

# Физика атома, атомного ядра и элементарных частиц

4. (0). Волновые свойства  
микрочастиц. Волны де-Бройля.

# Оптико-механическая аналогия

Геометрическая  
оптика

Теоретическая  
механика

$\lambda \Rightarrow 0$

?

Волновая  
оптика

Волновая  
(квантовая)  
механика

# Оптико-механическая аналогия

Геометрическая  
оптика

Принцип наименьшего  
времени Ферма  
(Fermat P.)

$$\int_A^B \frac{ds}{v} = \min$$

Теоретическая  
механика

Принцип наименьшего  
действия Мопертюи  
(Maupertuis P.)

$$\int_A^B p ds = \min$$

Между этими двумя принципами имеется аналогия,  
если предположить, что

$$p \propto \frac{1}{v}$$

где  $v$  - фазовая скорость волны.

# Гипотеза де-Бройля

Де-Бройль (de Broglie L.) предположил, что коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей импульс и фазовую скорость, такой же, как и для фотона, т.е. равен  $h\nu$  :

$$p = \frac{h\nu}{v} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

где  $\nu$  - линейная частота.

Это же соотношение можно записать в виде

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \tag{4.1}$$

где  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число, равное числу длин волн, укладывающихся на отрезок  $2\pi$ .

Далее, движение материальной частицы характеризуется четырехмерным вектором энергии-импульса  $\{iE/c, p_x, p_y, p_z\}$ , а плоская волна - совокупностью четырех величин  $\{i\omega/c, k_x, k_y, k_z\}$ , которые также образуют четырехвектор. Поэтому коэффициент пропорциональности между энергией и частотой, согласно гипотезе де-Бройля, также должен быть таким же, как в оптике:

$$E = \hbar \omega \quad (4.2)$$

где  $\omega$  - циклическая частота, связанная с линейной частотой соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ .

Формулы (4.1) и (4.2) иногда называют уравнениями де Бройля.

# Волны де-Бройля

Итак, согласно гипотезе де-Бройля (1924г), микро-частицы обладают волновыми свойствами. Длина волны микрочастицы (электрона, протона, нейтрона, альфа-частицы и др.) называется *дебройлевской длиной волны* и определяется формулой де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (4.3)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $p$  – импульс частицы.

Плоская волна с амплитудой  $A$ , частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  может быть представлена в комплексной форме в виде функции

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.4)$$

Фазовой скоростью волны называется скорость, с которой движутся точки волны с постоянной фазой. Если ось  $x$  направлена по вектору  $\mathbf{p}$ , то условие постоянства фазы

$$Et - px = \text{const.} \quad (4.5)$$

Чтобы вычислить фазовую скорость, надо продифференцировать это уравнение по времени.

Продифференцируем (4.5) по времени:

$$E - p \frac{dx}{dt} = 0$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v_{\phi} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} = c \frac{c}{v} \quad (4.6)$$

где  $v$  - скорость частицы, которая определяется групповой скоростью волн де-Бройля:

$$\begin{aligned} v_{\Gamma} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d\left(c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}\right)}{dp} = \\ &= \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 mv}{mc^2} = v \end{aligned} \quad (4.7)$$



Из формулы (4.6) следует, что фазовая скорость волн де-Бройля всегда больше скорости света (т.к. скорость частицы  $v$  всегда меньше скорости света). Это, однако, не противоречит теории относительности, т.к. фазовая скорость не характеризует ни скорость перемещения массы, ни скорость перемещения энергии.

Сравнивая (4.6) и (4.7), приходим к важному и универсальному соотношению между фазовой скоростью волн де-Бройля и скоростью частицы:

$$v_{\phi} \cdot v_{\Gamma} = c^2 \quad (4.8)$$

# Гипотеза де-Бройля и правило квантования Бора

Пользуясь понятием дебройлевской длины волны, можно дать наглядное истолкование правилу квантования круговых орбит. Электрон обладает волновыми свойствами. Чтобы энергия волнового движения не распространялась в другие области (т.е. чтобы электрон при движении вокруг ядра не излучал энергию), волна должна быть стоячей.

На круговой орбите стоячая волна возникает, если на этой орбите уложится целое число длин волн де-Бройля:

$n\lambda = 2\pi r$ . Отсюда, учитывая, что

$$\lambda = h/mv,$$

находим:

$$L = mvr = nh/2\pi = n\hbar,$$

т.е. правило квантования.

Таким образом, 1-ый постулат Бора – логическое следствие волновой природы электрона.

# Интернет-экзамен

Длина волны де Бройля частицы уменьшилась вдвое. Скорость этой частицы ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) не изменилась
- 2) уменьшилась в 4 раза
- 3) увеличилась в 4 раза
- 4) уменьшилась вдвое
- 5) увеличилась вдвое

# Интернет-экзамен

## Задание N 26.

Если частицы имеют одинаковую длину волны де Бройля, то наименьшей скоростью обладает ...

## Варианты ответа:

- протон
- позитрон
- $\alpha$ -частица
- нейтрон

# Интернет-экзамен

Задание N 6

Если протон и  $\alpha$  - частица двигаются с одинаковыми скоростями, то отношения их длин волн де Бройля  $\lambda_p / \lambda_\alpha$  равно ...

Варианты о

- 4
- 1
- 2
- 1/2

# Интернет-экзамен

## Задание N 5

Если частицы имеют одинаковую скорость, то наибольшей длиной волны де Бройля обладает ...

## Варианты ответов

- протон
- нейтрон
- электрон
- $\alpha$ -частица