Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Сложение и вычитание векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"

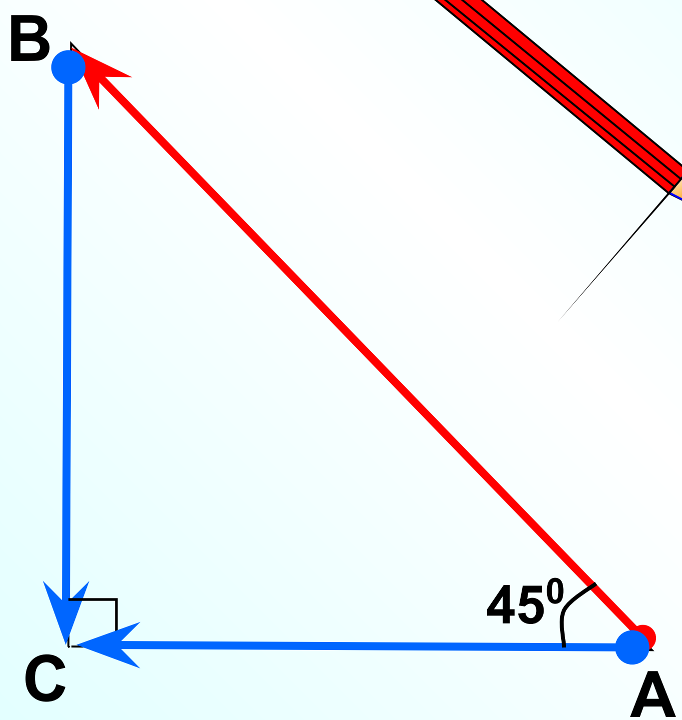
Какая запись является верной?

$\cancel{\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{BC}};$

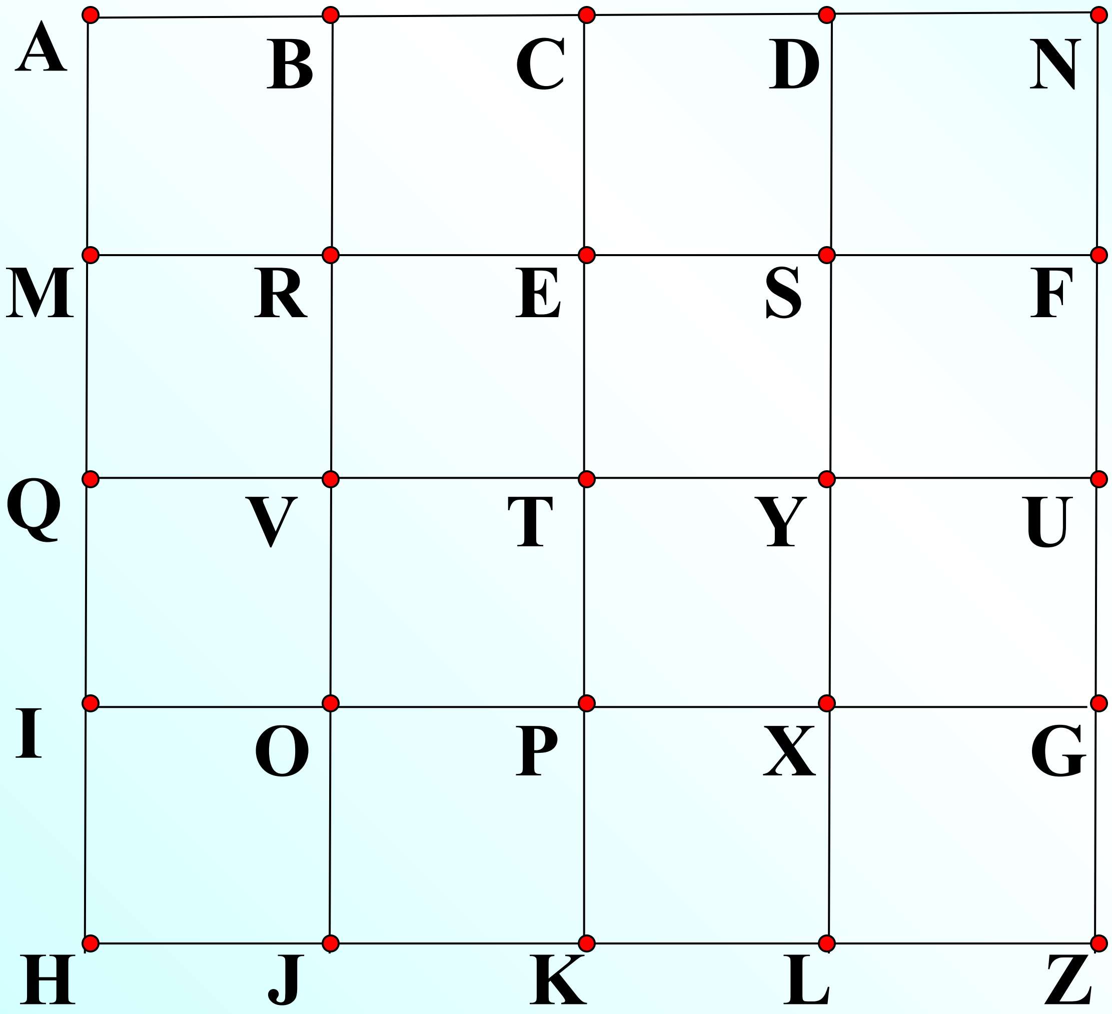
$|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{BC}|$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|;$

$\cancel{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}}$

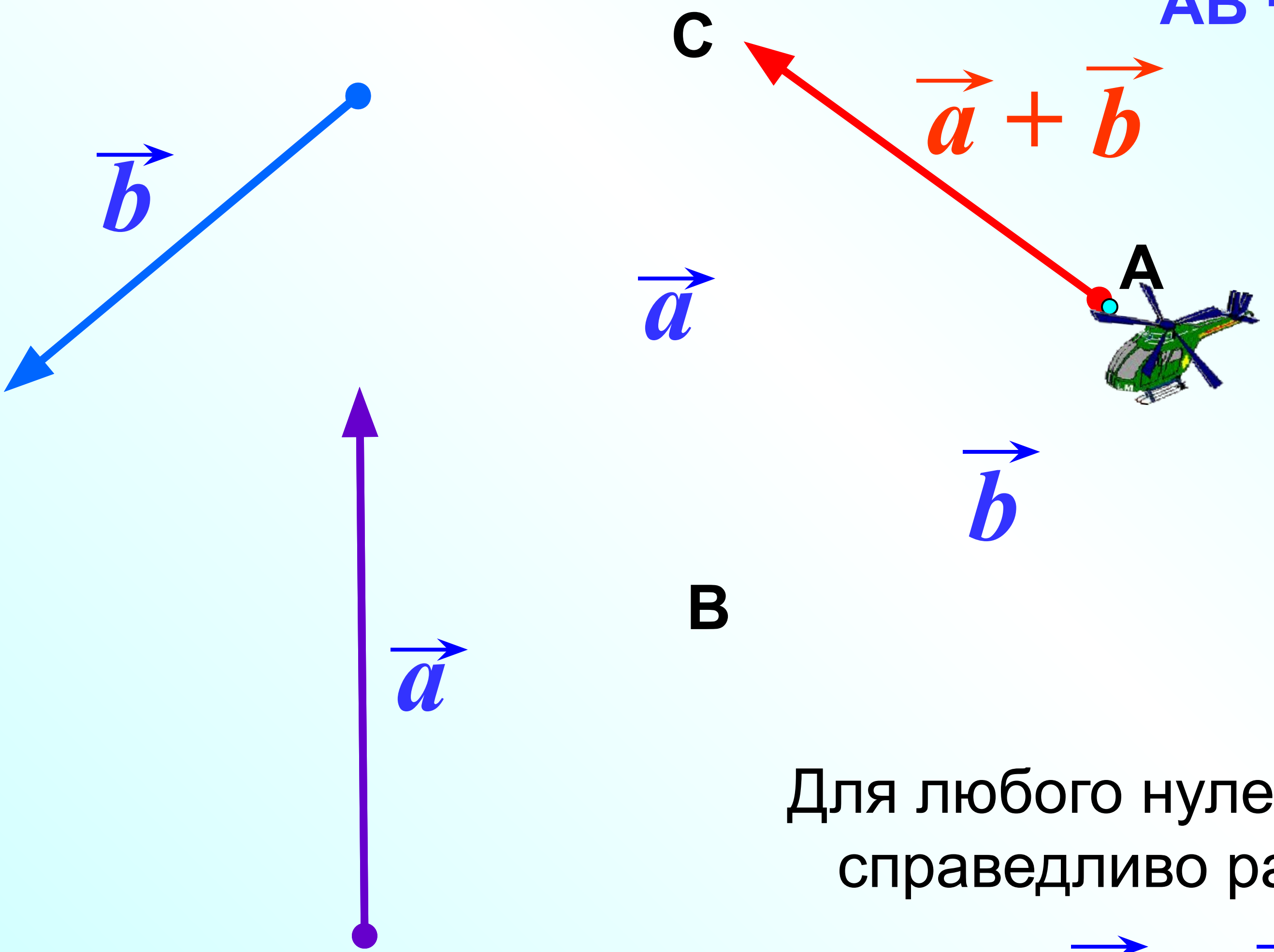


Назовите **равные** векторы



Сложение векторов. Правило треугольника.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$!



Для любого нулевого вектора справедливо равенство

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$!

Докажем, что если при сложении векторов точку А заменить другой точкой A_1, то полученный вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$ будет равен $\overrightarrow{AC}$. Рассмотрим случай.

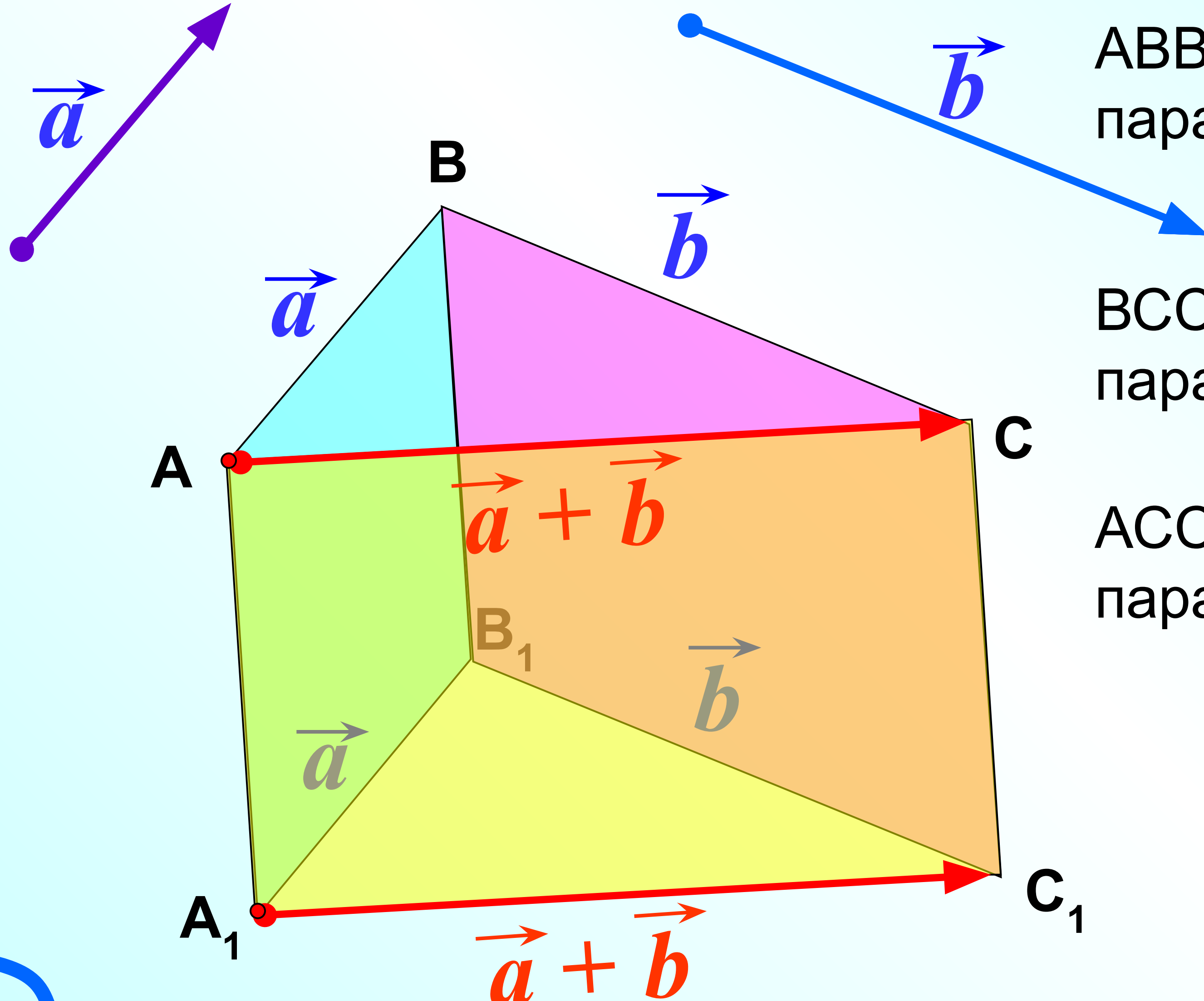


ABB_1A_1 – параллелограмм

BCC_1B_1 – параллелограмм

ACC_1A_1 – параллелограмм

Правило треугольника.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC}$

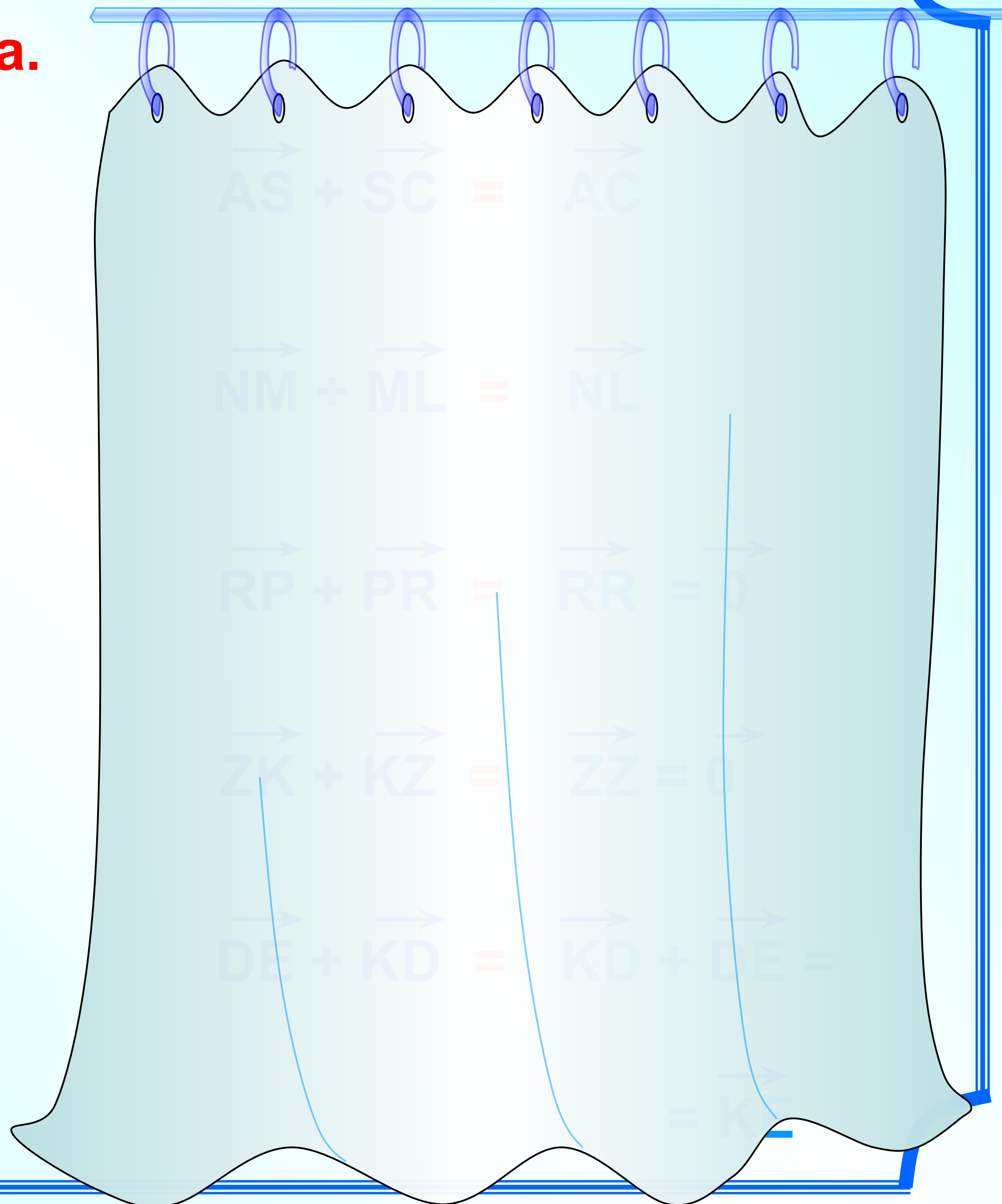
$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MR}$

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KM} \Rightarrow \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK}$

$= \overrightarrow{OK}$



$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NL}$

$\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RR} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{ZK} + \overrightarrow{KZ} = \overrightarrow{ZZ} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DE} =$

$= \overrightarrow{KE}$

Правило треугольника.

$\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

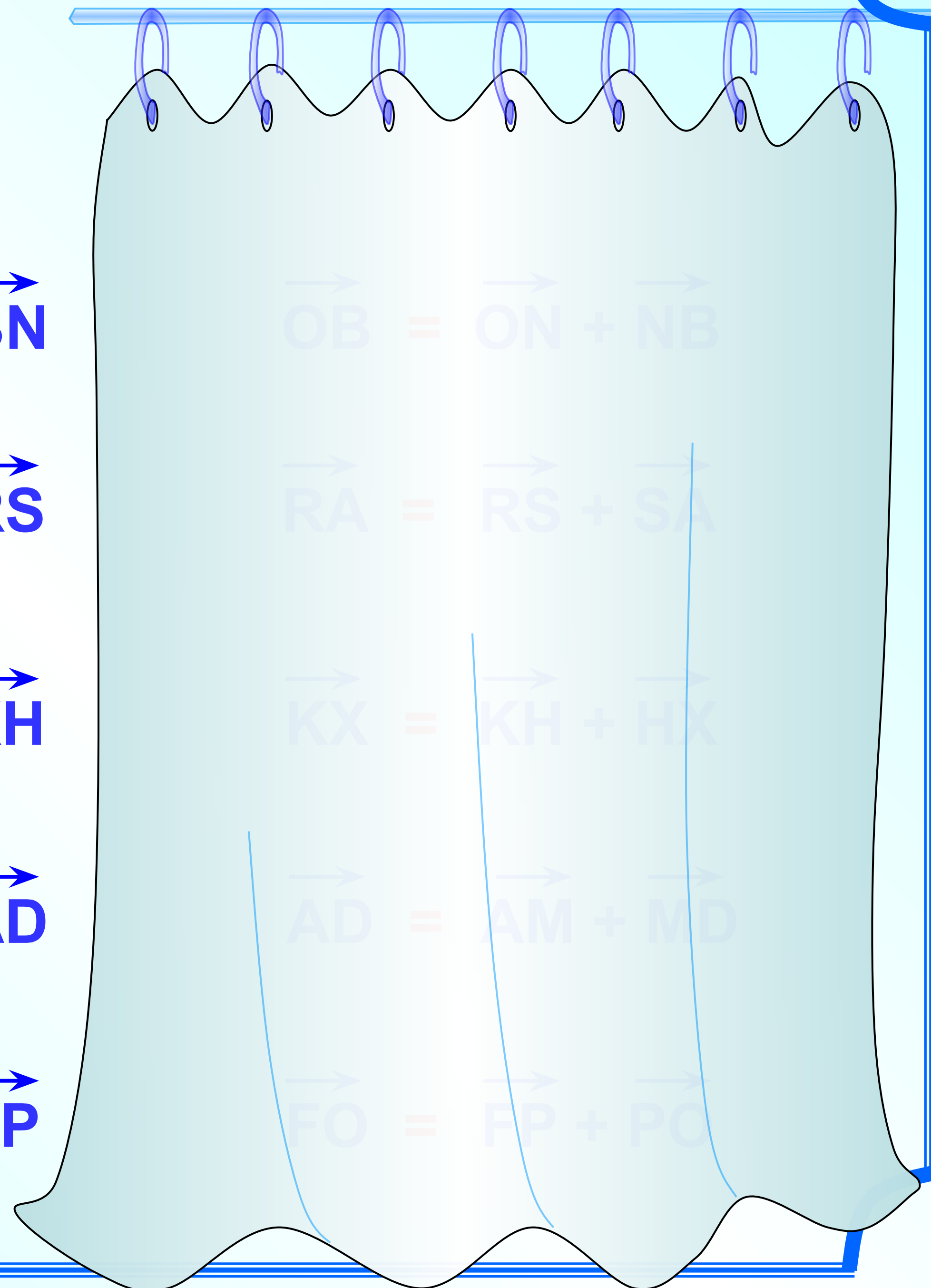
из ΔOBN $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN}$

из ΔASR $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RS}$

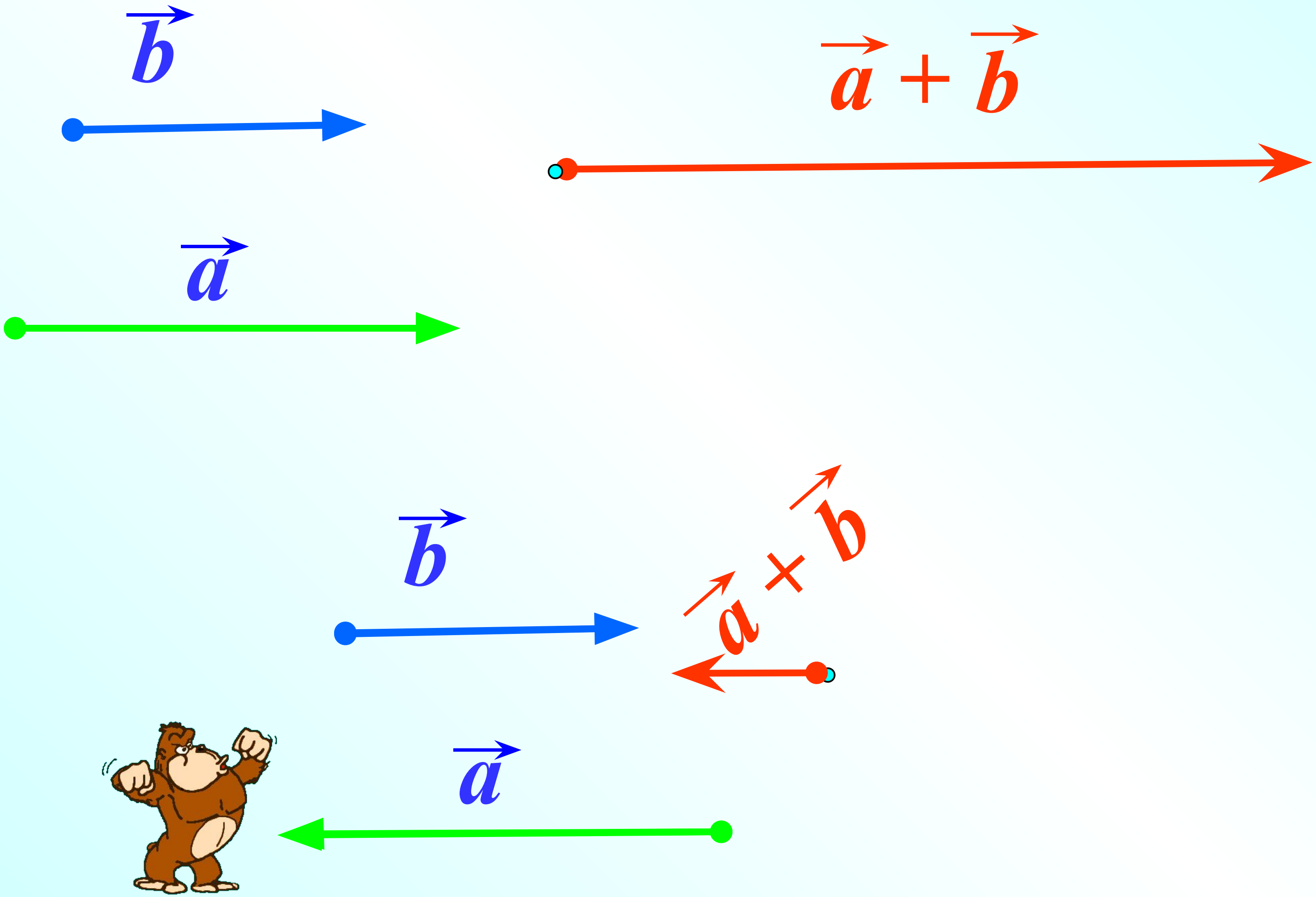
из ΔXKH $\overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XK} + \overrightarrow{KH}$

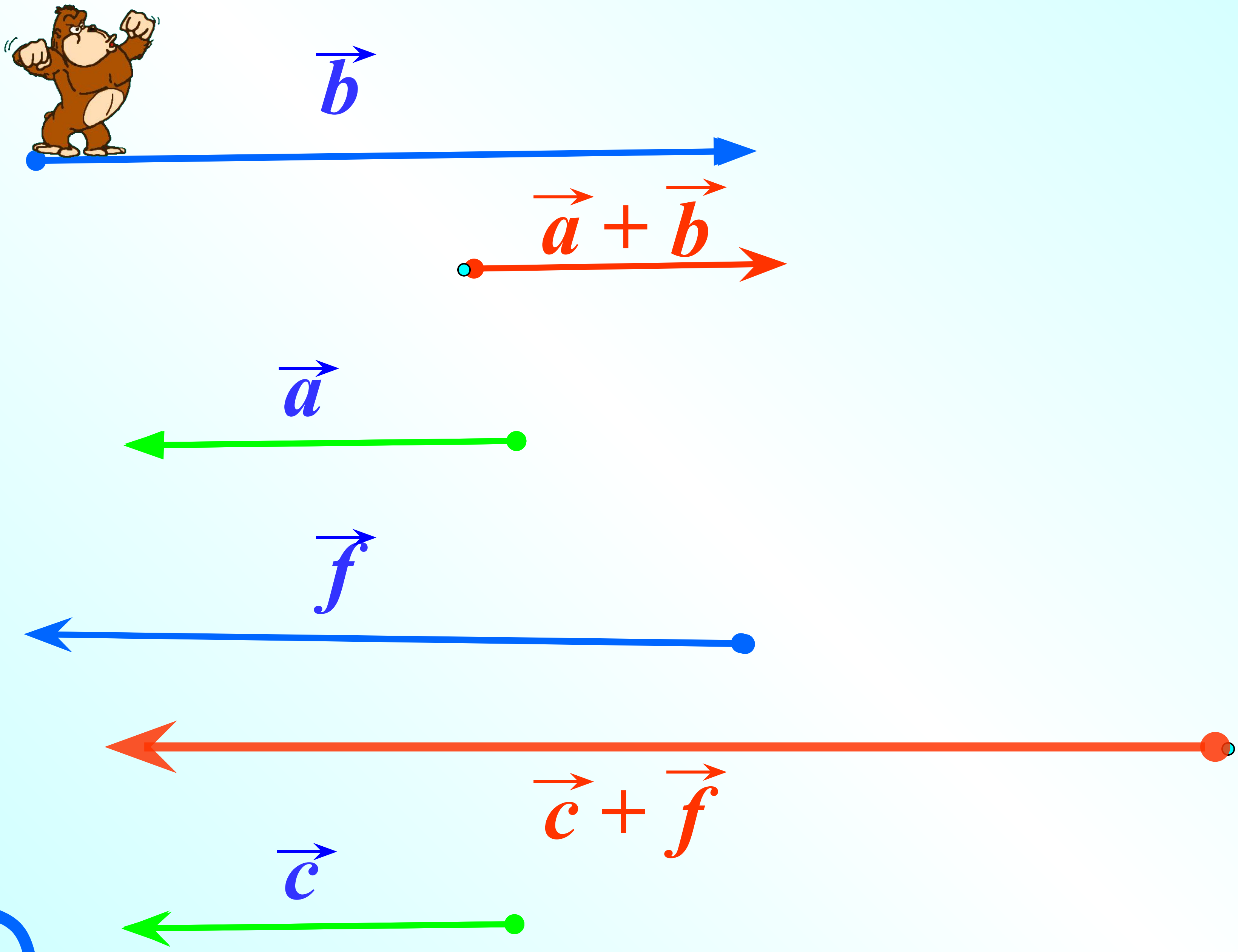
из ΔAMD $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$

из ΔFPO $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FP}$



По правилу треугольника складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении треугольника и не получается




$\vec{b}$
$\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{f}$
$\vec{c} + \vec{f}$
$\vec{c}$

Законы сложения векторов

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливы равенства:

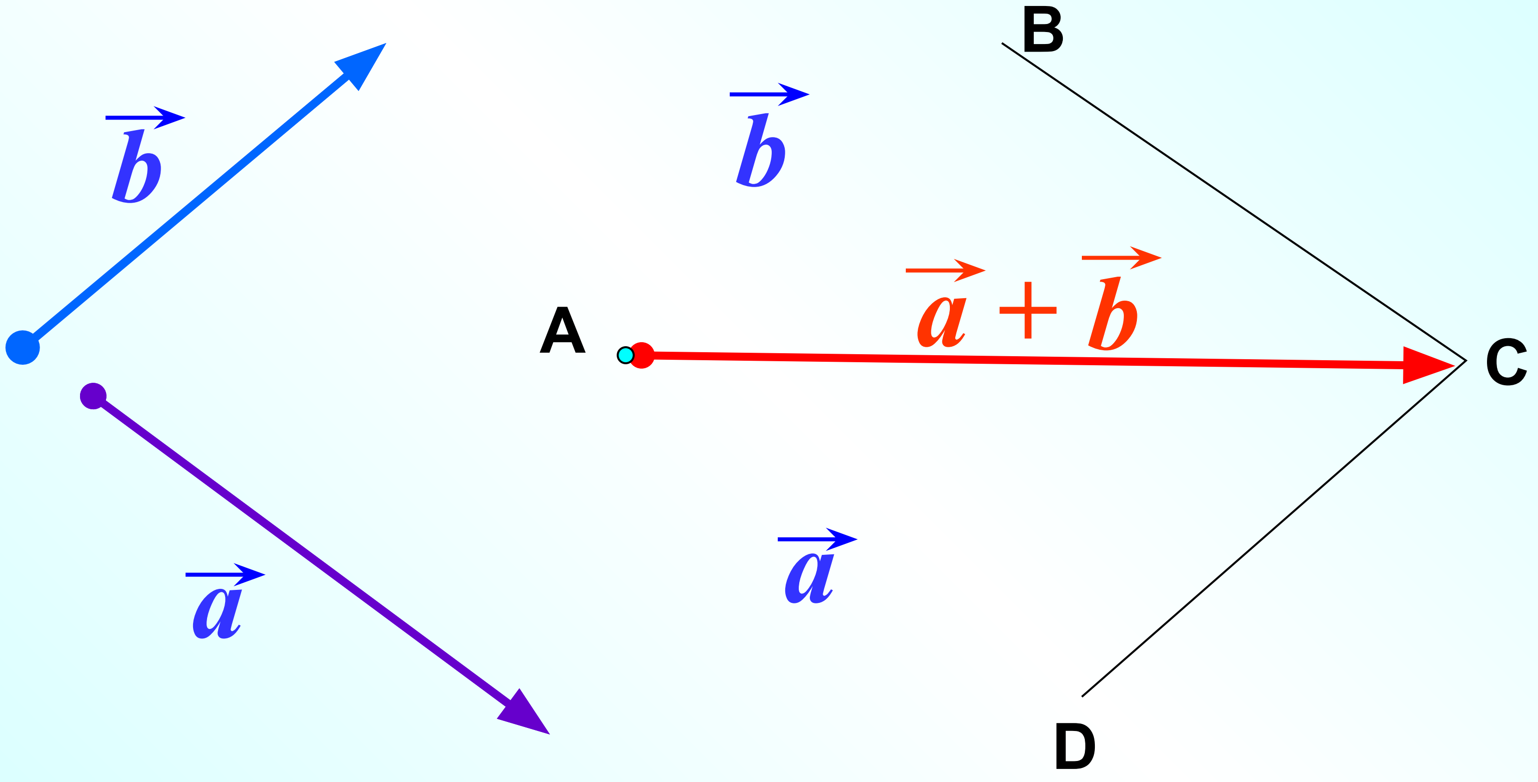
1 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *переместительный закон* !

2 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

сочетательный закон !

Докажем свойство 1

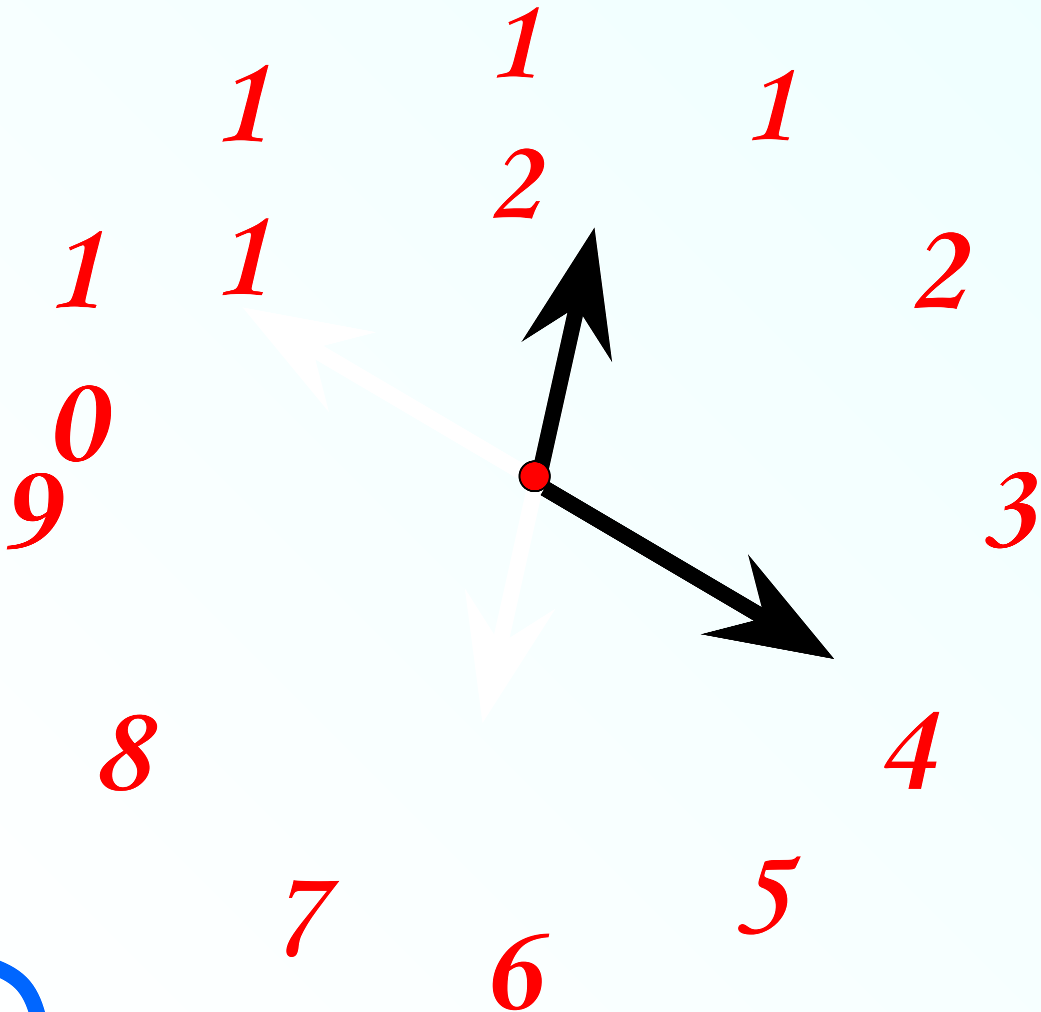
Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.



из $\Delta\, ABC$ $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a}$

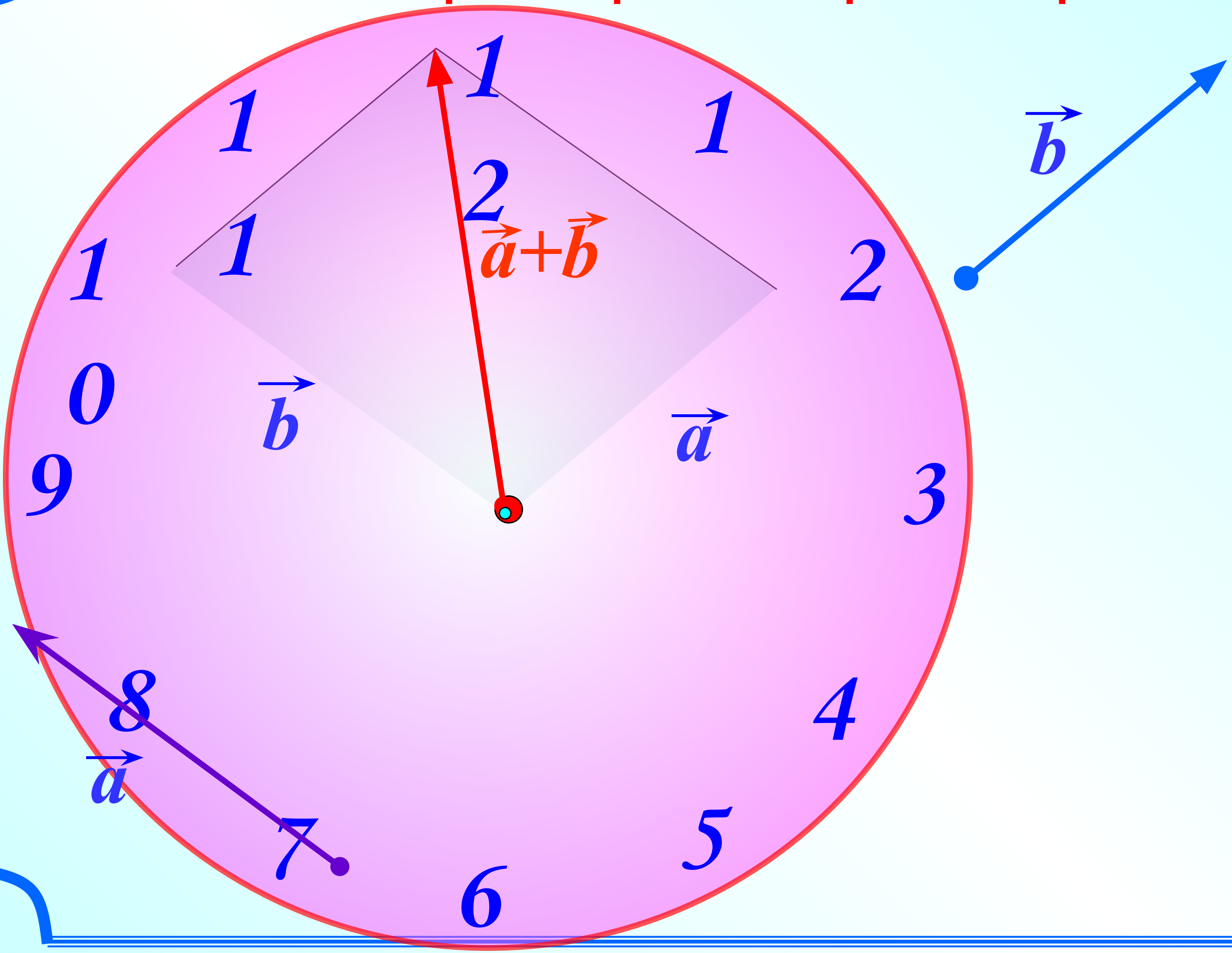
из $\Delta\, ADC$ $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{b}$

При доказательстве свойства 1^0 мы обосновали правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов.

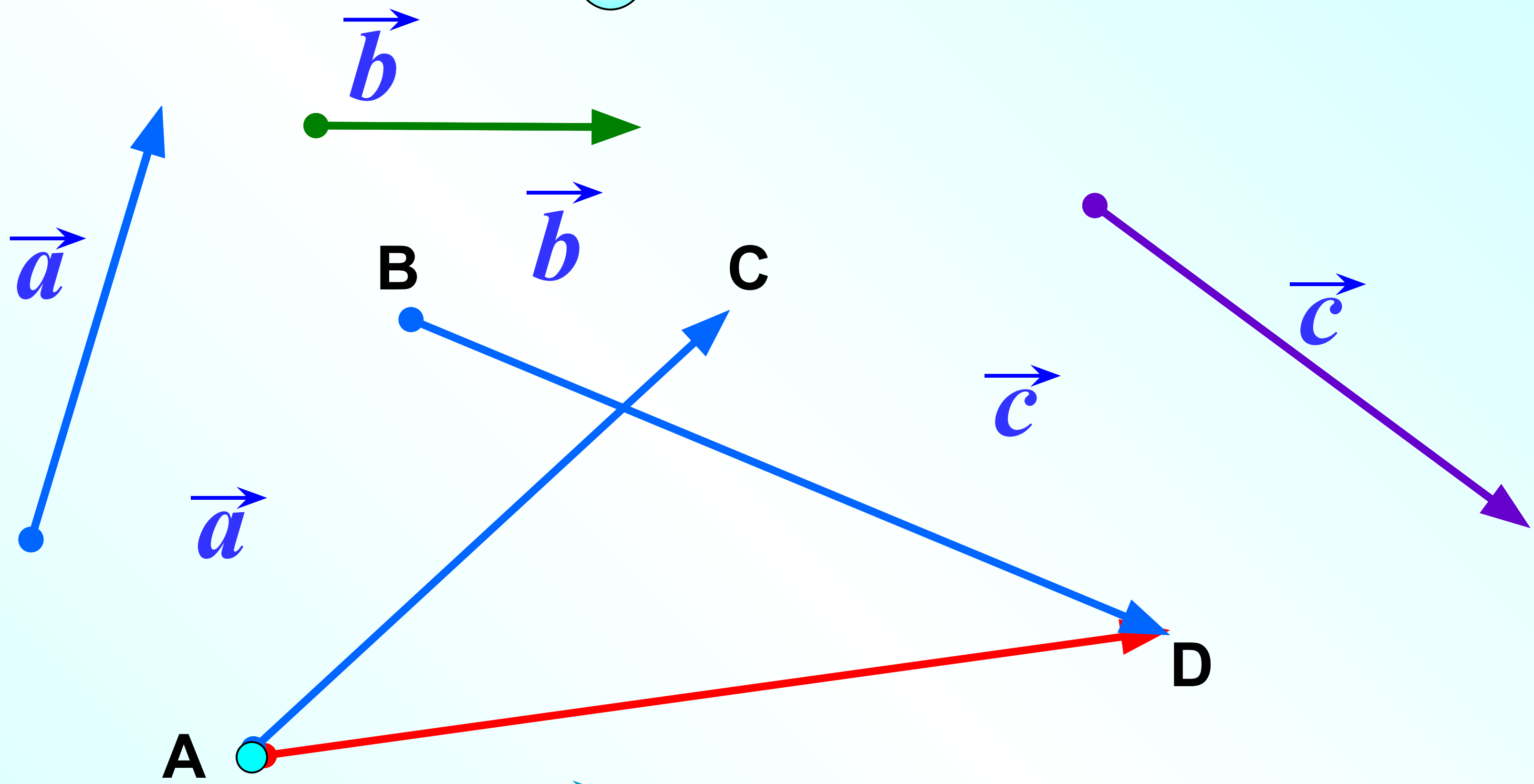


Чтобы применить правило параллелограмма, надо отложить векторы от одной точки, как стрелки часов.

Сложение векторов. Правило параллелограмма.



Докажем свойство 2

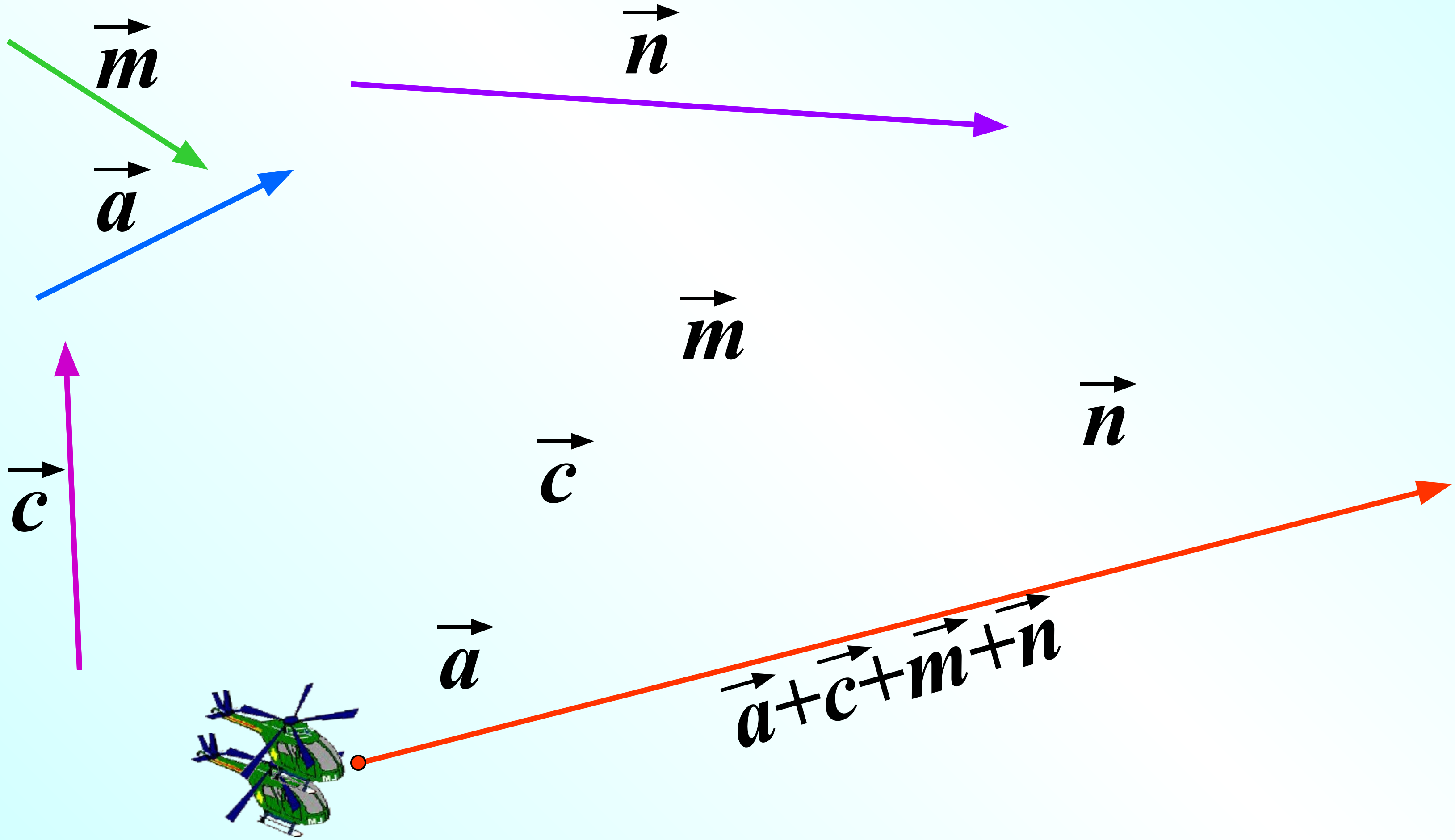


$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overset{\overrightarrow{AC}}{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

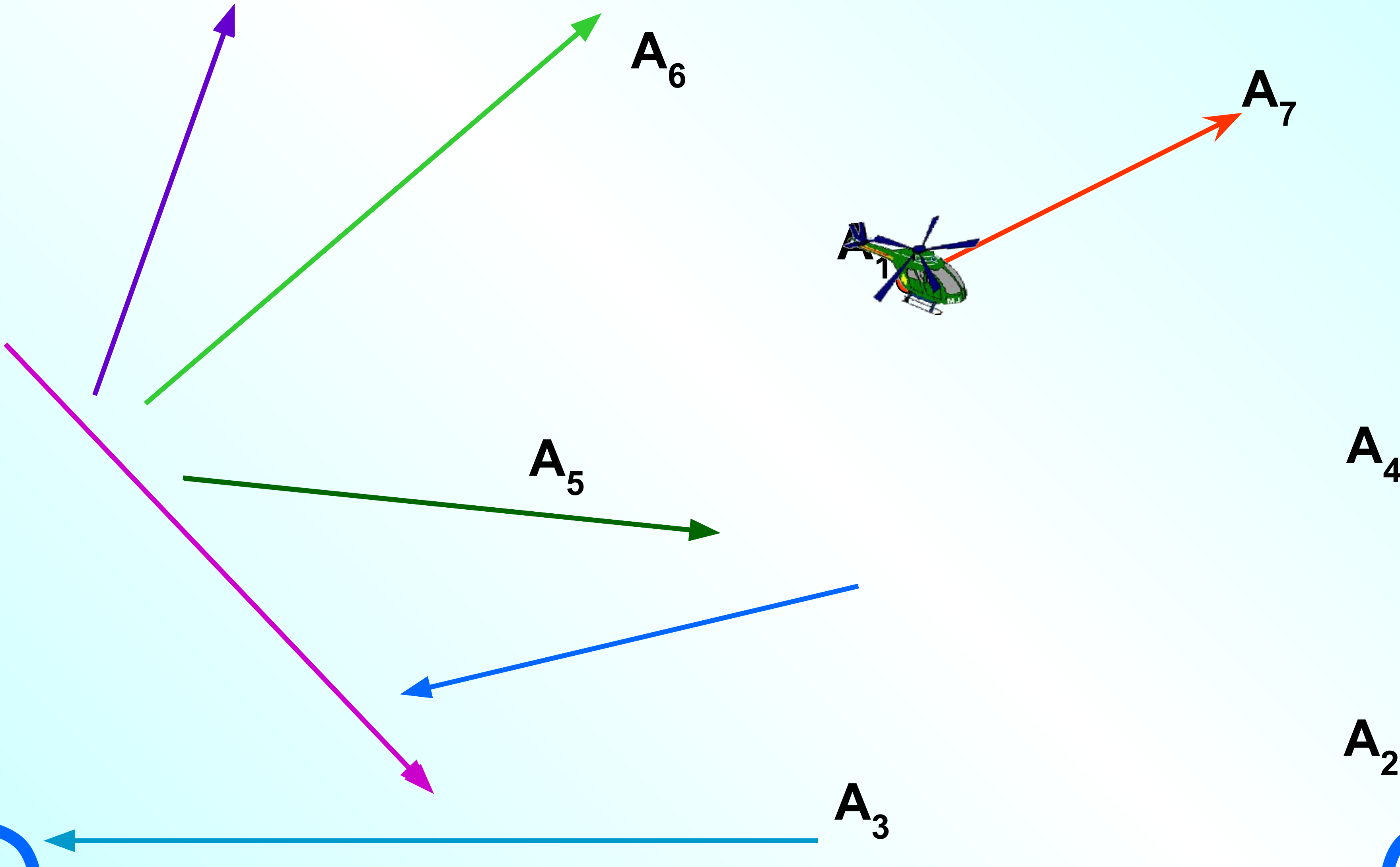
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overset{\overrightarrow{BD}}{(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Сложение векторов.
Правило многоугольника.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO}$$

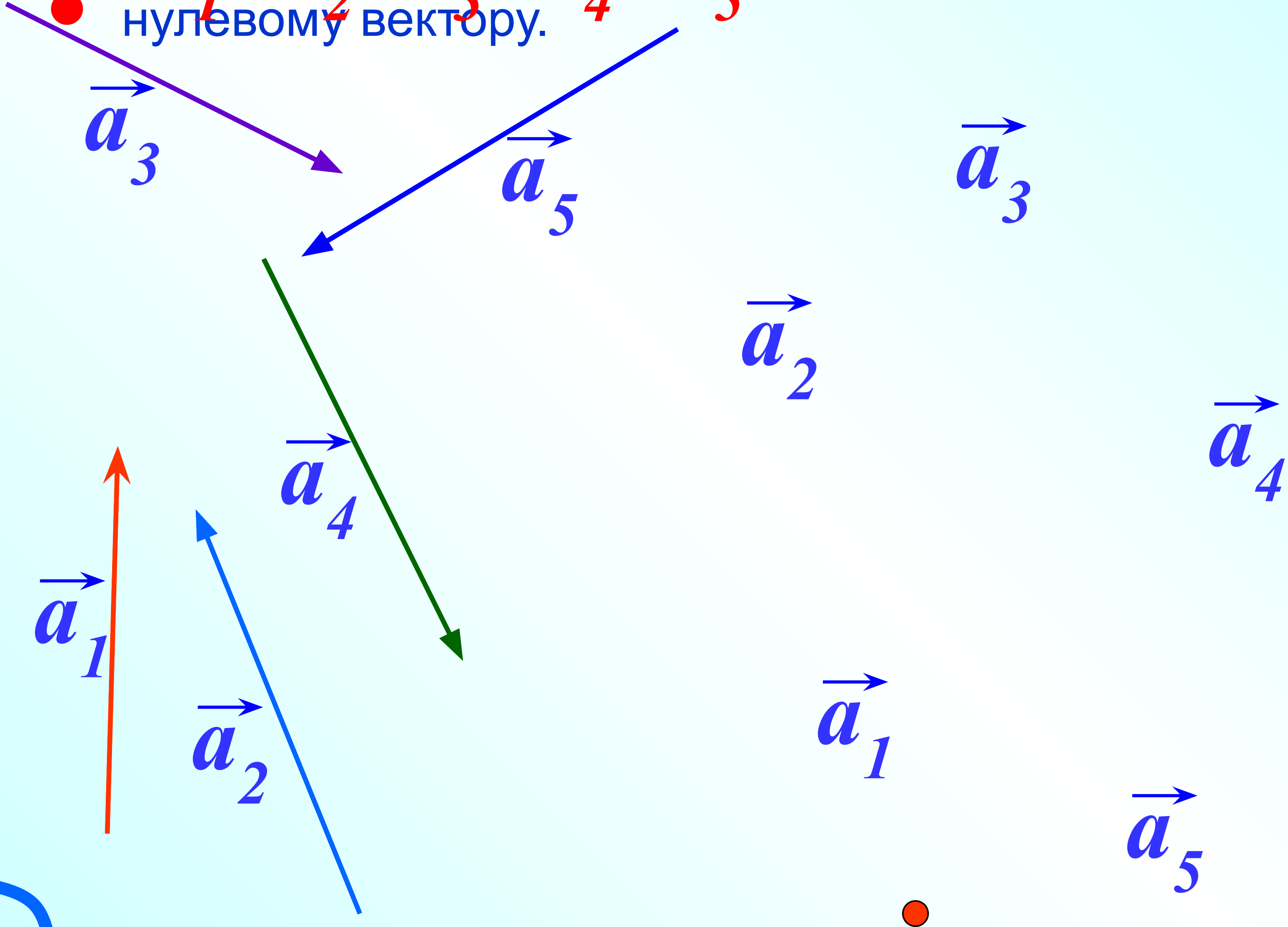


Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$

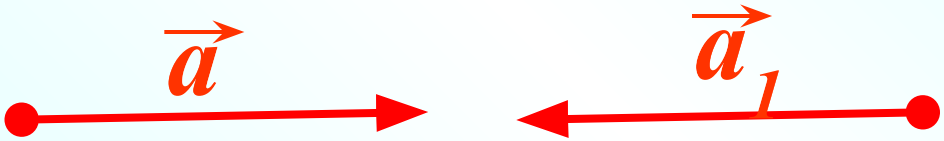


Если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.

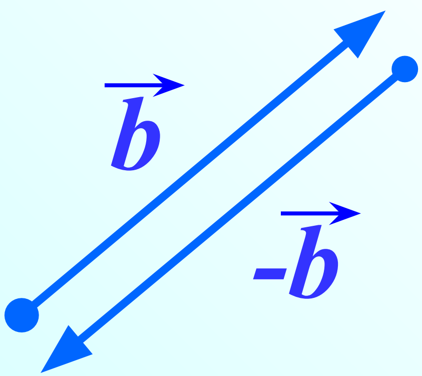
$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5 = \vec{0}$$



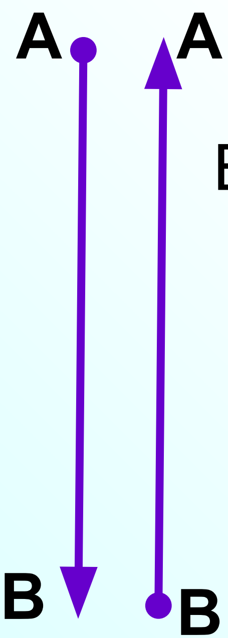
Вектор $\vec{a}_1$ называется **противоположным** вектору $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ имеют равные длины и противоположно направлены.



$|\vec{a}| = |\vec{a}_1|$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}_1$



Вектор $-\vec{b}$, противоположный вектору $\vec{b}$

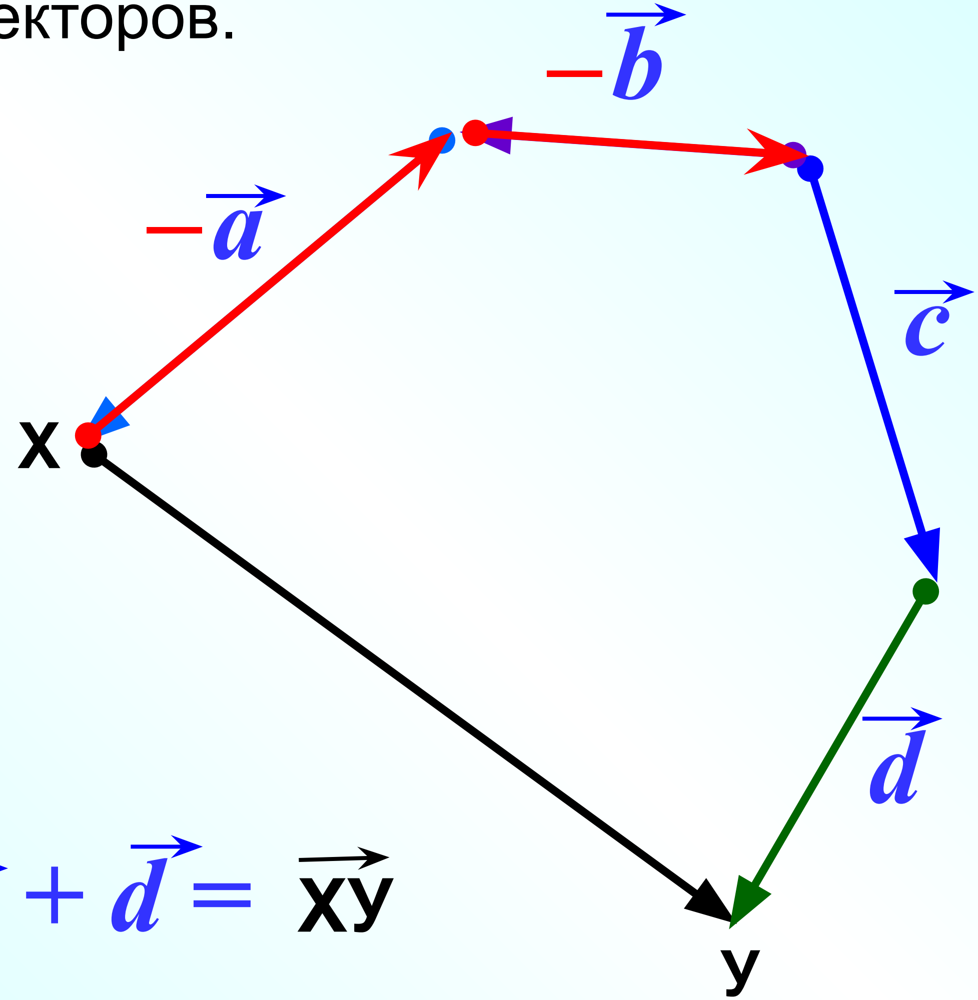


Вектор $\overrightarrow{BA}$, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

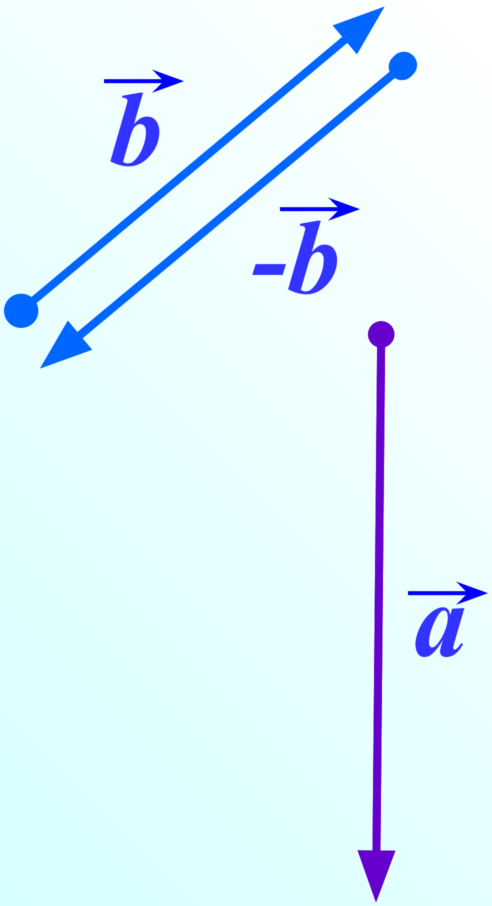
№ 766 На рисунке изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ $\overrightarrow{XY}$. Представьте вектор $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы остальных или им противоположных векторов.

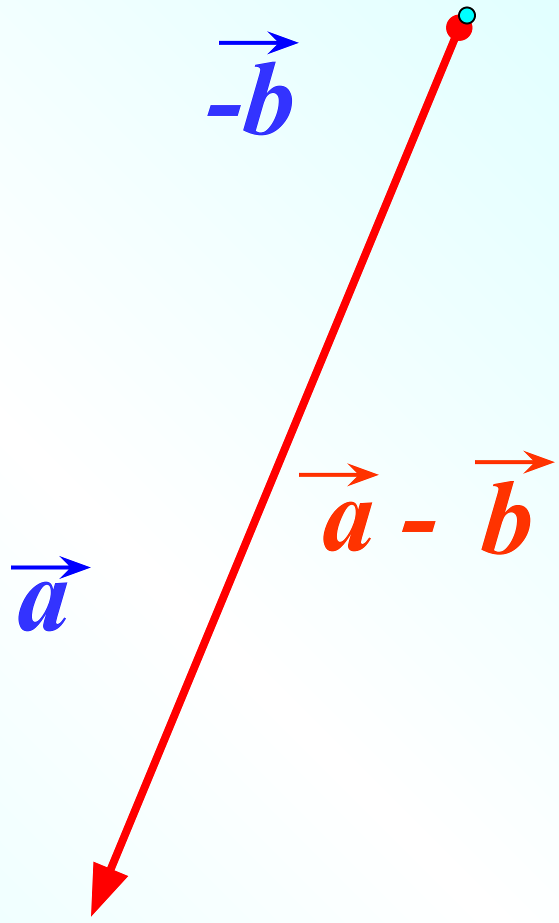


$$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{XY}$$

Вычитание векторов.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



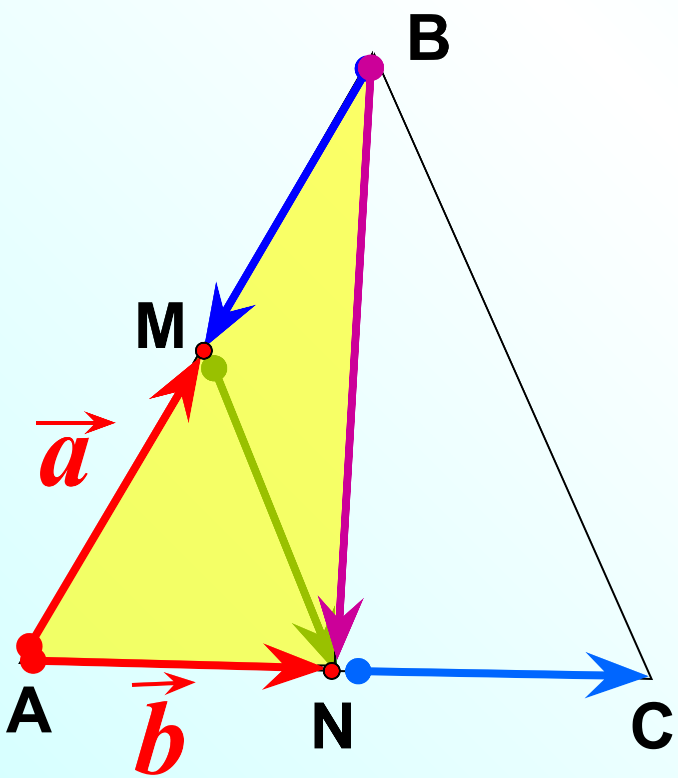


Вычитание векторов.

$$\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{SF} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FS} = \overrightarrow{MS}$$

$$\overrightarrow{RO} - \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RO} = \overrightarrow{MO}$$

№ 768 Точки M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$



$\overrightarrow{BM} = -\vec{a}$

$\overrightarrow{NC} = \vec{b}$

из $\Delta\ AMN$

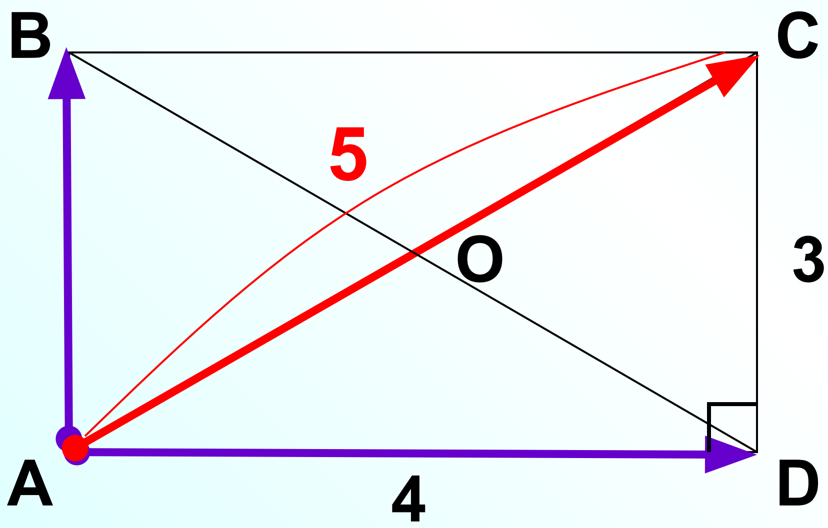
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$

из $\Delta\ ABN$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}$

Найдите $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OD}\right|$

ABCD - прямоугольник



( )

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO}$

$$\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{2}\cdot 5 = 2{,}5$$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} =$

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR} =$

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KM} =$

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{OM} =$

$из\ \Delta OBN \quad \overrightarrow{ON} =$

$из\ \Delta ASR \quad \overrightarrow{AS} =$

$из\ \Delta XKH \quad \overrightarrow{XH} =$

$из\ \Delta AMD \quad \overrightarrow{MD} =$

$из\ \Delta FPO \quad \overrightarrow{OP} =$

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} =$

$\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ML} =$

$\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR} =$

$\overrightarrow{ZK} + \overrightarrow{KZ} =$

$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KD} =$

$из\ \Delta OBN \quad \overrightarrow{OB} =$

$из\ \Delta ASR \quad \overrightarrow{RA} =$

$из\ \Delta XKH \quad \overrightarrow{KX} =$

$из\ \Delta AMD \quad \overrightarrow{AD} =$

$из\ \Delta FPO \quad \overrightarrow{FO} =$