Информатика

Лекция 3

Логические основы организации компьютера

Понятие об алгебре логики

- Основу логических схем и устройств ЭВМ составляет специальный математический аппарат, называемый *алгеброй логики* или *исчислением высказываний*. При этом под высказыванием понимается любое утверждение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.
- Если высказывание истинно, то считают, что его значение равно единице; если высказывание ложно, то считают, что его значение равно нулю. Таким образом, значение высказываний можно рассматривать как переменную величину, принимающую только два дискретных значения: 0 или 1.
- Это приводит к полному соответствию между логическими высказываниями в математической логике и двоичными цифрами в двоичной системе счисления, что позволяет описывать работу логических схем компьютера, проводить их анализ и синтез с помощью математического аппарата алгебры логики.
- Иное название алгебры логики – *булева алгебра*.

Джорж Буль и Клод Шеннон

- Данный раздел математики назван в честь английского математика *Джорджа Буля* (*Georg Boole, 1815 - 1854*), изложившего основные положения этой алгебры в своем трактате «Исследование законов мышления с помощью математических теорий логики и вероятностей», опубликованном в 1854 г.
- В 1937 г. *Клод Шеннон* (*Claude Shannon, 1916-2001*), в то время ассистент электротехнического факультета МИТ (Массачуссетского института технологий), предположил, что алгебру Буля можно использовать для решения проблем проектирования релейных переключающих схем. Предложенные Шенноном методы в дальнейшем были использованы при анализе и проектировании электронных цифровых схем.

Основные логические операции

Как и любая другая, булева алгебра использует переменные и операции над ними. В данном случае переменные и операции являются логическими переменными и логическими операциями. Переменные могут принимать только два значения – ИСТИНА (1) и ЛОЖЬ (0). Базовые логические операции – *конъюнкция* (AND), *дизъюнкция* (OR) и *инверсия* (NOT), которые символически представляются знаками точки, плюса и надчеркиванием:

A AND B = A ●B

A OR B = A + B

NOT A = $\bar{A}$

Результатом операции AND будет 1 (ИСТИНА) в том и только в том случае, если оба операнда имеют значение 1. Операция OR дает результат 1 в том случае, если любой из операндов (или оба вместе) имеют значение 1. Унарная операция NOT инвертирует значение операнда. При отсутствии скобок существует приоритет операции *AND* над операцией *OR*. При обозначении операции *AND* символ точки часто опускается, если это не порождает двусмысленного толкования.

В курсе математической логики вы изучите еще ряд логических операций, а здесь мы остановимся на этих трех базовых: AND, OR, NOT и лишь поясним еще некоторые

Операция «исключающее ИЛИ»

Высказывание «**A ⊕ B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, но ***не оба одновременно*** (то есть **A ≠ B**).

«Либо пан, либо пропал».

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
A xor B (Паскаль),
A ^ B (Си)

арифметическое сложение, 1+1=2

остаток

сложение по модулю 2: A ⊕ B = (A + B) **mod** 2

Свойства операции «исключающее ИЛИ»

$A \oplus 0 =$ A $\qquad$ $A \oplus A =$ 0

$A \oplus 1 =$ $\overline{A}$ $\qquad$ $(A \oplus B) \oplus B =$?

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

A	B	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация («если …, то …»)

Высказывание «**A** → **B**» истинно, если не исключено, что из **A** следует **B**.

A – «Работник хорошо работает».

B – «У работника хорошая зарплата».

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

Импликация («если …, то …»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \to B = 1$$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

Эквивалентность («тогда и только тогда, …»)

Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Основные тождества булевой алгебры

Постулаты		
$A \bullet B = B \bullet A$	$A+B = B+A$	Коммутативные законы
$A \bullet (B+C) = A \bullet B + (A \bullet C)$	$A + (B \bullet C) = (A+B) \bullet (A+C)$	Дистрибутивные законы
$1 \bullet A = A$	$0 + A = A$	
$A \bullet \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$	
Производные тождества		
$0 \bullet A = 0$	$1 + A = 1$	
$A \bullet A = A$	$A + A = A$	
$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$	$A + (B + C) = (A + C) + C$	Ассоциативные законы
$A \bullet B = A + B$	$A + B = A \bullet B$	Формулы де Моргана

Комбинационные схемы (дизъюнктивная нормальная форма)

Приведенные тождества булевой алгебры активно используются при упрощении логических выражений или комбинационных логических схем

Самый простой способ представить логическое выражение - просуммировать конъюнктивные члены, обращающие выражение в 1:

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

Такая форма представления называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ). Как видим, она легко реализуется с помощью базовых функций AND, OR и NOT

Комбинационные схемы (конъюнктивная нормальная форма)

Другая форма представления получится, если знать, что значение логической функции будет равно 1, если ни один из членов конъюнкции не равен 0 :

$$F=\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})}\cdot\overline{(\overline{A}\,\overline{B}C)}\cdot\overline{(A\overline{B}\,\overline{C})}\cdot\overline{(A\overline{B}C)}\cdot\overline{(ABC)}$$

Это выражение можно переписать, если воспользоваться правилами де Моргана:

$$\overline{X\cdot Y\cdot Z}=\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$$

Тогда получим так называемую конъюнктивную нормальную форму:

$$F=(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}})\cdot(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}})\cdot(\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})=$$

$$=(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Упрощение логических выражений

- В общем случае возможно получить более простое выражение, чем то, которое дает и ДНФ, и КНФ.
- Иногда предпочтительнее искать выражение, которое можно реализовать с помощью операций только одного типа.
- Следует ожидать, что более простое логическое выражение будет и реализовано меньшим количеством операций. Существует несколько методов упрощения логических выражений, из которых мы рассмотрим два:
  - алгебраический;
  - с помощью карт Карно.

Алгебраический метод упрощения

Алгебраические методы основаны на тождествах булевой алгебры

Например, упростим выражение

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

$$F = \overline{A}B + B\overline{C}$$

$$F = B(\overline{A} + \overline{C})$$

Проверка с помощью таблиц истинности

A	B	C	$F=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+AB\overline{C}$	$F=\overline{A}B+B\overline{C}$	$F=B(\overline{A}+\overline{C})$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Карты Карно

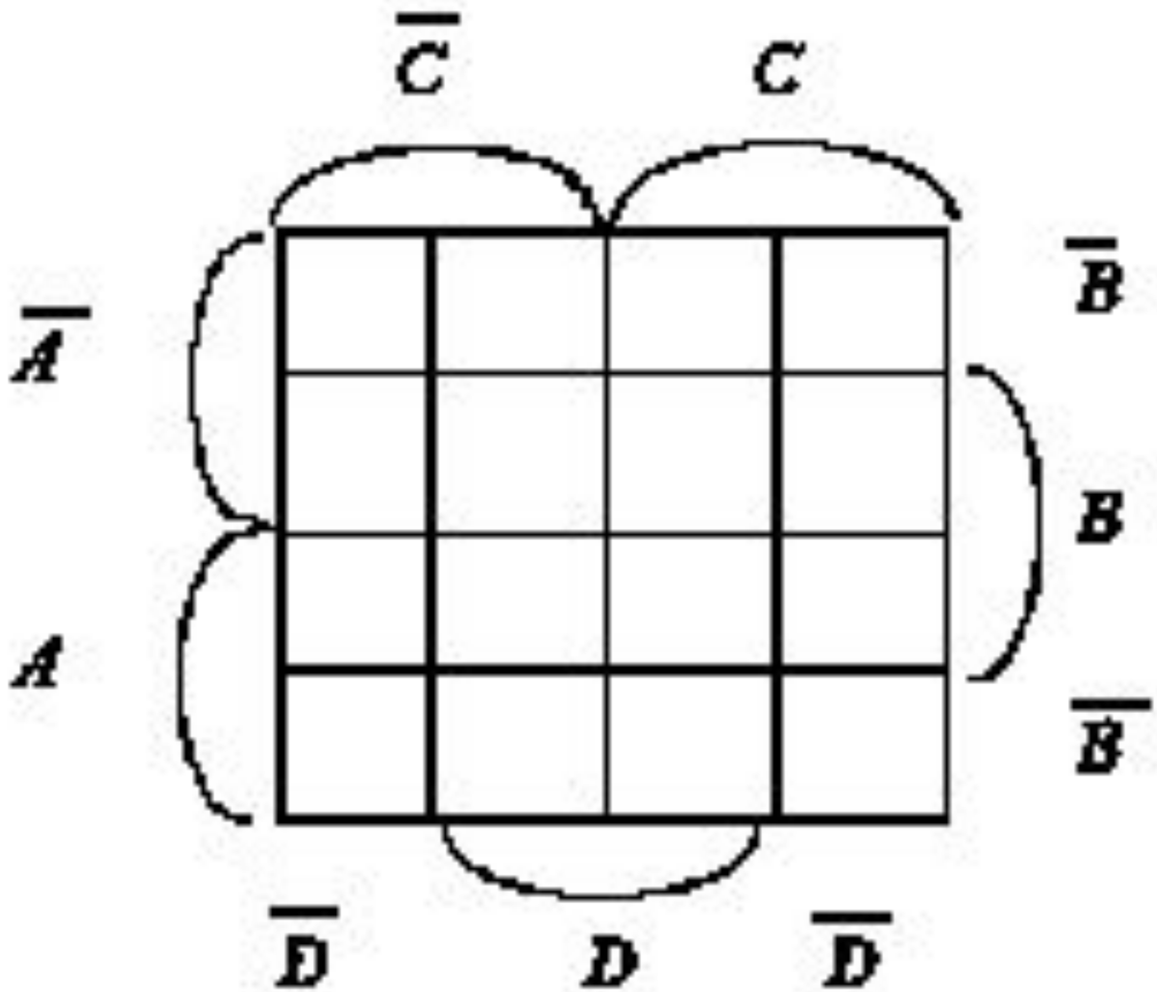
С помощью карт Карно довольно удобно упрощать булевы функции неболь-шого числа переменных (теоретически – не более шести, а практически – четырех).

Карта для задания функции, зависящей от *n* переменных, это таблица из 2^n клеток, в которых представлены значения функции для всех возможных комбинаций значений переменных

Булева функция представляется в карте Карно следующим образом. Каждая клетка, в которой проставлено значение 1, соответствует определенному конъюнктивному члену в ДНФ функции. В этот конъюнктивный член входят переменные, имеющие значение 1 в комбинации для этой клетки, и инверсии переменных, имеющих в комбинации для этой клетки значение 0

Если необходимо заполнить карту для функции, заданной некоторым булевым выражением, то сначала это выражение нужно привести к *канонической* форме, т.е. к форме, в каждом члене которой будут присутствовать все переменные, а уже затем приступить к заполнению клеток карты Карно

Карта Карно для функции 4-х переменных

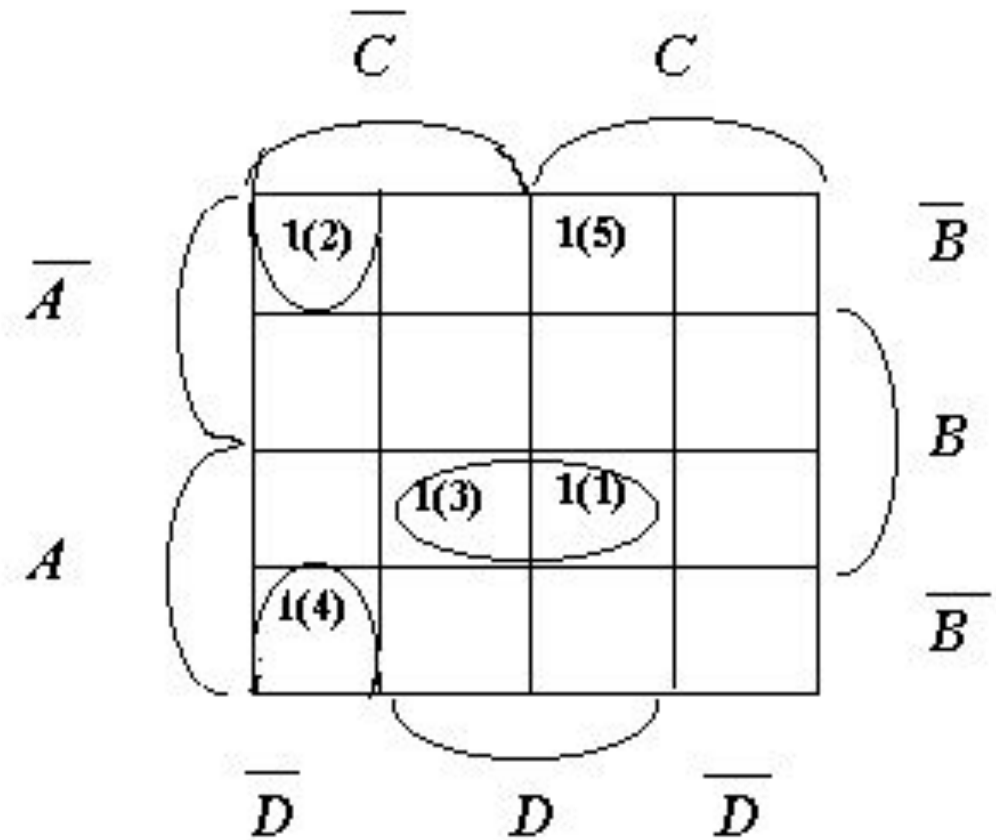


Упрощение по карте Карно

- После того как карта будет заполнена на основании таблицы истинности или аналитического выражения, можно приступить к формированию упрощенного выражения функции. Для этого нужно проанализировать расположение клеток, заполненных символами 1.
- Основной принцип состоит в следующем. В карте Карно две соседние клетки, помеченные символами 1, всегда соответствуют конъюнктивным членам ДНФ, отличающимся только одним сомножителем. Поэтому их можно слить, причем отличающийся сомножитель при слиянии поглощается
- Процесс слияния и поглощения можно расширять разными способами. Во-первых, следует учитывать, что противополож-ные края карты условны, т.е. клетки на противоположных краях можно объединять точно так же, как если они находились в средней части карты.

Пример: упростить функцию

$$F = abcd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bcd$$



Видим, что 1-й и 3-й член объединяются с поглощением *C*.

Объединяются также 2-й и 4-й с поглощением *A*. В итоге имеем:

$$F = abd + \bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bcd$$

Проверка через таблицу истинности (Слева – До упрощения, справа – После)

a	b	c	d	F			a	b	c	d	F
0	0	0	0	1			0	0	0	0	1
0	0	0	1	0			0	0	0	1	0
0	0	1	0	0			0	0	1	0	0
0	0	1	1	1			0	0	1	1	1
0	1	0	0	0			0	1	0	0	0
0	1	0	1	0			0	1	0	1	0
0	1	1	0	0			0	1	1	0	0
0	1	1	1	0			0	1	1	1	0
1	0	0	0	1			1	0	0	0	1
1	0	0	1	0			1	0	0	1	0
1	0	1	0	0			1	0	1	0	0
1	0	1	1	0			1	0	1	1	0
1	1	0	0	0			1	1	0	0	0
1	1	0	1	1			1	1	0	1	1
1	1	1	0	0			1	1	1	0	0
1	1	1	1	1			1	1	1	1	1

Индивидуальное домашнее задание № 3

- Можно приступить к выполнению третьего индивидуального задания
- Пример задания:

Вариант	**Задание 1**	**Задание 2**
	Построить таблицу истинности для следующих булевых выражений	*Минимизировать заданное булево выражение с помощью карт Карно*
1	$ABC + \overline{ABC}$	$a\bar{b}cd + ab\bar{c}d + abcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bcd$

- Как обычно следует оформить отчет и сдать!