляю число **27** в виде суммы разрядных (удобных) слагаемых **20 + 7**;
- нам удобно сначала **20** умножить на **3** – получится **60**, а затем **7** умножить на **3** – получится **21**;
- к **60** прибавим **21** – получится **81**.

Задание:

- Составьте свою задачу, иллюстрирующую правило **Умножения суммы на число**;
- Решите ее различными способами, записав решение выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.

Возврат в оглавление

Дистрибутивный закон умножения относительно вычитания

Для любых целых неотрицательных чисел ***a*, *b*** и ***c*** верно равенство:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$(\forall a,b,c \in N_0)\ (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Этому свойству соответствует правило ***Умножение разности на число***

- *Чтобы умножить разность на число, можно умножить на это число сначала уменьшаемое, а затем вычитаемое, и из первой разности вычесть вторую.*

?

Данное правило в явном виде не изучается в начальной школе, но при решении задач разными способами, дети могут получить представление об этом правиле.

Задание: Составьте и запишите задачу по иллюстрации, которая появится на экране, так, чтобы с ее помощью можно было познакомиться с правилом ***Умножение разности на число***. Для того, чтобы появилась иллюстрация задачи, щелкните мышкой по оранжевому кругу. При повторном щелчке действие повторится.

Задание:

- Решите составленную задачу различными способами, записав решение выражением.
- Запишите план решения задачи в каждом способе.

Правило «**Умножение разности на число**» можно использовать для показа следующего вычислительного приема: $29 \cdot 3 = (30 - 1) \cdot 3 = 30 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 90 - 3 = 87$

Задание: Запишите рассуждения ученика при решении примера таким способом. Составьте два подобных примера и решите их.

Сформулируйте и запишите это правило.

Чтобы проверить себя щелкните мышкой по знаку вопроса.

Выполните это задание.

Для продолжения работы щелкните мышкой по голубому полю экрана

Возврат в оглавление

Свойство монотонности

Если один из множителей увеличить (уменьшить) в несколько раз, то и произведение увеличится (уменьшится) во столько же раз.

$(\forall a,b,c \in N_0)\ (a > b) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

В начальной школе знакомство с данным свойством происходит опосредовано при выполнении различных заданий, связанных с прямо-пропорциональной зависимостью.

Например: 1. Заполни таблицу:

1-ый множитель	2	4	6	8	10	12	16
2-ой множитель	6	6	6	6	6	6	6
произведение							

Выполняя это задание, дети замечают, что 1-ый множитель увеличивается, а 2-ой остается без изменения, при этом произведение также увеличивается

2. Какое произведение больше? Не вычисляя значения выражений, выясни во сколько раз одно произведение больше другого.

$3 \cdot 6 \ldots 3 \cdot 12$

$14 \cdot 4 \ldots 7 \cdot 4$

$24 \cdot 39 \ldots 24 \cdot 13$

В выражении …, стоящем справа, первый множитель (не изменился, увеличился (уменьшился) в … раз(а)), второй множитель (не изменился, увеличился (уменьшился) в … раз(а)), следовательно произведение увеличится (уменьшится) в … раз(а)), значит выражение … в … раз(а) больше (меньше) выражения ….

Выполните это задание. Как могут рассуждать ученики при его выполнении.

Изучение умножения в начальном курсе математики

I этап. Ознакомление с умножением. На этом этапе дети знакомятся:

• с конкретным смыслом умножения – суммой одинаковых слагаемых. Результат действия умножения на этом этапе находят, заменяя умножение сложением. Например: **5 · 3 = 5 + 5 + 5 = 15**;

• с записью арифметического действия;

• с чтением выражений. Например: **5 · 3:** «Пять умножить на три», «Пять взять три раза».

• знакомятся с названием компонентов «множитель» и «произведение».

После этого знакомства выражение **5 · 3** может быть прочитано: «Произведение пяти и трех», «Первый множитель – 5, второй – 3, найти произведение».

II этап. Изучение таблиц умножения. На этом этапе дети:

- изучают переместительный закон умножения;
- составляют и заучивают наизусть таблицы умножения чисел **2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**. Каждая таблица начинается со случая умножения числа самого на себя;
- знакомятся с особыми случаями умножения: **умножение на 1**; **умножение на 0**;
- знакомятся с отношением **«больше в …»**. После этого знакомства добавляются варианты чтения выражений. Например: **5 · 3:** «Пять увеличить в три раза»;

III этап. Изучение приемов внетабличного умножения. На этом этапе дети знакомятся:

- со свойствами умножения в явной или опосредованной форме;
- с приемами внетабличного умножения:

  умножение круглых чисел, например: **50 · 3. 5 · 30;**

  умножение двузначного числа на однозначное, например: **24 · 3**;

Задание: какое свойство лежит в основе каждого вычислительного приема?

Для продолжения работы щелкните мышкой по управляющей кнопке

Возврат в оглавление

Возврат в оглавление

IVэтап. Изучение приемов умножения чисел до 1000 и многозначных чисел. На этом этапе дети:

- закрепляют вычислительные приемы умножения, основанные на знании свойств умножения. Например: **80 · 3, 84 · 4, 36 · 600, 3600 · 3**;

Задание: запишите рассуждения учеников при решении каждого из этих примеров.

- знакомятся с алгоритмами письменного умножения:

умножение многозначного числа на однозначное;

умножение многозначного числа на круглое число, содержащее только одну цифру, отличную от нуля;

умножение многозначного числа на двузначное, трехзначное, многозначное число;

умножение круглых многозначных чисел.

$$\begin{array}{r} 873 \\ \times\quad 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 963 \\ \times\quad 600 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 649 \\ \times\quad 36 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3570 \\ \times\quad 8700 \\ \hline \end{array}$$

Задание: вычислите значения данных выражений.

Для знакомства с алгоритмами письменного умножения, щелкните по кнопке со знаком вопроса.

Выполните задание.

Для продолжения работы щелкните левой кнопкой мыши по любому полю экрана

Возврат в оглавление

Алгоритмы письменного умножения

Алгоритм умножения многозначного числа на однозначное:

1. Запишете второй множитель под разрядом единиц первого множителя
2. Умножьте сначала единицы первого разряда.
   а) Если полученное произведение меньше 10, то запишите его в соответствующий разряд ответа;
   б) Если полученное произведение больше 10, то выделите в ответе полное количество десятков и оставшееся количество единиц. Полученные единицы запишите в соответствующий разряд ответа, а количество десятков перейдет в следующий разряд (их нужно запомнить);
3. Повторяйте те же действия со всеми разрядами числа, добавляя к полученному произведению запомненные единицы из предыдущих разрядов.

Алгоритм умножения многозначного числа на круглое число, содержащее только одну цифру, отличную от нуля:

1. Запишете второй множитель под первым так, чтобы его отличная от нуля значащая цифра стояла под разрядом единиц первого множителя.
2. Умножьте первый множитель на эту цифру по алгоритму умножения многозначного числа на однозначное
3. К полученному результату припишите столько нулей, сколько их было во втором множителе.

Для продолжения работы щелкните по голубому полю экрана
Запишите это в тетрадь и щелкните по указателю

Возврат в оглавление

Алгоритм умножения многозначного числа на многозначное :

1. Запишете второй множитель под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом;
2. Последовательно умножьте первый множитель сначала на единицы, потом на десятки, стони и т. д. второго множителя по алгоритму умножения многозначного числа на однозначное.

   Полученные **неполные произведения** начинайте писать под тем разрядом, на который умножаете.

   Если во втором множителе один из разрядов равен нулю, то умножение на этот разряд пропускается. При этом нужно помнить, что следующее неполное произведение нужно начать писать под тем разрядом, на цифру которого производится умножение.
3. Сложите полученные неполные произведения по алгоритму письменного сложения.

Алгоритм умножения круглых многозначных чисел:

1. Запишете второй множитель под первым так, чтобы первая справа отличная от нуля цифра второго множителя стояла под первой справа отличной от нуля цифрой первого множителя
2. Мысленно отбрасываем нули, стоящие в конце множителей и умножаем полученные числа по алгоритму умножения многозначного числа на многозначное.
3. К полученному результату приписываем столько нулей, сколько их было в двух множителях вместе.

Для продолжения работы щелкните по голубому полю экрана

Действия с целыми неотрицательными числами.

Умножение

Вы завершили знакомство с данной темой.
Если Вы хотите завершить работу – нажмите клавишу <ESC>
Если Вы хотите вернуться в оглавление – щелкните мышкой по управляющей кнопке