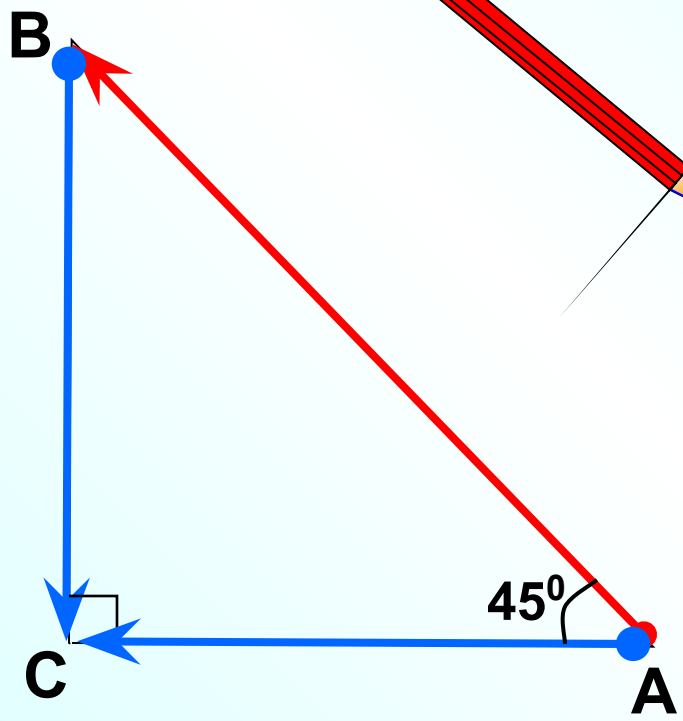


Савченко Е.М., учитель математики,  
МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.

# Сложение и вычитание векторов

*Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"*

Какая запись является верной?



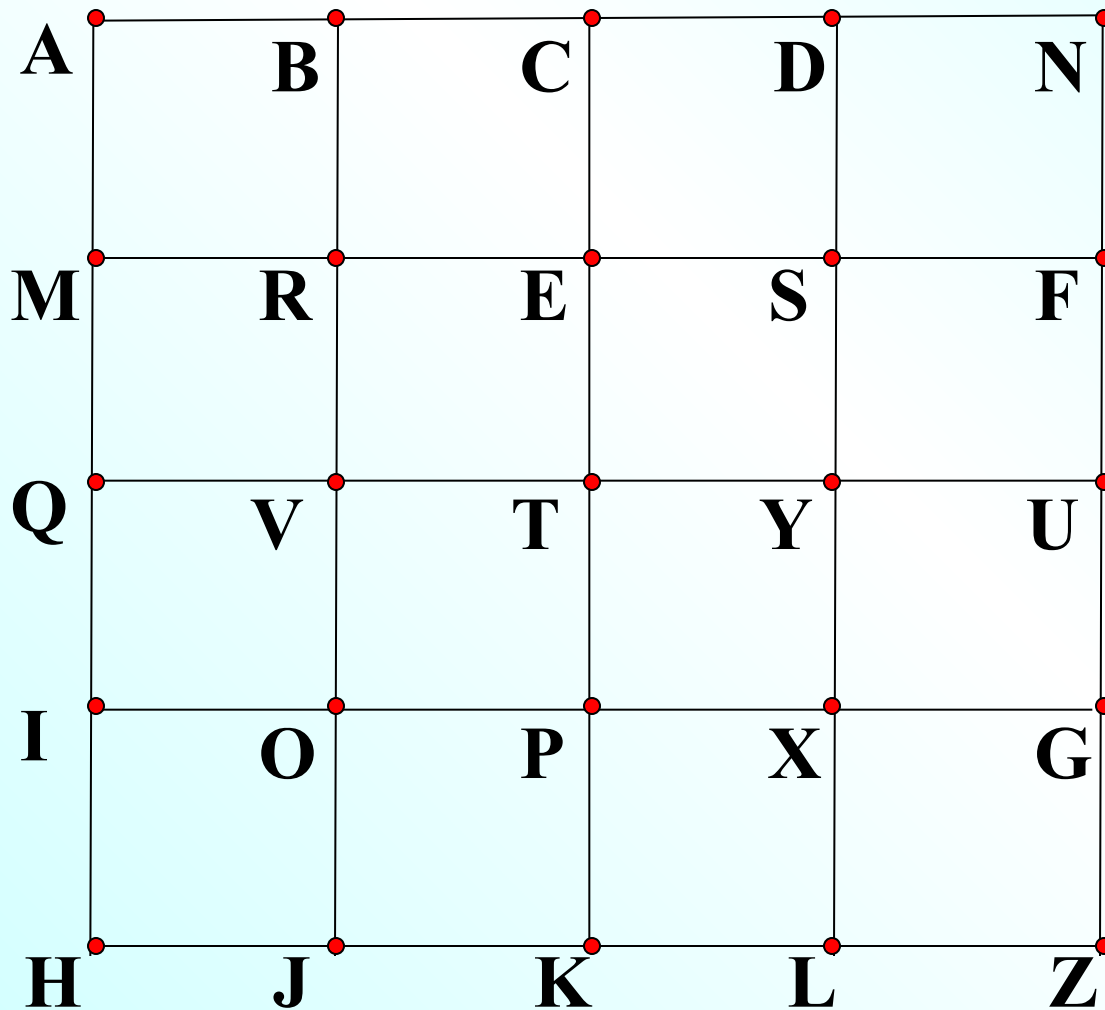
~~$\vec{AB} > \vec{BC};$~~

~~$|\vec{AB}| > |\vec{BC}|$~~

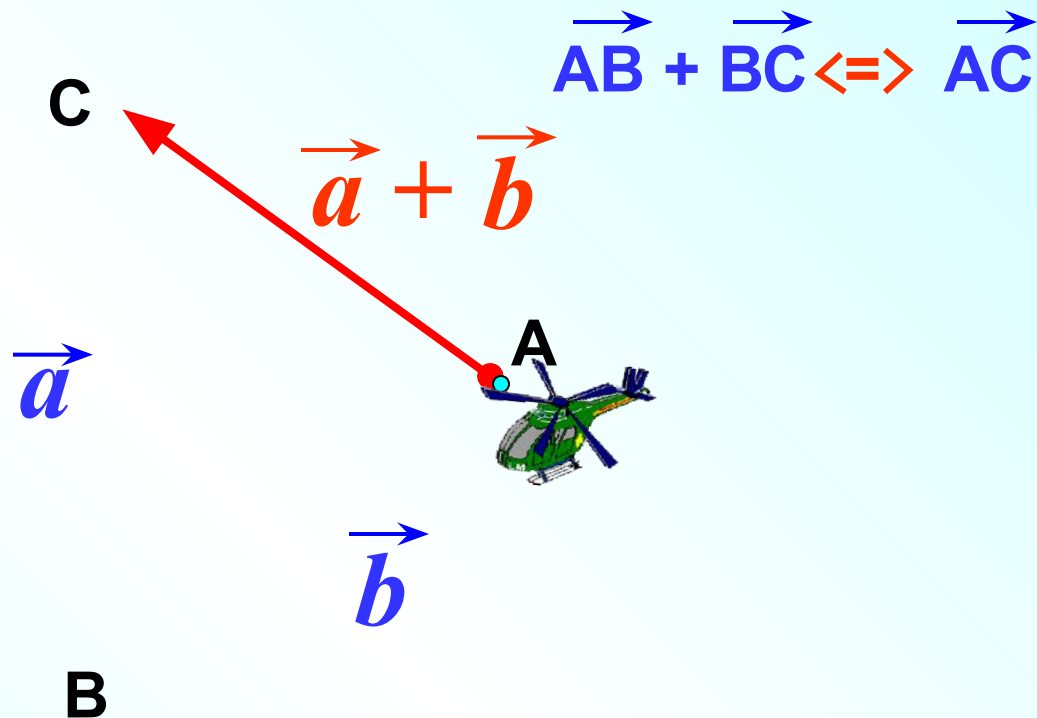
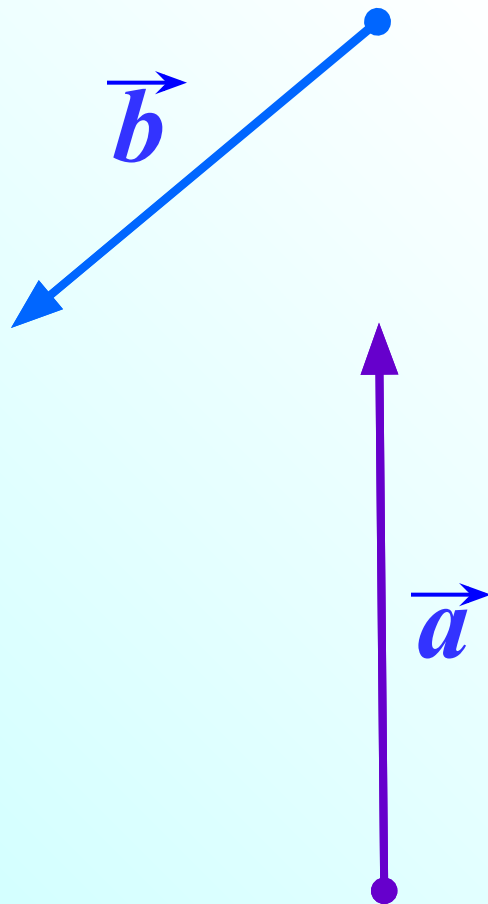
~~$|\vec{AC}| = |\vec{BC}|;$~~

~~$\vec{AC} = \vec{BC}$~~

Назовите **равные** векторы



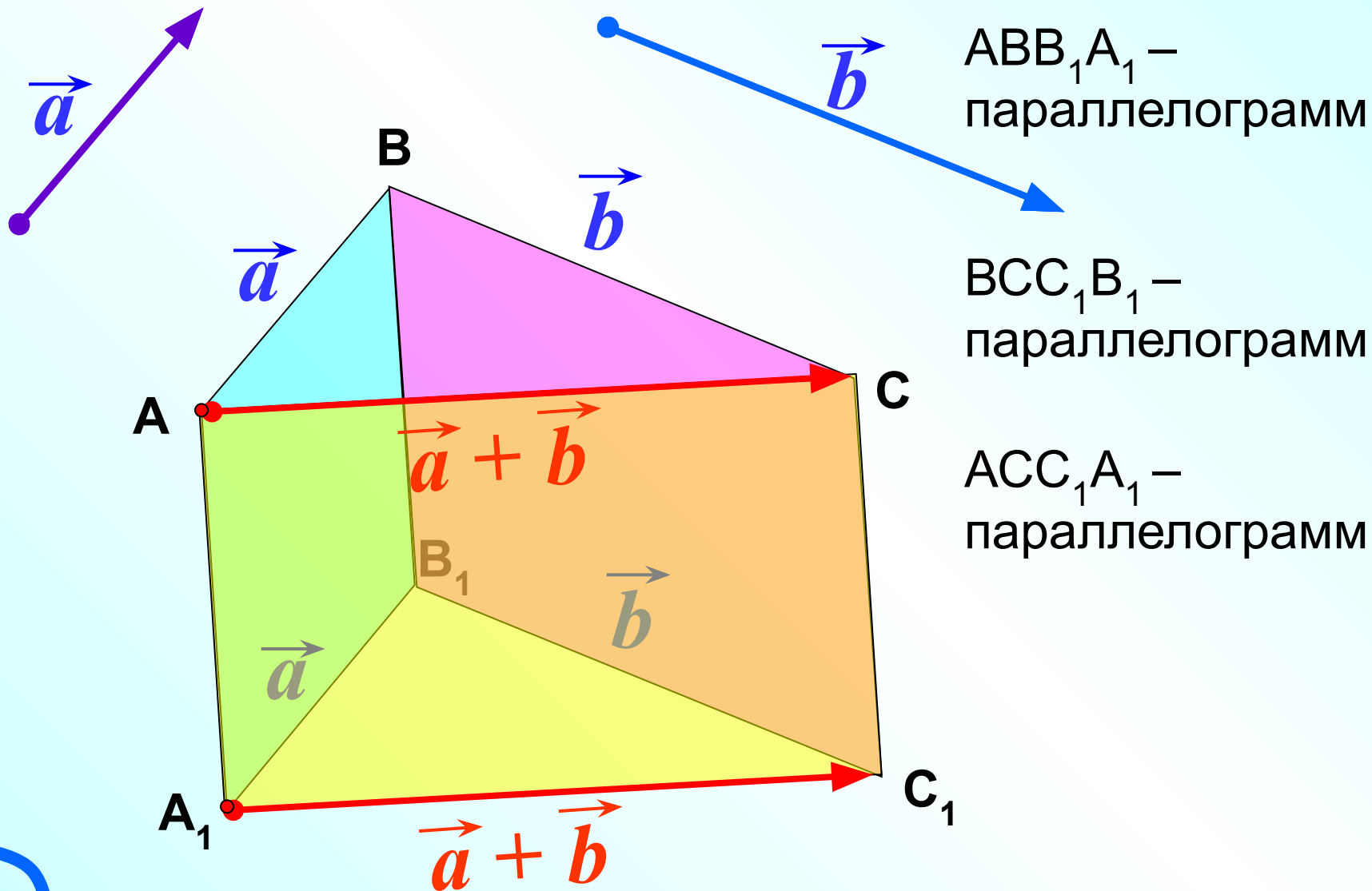
# Сложение векторов. Правило треугольника.



Для любого нулевого вектора справедливо равенство

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Докажем, что если при сложении векторов точку  $A$  заменить другой точкой  $A_1$ , то полученный вектор  $\vec{A_1C_1}$  будет равен  $\vec{AC}$ . Рассмотрим случай.



## Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Rightarrow \vec{AC}$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} = \vec{AP}$$

$$\vec{MN} + \vec{NR} = \vec{MR}$$

$$\vec{MK} + \vec{KM} \Rightarrow \vec{MM} = \vec{0}$$

$$\vec{MK} + \vec{OM} \Rightarrow \vec{OM} + \vec{MK} = \vec{OK}$$



## Правило треугольника.

$$\vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC}$$

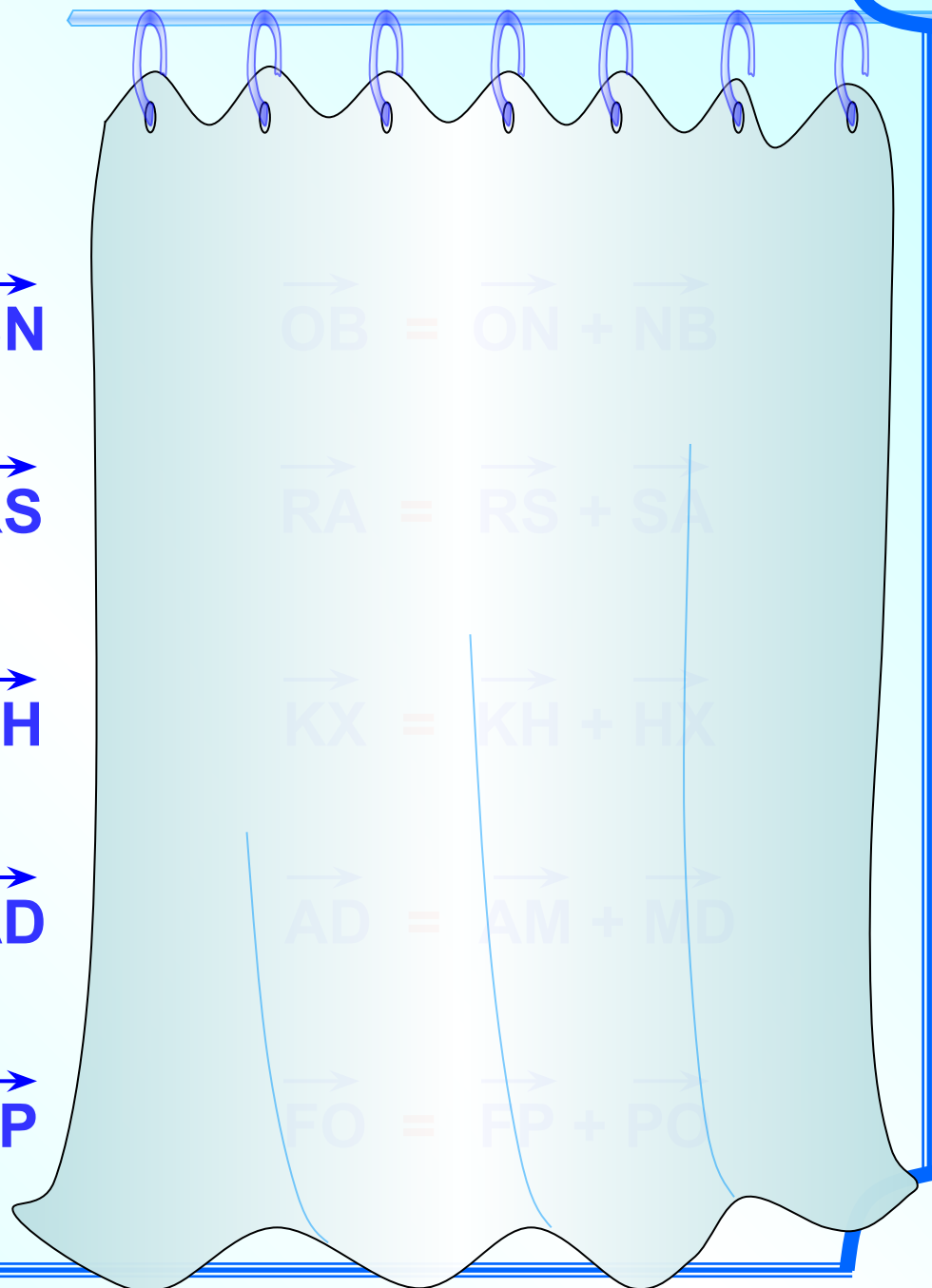
$$\text{из } \triangle OBN \quad \vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN}$$

$$\text{из } \triangle ASR \quad \vec{AS} = \vec{AR} + \vec{RS}$$

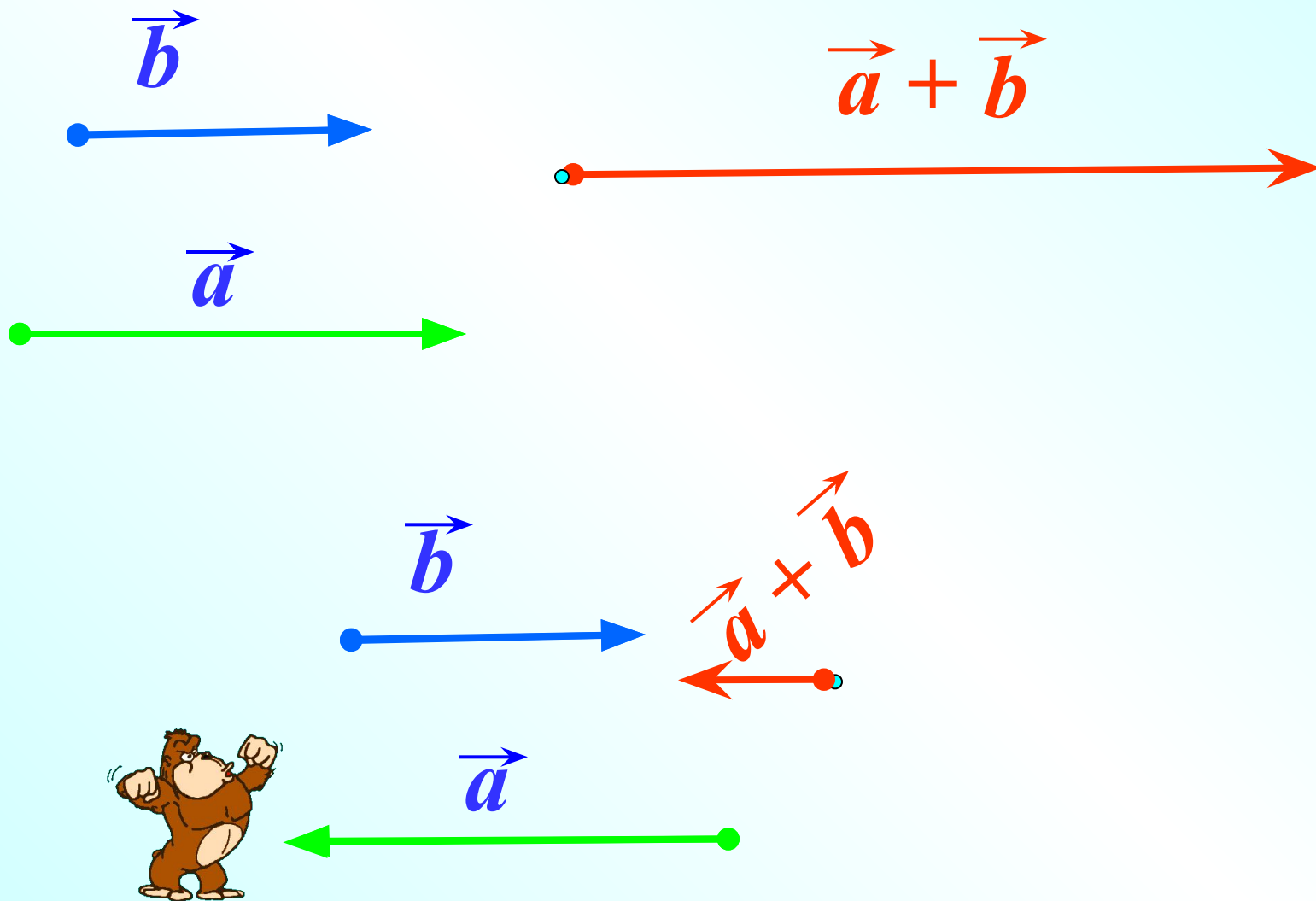
$$\text{из } \triangle XKH \quad \vec{XH} = \vec{XK} + \vec{KH}$$

$$\text{из } \triangle AMD \quad \vec{MD} = \vec{MA} + \vec{AD}$$

$$\text{из } \triangle FPO \quad \vec{OP} = \vec{OF} + \vec{FP}$$



По правилу треугольника складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении треугольника и не получается







$\vec{b}$



$\vec{a} + \vec{b}$



$\vec{a}$



$\vec{f}$



$\vec{c} + \vec{f}$



$\vec{c}$



# Законы сложения векторов

## Теорема

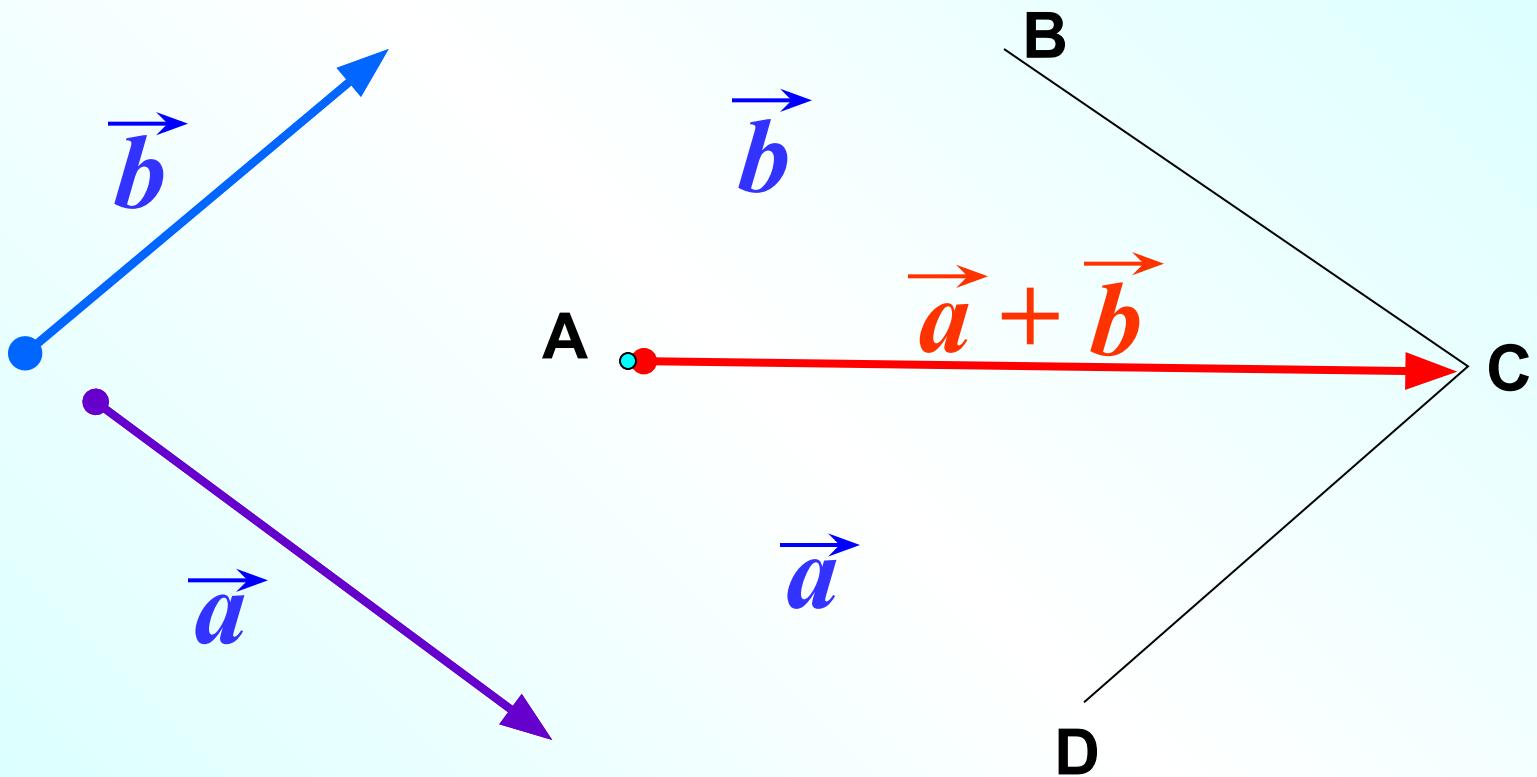
Для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  справедливы равенства:

1  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  *переместительный закон* !

2  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  *сочетательный закон* !

Докажем свойство ①

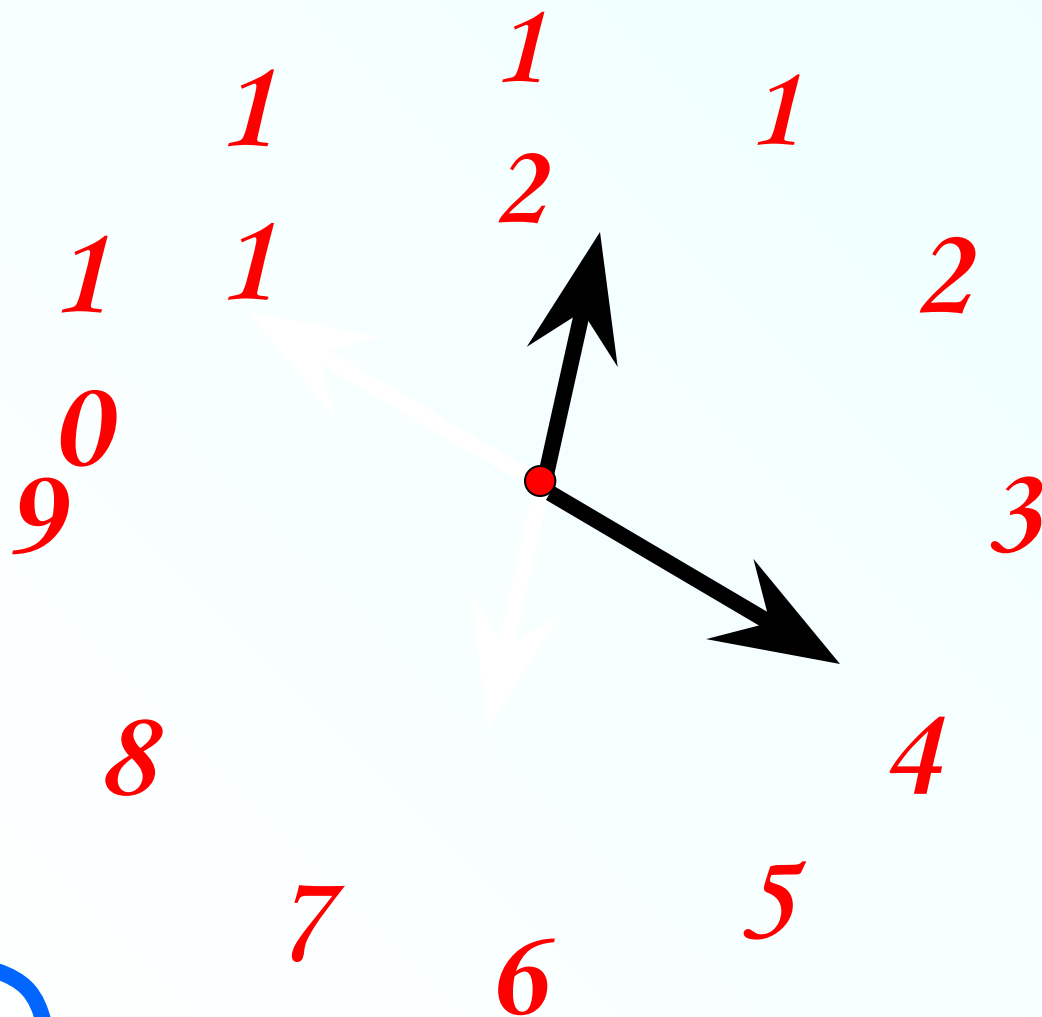
Рассмотрим случай, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны.



$$\text{из } \triangle ABC \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{a}$$

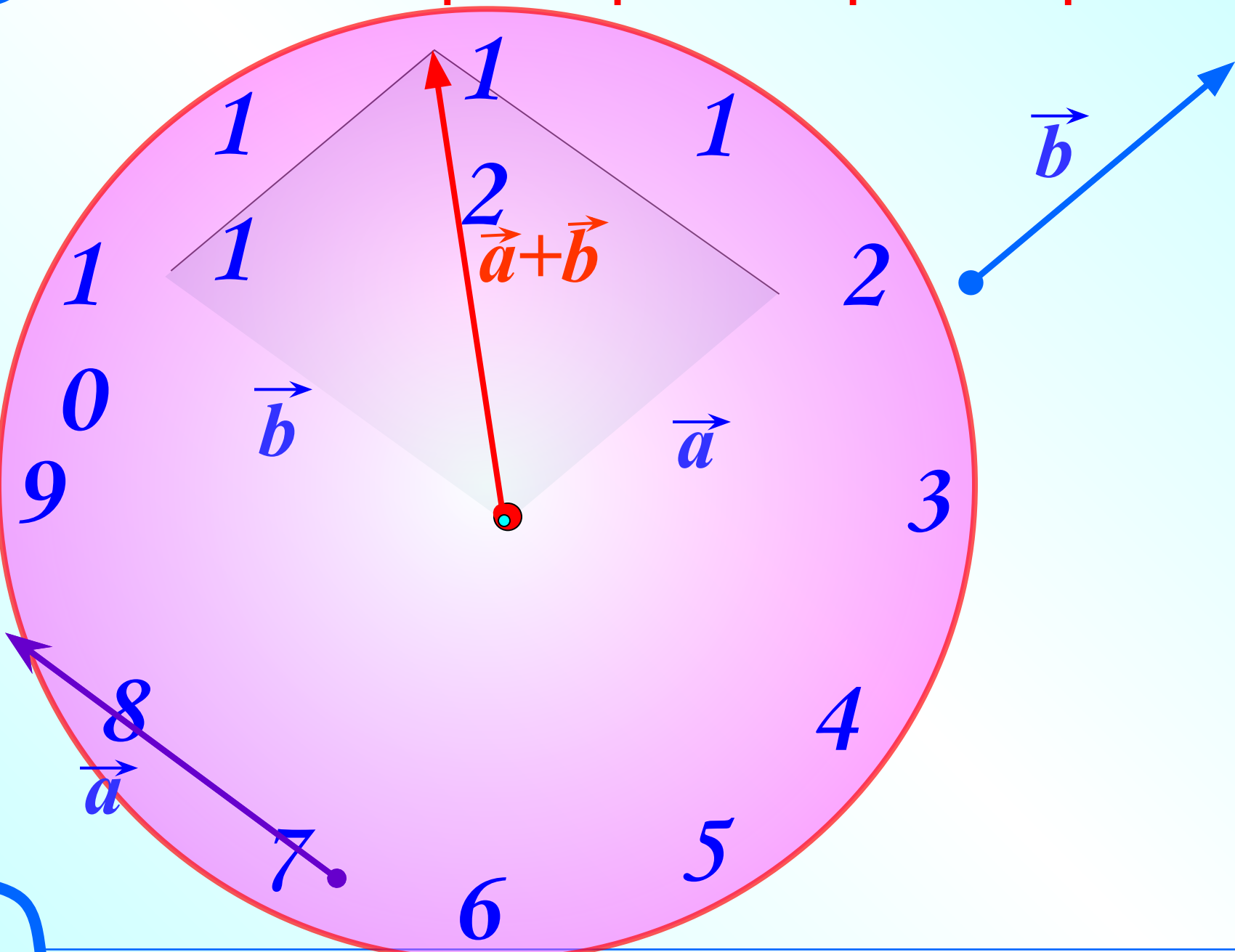
$$\text{из } \triangle ADC \quad \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{a} + \vec{b}$$

При доказательстве свойства  $1^0$  мы обосновали правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов.

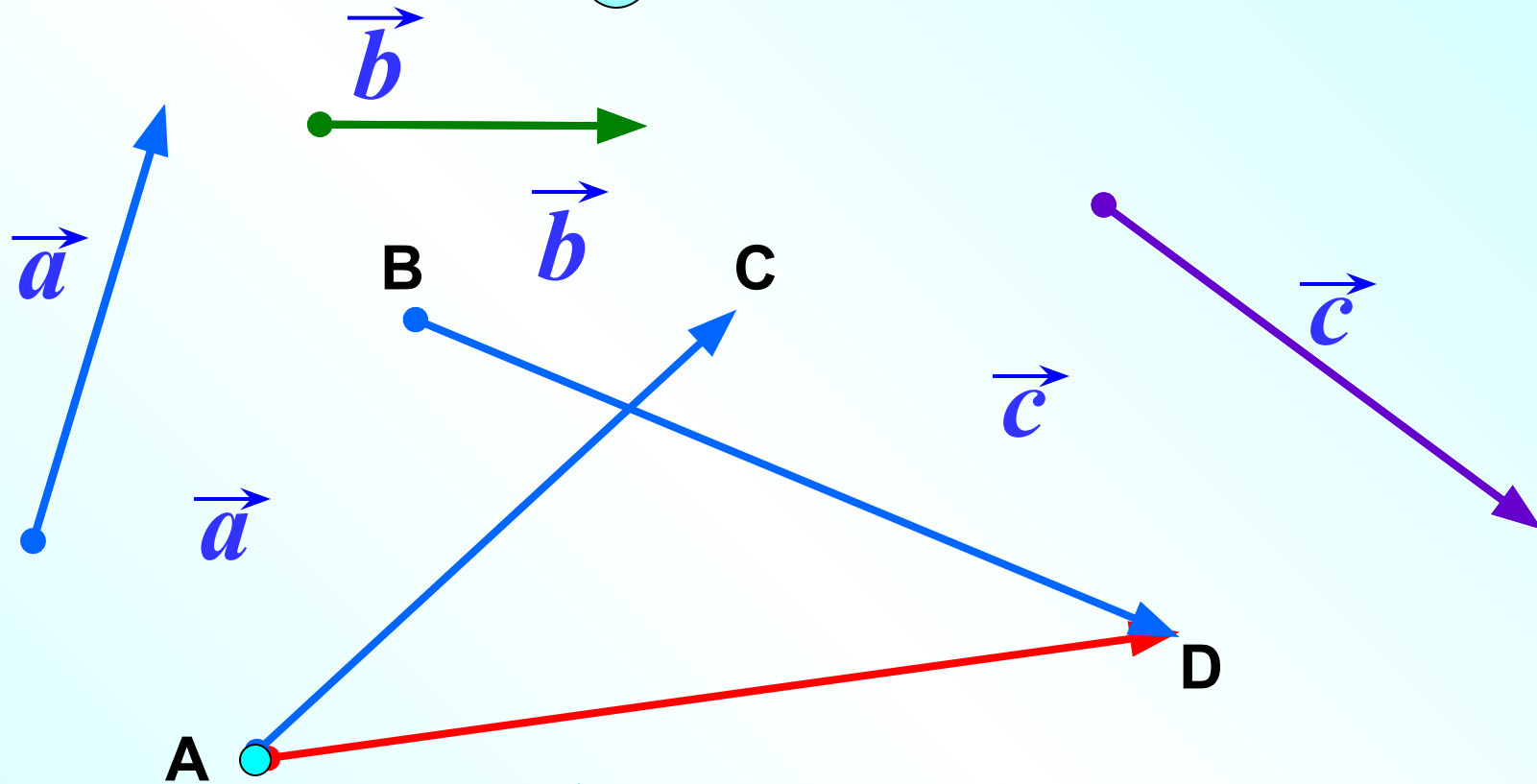


Чтобы применить правило параллелограмма, надо отложить векторы от одной точки, как стрелки часов.

# Сложение векторов. Правило параллелограмма.



Докажем свойство **2**

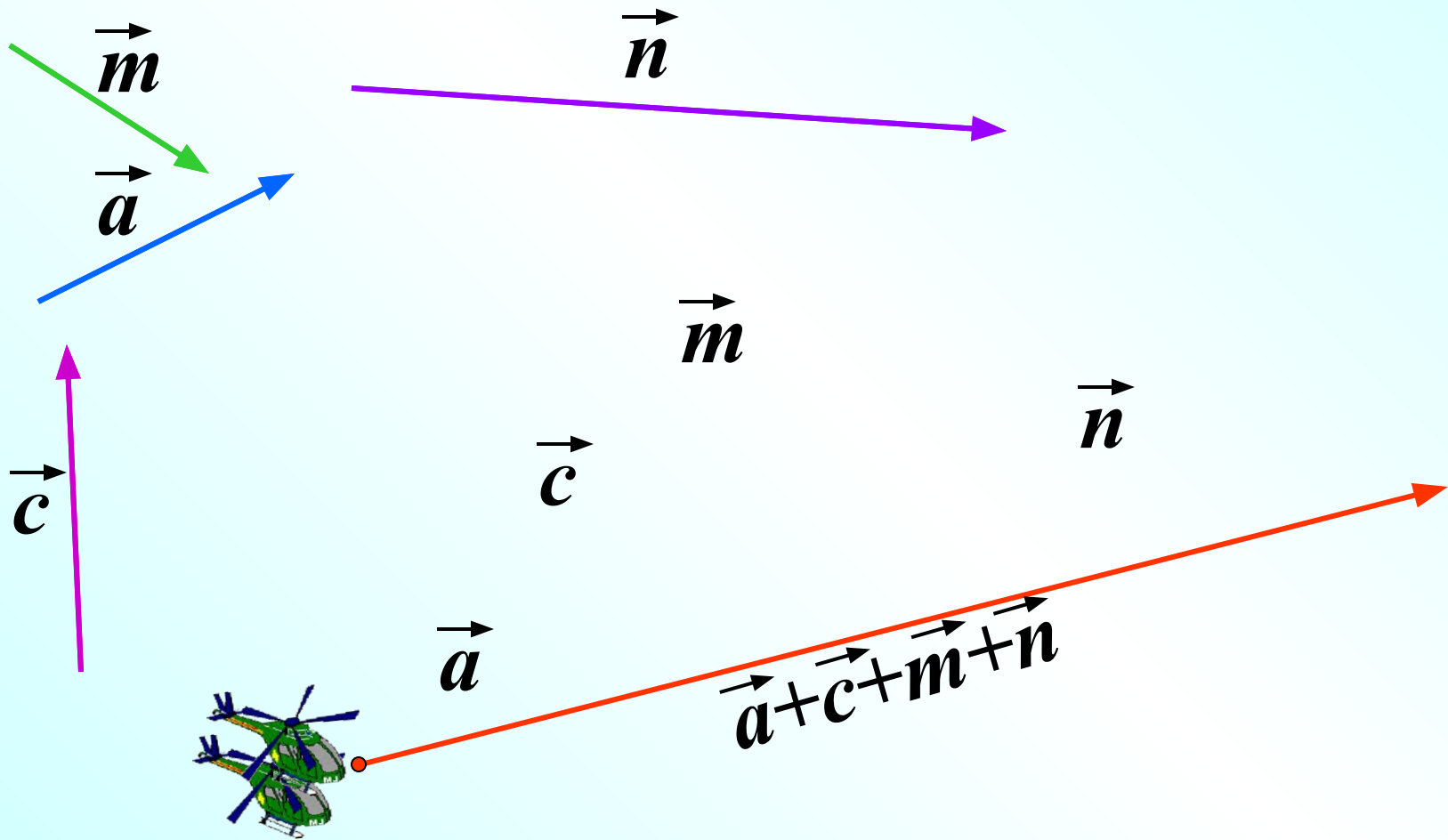


$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

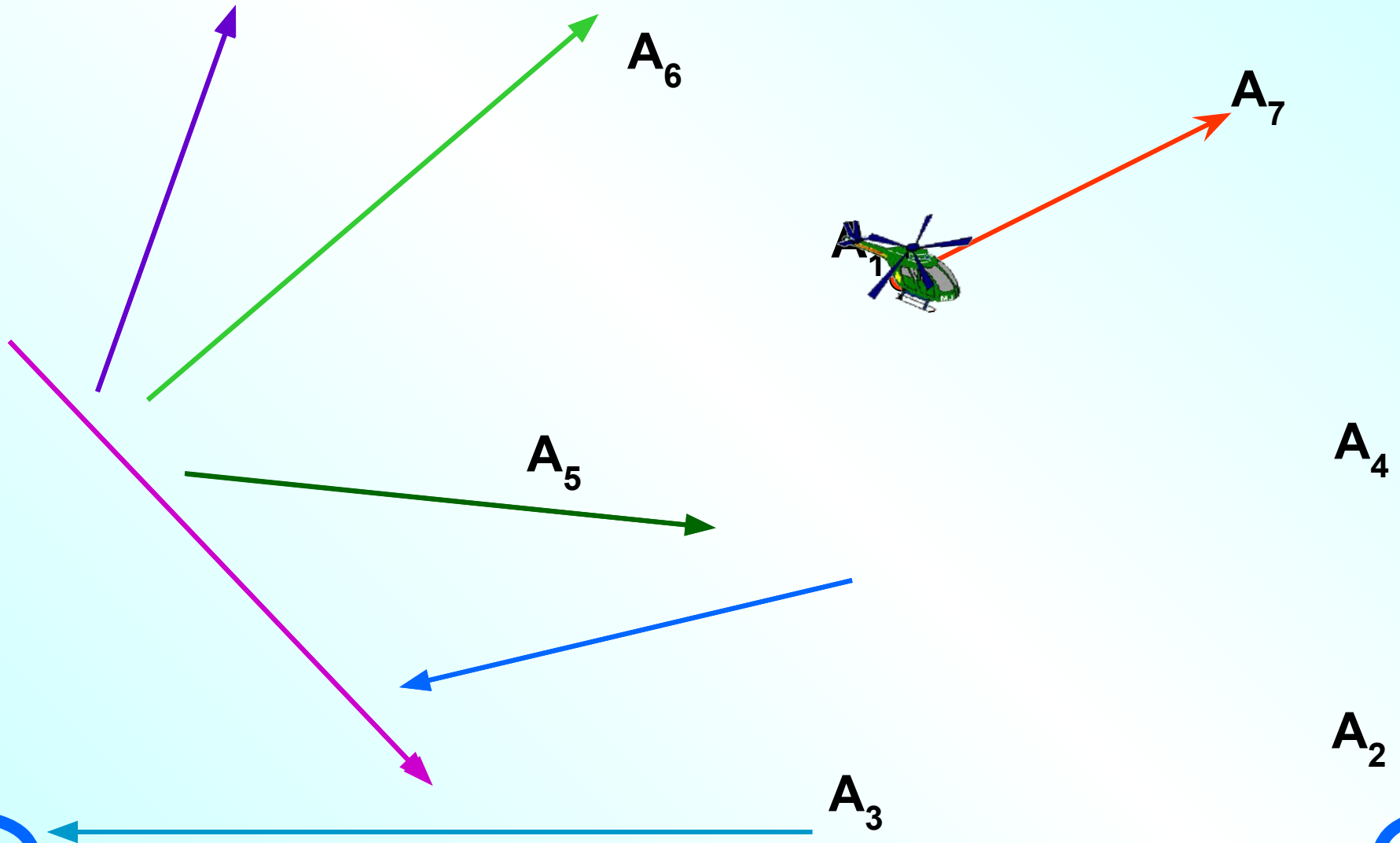
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

# Сложение векторов. Правило многоугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – произвольные точки плоскости, то  $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$



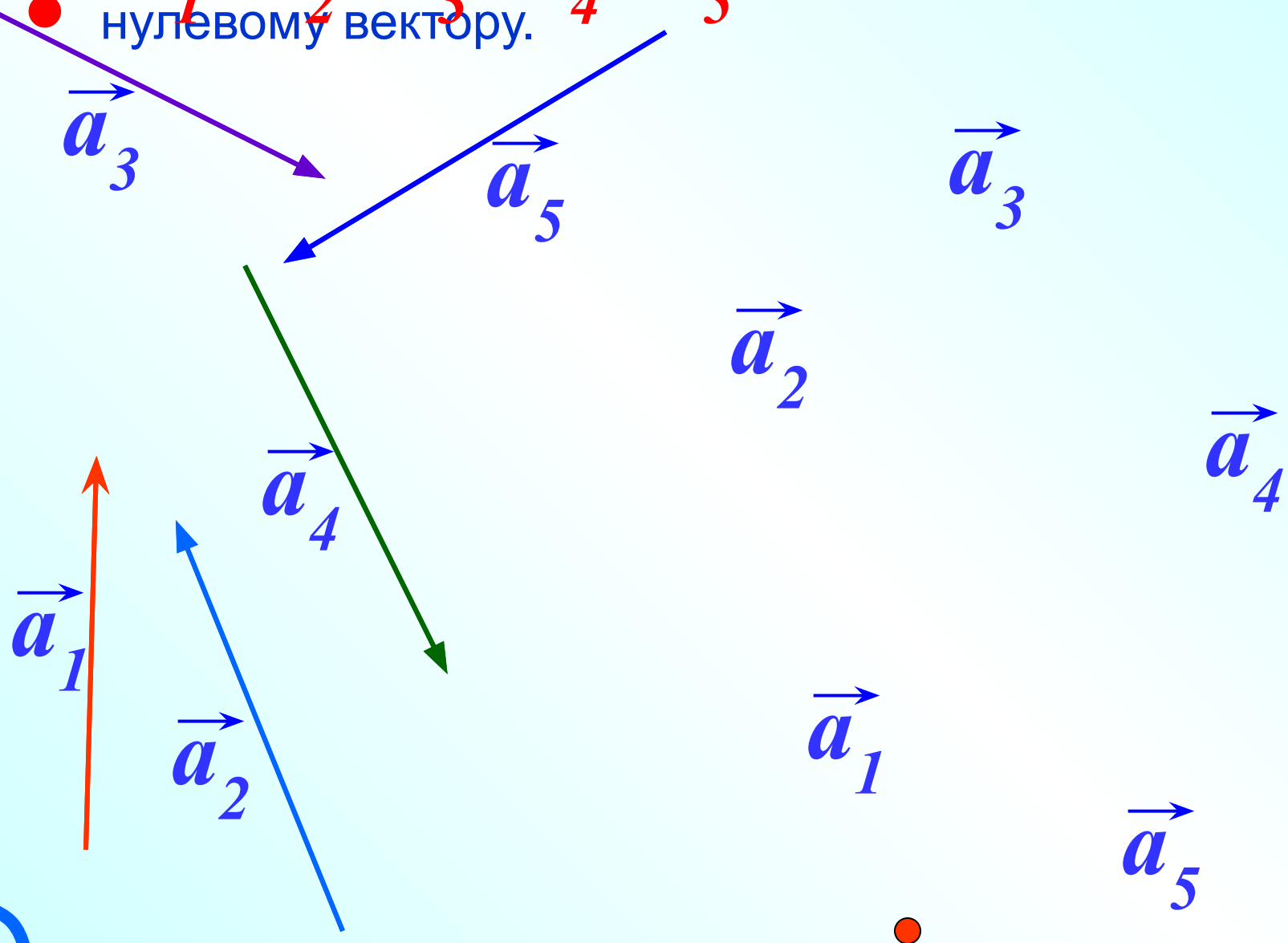




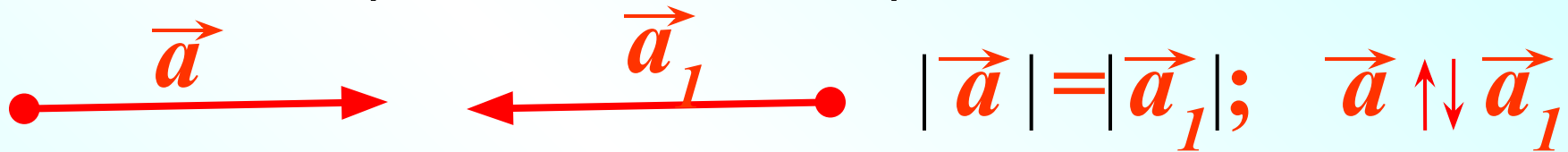
Если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$

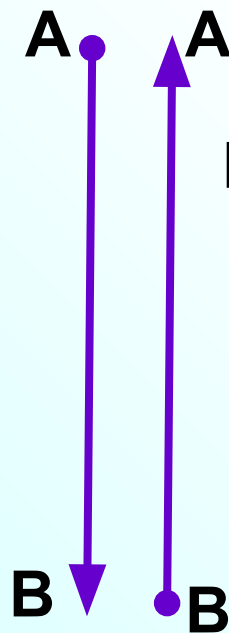
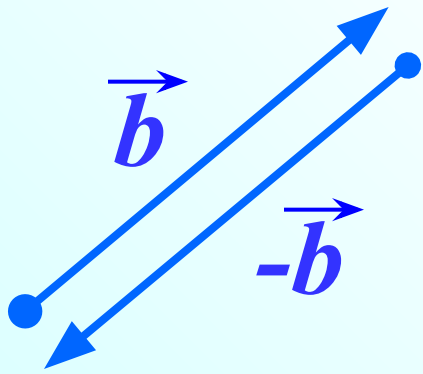
$$= \vec{0}$$



Вектор  $\vec{a}_1$  называется **противоположным** вектору  $\vec{a}$ , если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{a}_1$  имеют равные длины и противоположно направлены.



Вектор  $-\vec{b}$ , противоположный вектору  $\vec{b}$

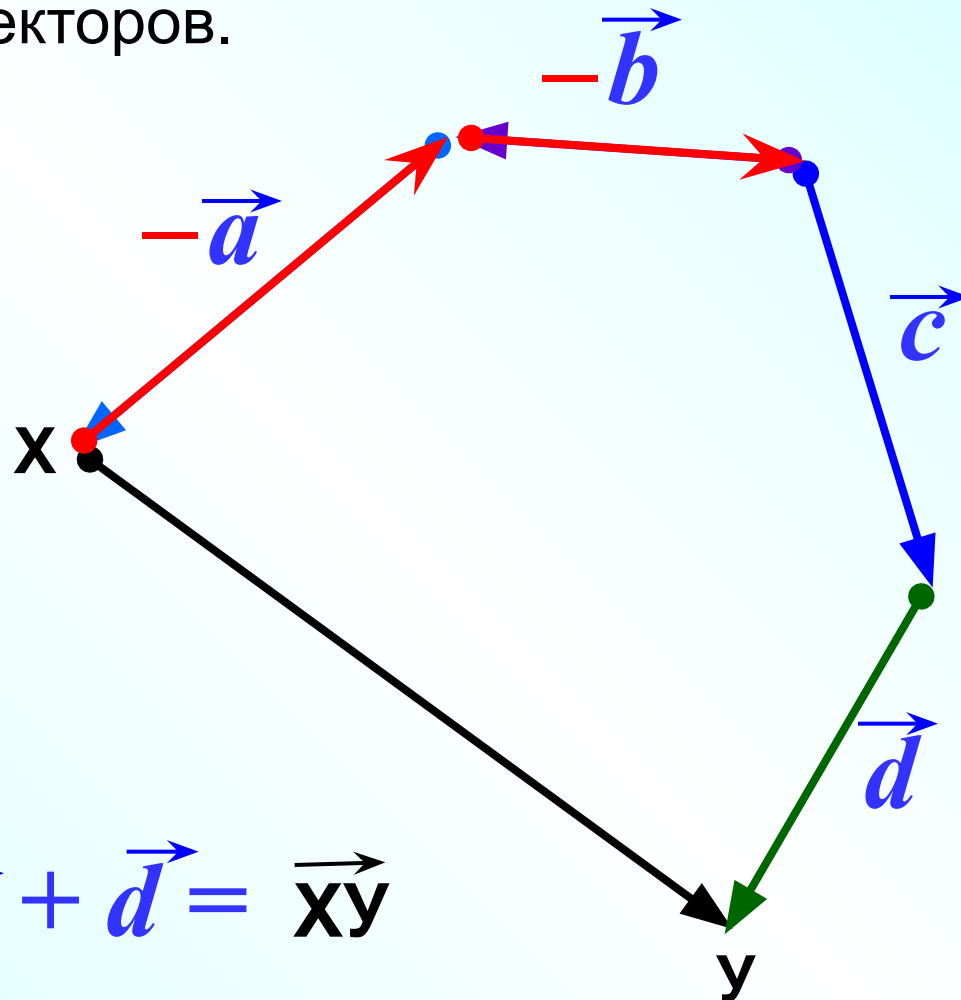


Вектор  $\vec{BA}$ , противоположный вектору  $\vec{AB}$

$$\vec{BA} = -\vec{AB}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

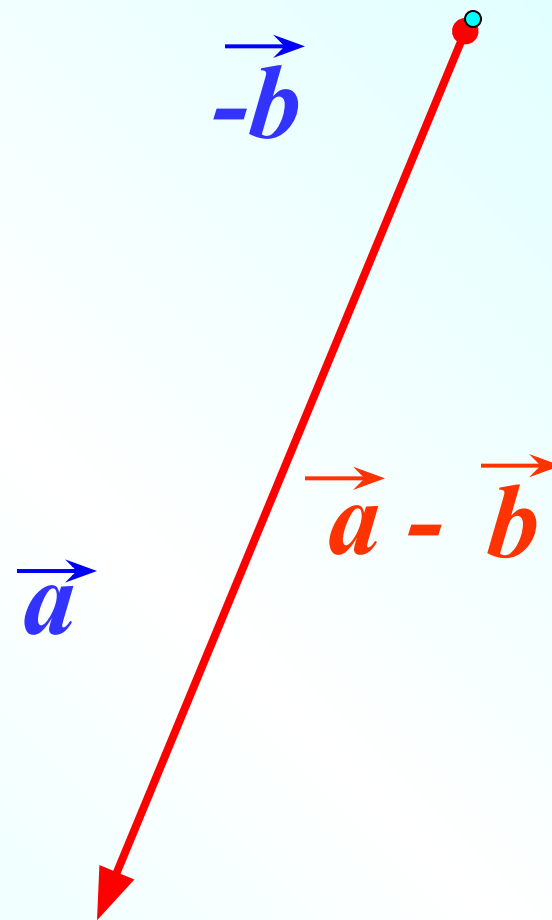
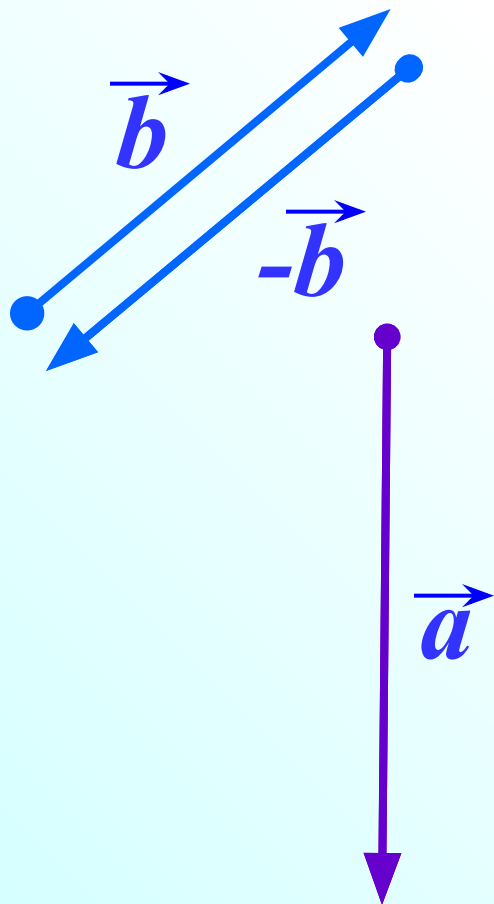
**№ 766** На рисунке изображены векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$   $\vec{XY}$ . Представьте вектор  $\vec{XY}$  в виде суммы остальных или их противоположных векторов.



$$-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{XY}$$

Вычитание векторов.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

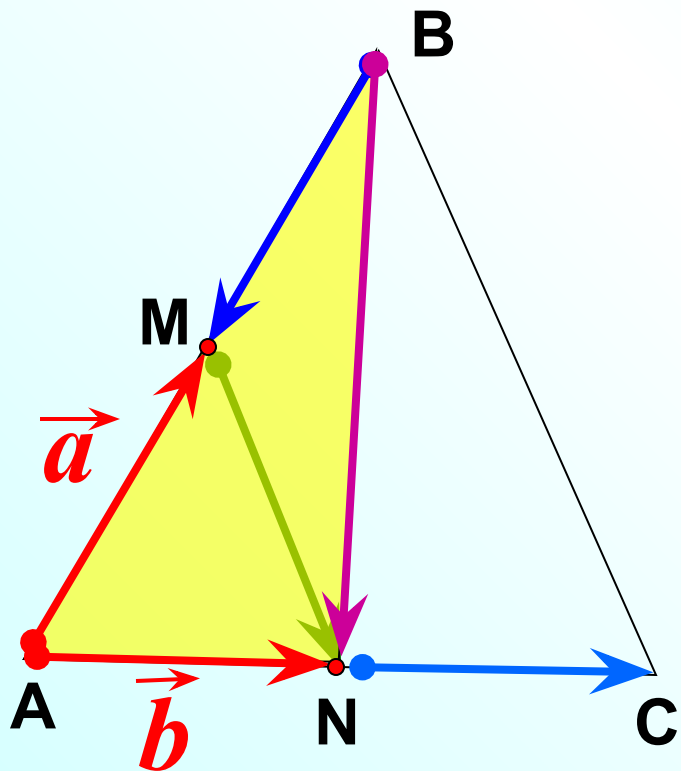


## Вычитание векторов.

$$\vec{MF} - \vec{SF} = \vec{MF} + \vec{FS} = \vec{MS}$$

$$\vec{RO} - \vec{RM} = \vec{RO} + \vec{MR} = \vec{MR} + \vec{RO} = \vec{MO}$$

**№ 768** Точки М и N – середины сторон АВ и АС  
треугольника ABC. Выразите векторы  $\vec{BM}$ ,  $\vec{NC}$ ,  $\vec{MN}$ ,  $\vec{BN}$   
через векторы  $\vec{a} = \vec{AM}$  и  $\vec{b} = \vec{AN}$



$$\vec{BM} = -\vec{a}$$

$$\vec{NC} = \vec{b}$$

*из  $\Delta AMN$*

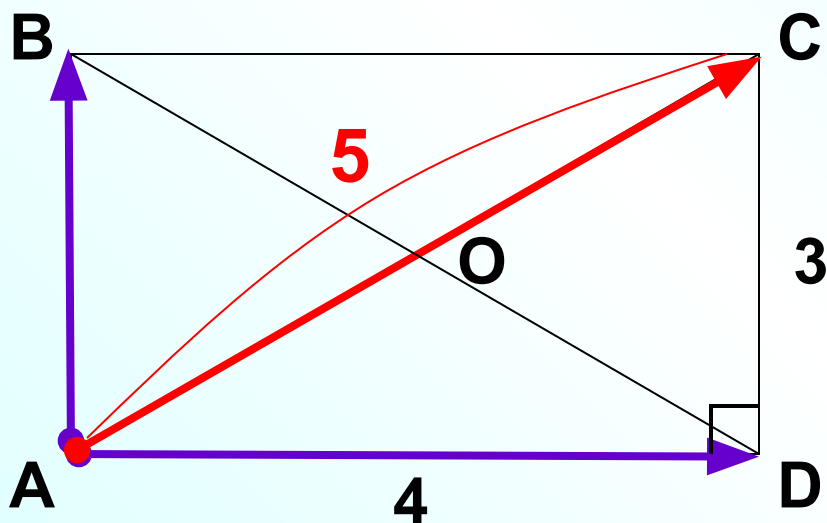
$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$$

*из  $\Delta ABN$*

$$\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}$$

Найдите  $|\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} - \vec{OD}|$

ABCD - прямоугольник



$$\left( \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} - \vec{OD} \right) = \vec{AC} - \vec{DC} - \vec{OD} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$

$$|\vec{AO}| = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} =$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} =$$

$$\vec{MN} + \vec{NR} =$$

$$\vec{MK} + \vec{KM} =$$

$$\vec{MK} + \vec{OM} =$$

$$u_3 \Delta OBN \quad \vec{ON} =$$

$$u_3 \Delta ASR \quad \vec{AS} =$$

$$u_3 \Delta XKH \quad \vec{XH} =$$

$$u_3 \Delta AMD \quad \vec{MD} =$$

$$u_3 \Delta FPO \quad \vec{OP} =$$

$$\vec{AS} + \vec{SC} =$$

$$\vec{NM} + \vec{ML} =$$

$$\vec{RP} + \vec{PR} =$$

$$\vec{ZK} + \vec{KZ} =$$

$$\vec{DE} + \vec{KD} =$$

$$u_3 \Delta OBN \quad \vec{OB} =$$

$$u_3 \Delta ASR \quad \vec{RA} =$$

$$u_3 \Delta XKH \quad \vec{KX} =$$

$$u_3 \Delta AMD \quad \vec{AD} =$$

$$u_3 \Delta FPO \quad \vec{FO} =$$