

Конечные автоматы

Абстрактные автоматы.

Структурные автоматы.

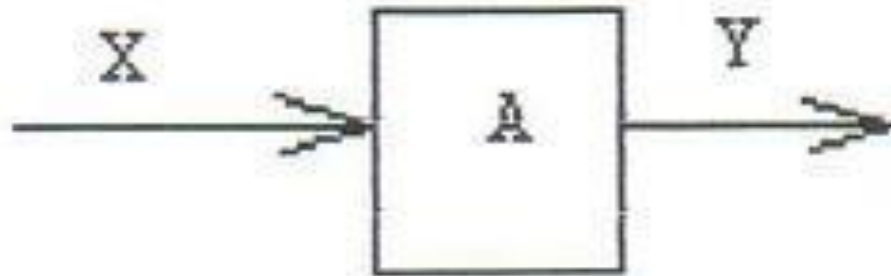
Синтез конечных автоматов.

Синтез МПА.

Теория автоматов

Абстрактный автомат

- **Абстрактный автомат** – позволяет абстрагироваться от конкретной схемы, можно рассматривать как «**черный ящик**»

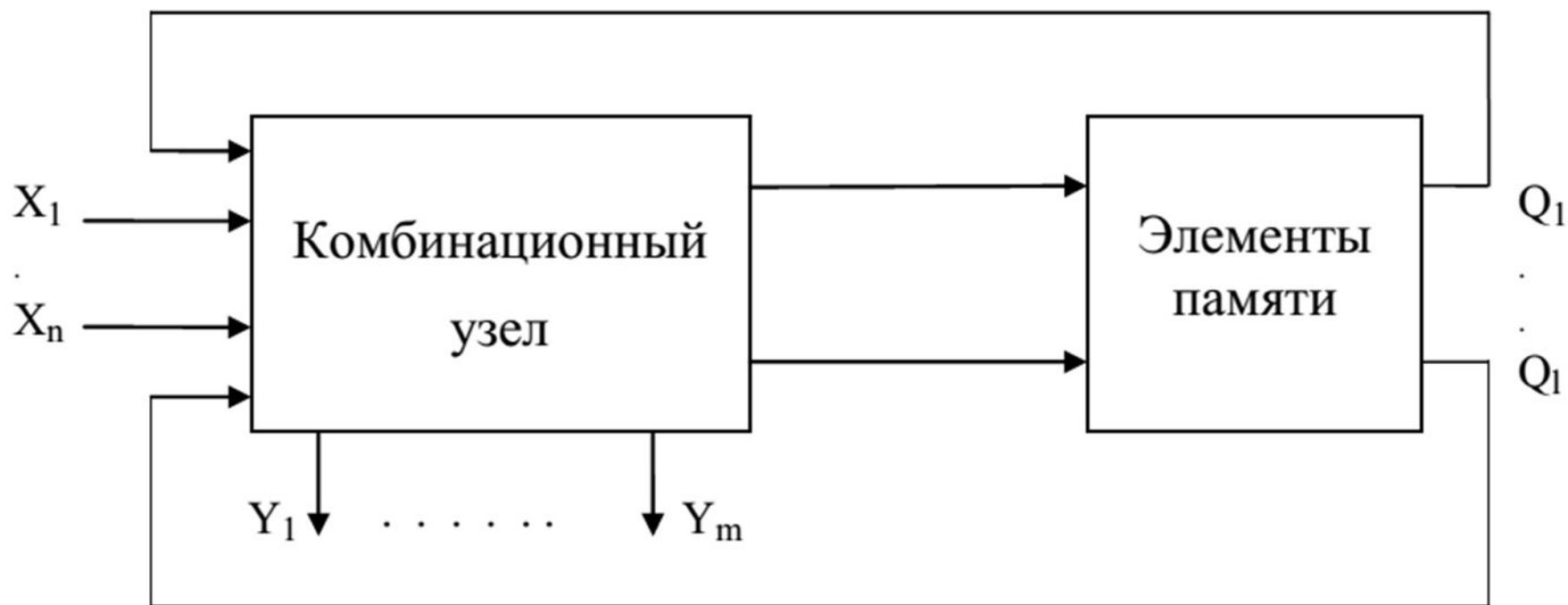


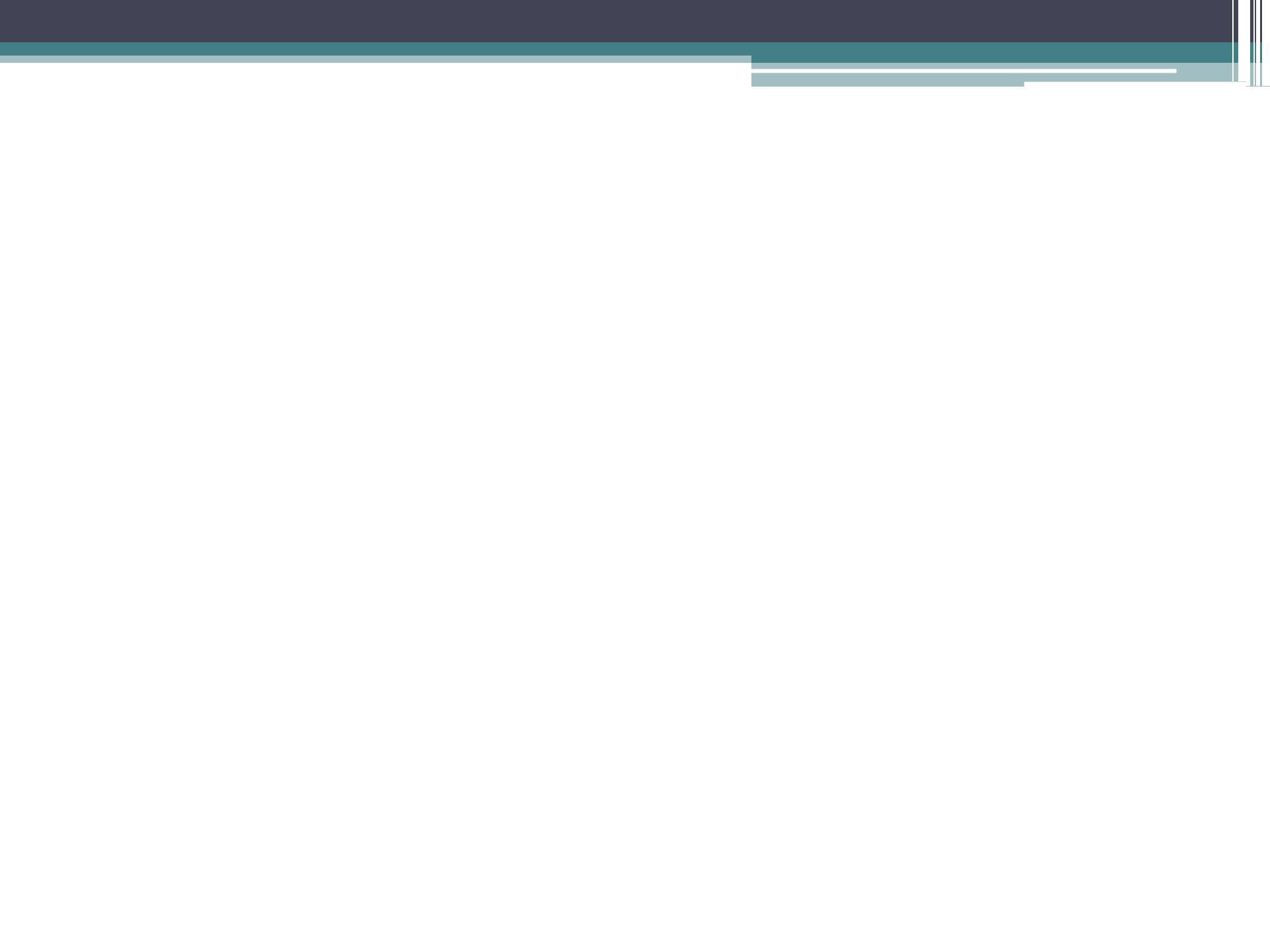
- Для построения УАЖЛ, используется теория абстрактных конечных автоматов (КА). Для построения используется две базовые модели КА, функционально аналогичные: автомат Мура и автомат Мили.
- Любой ЦА описывается следующим кортежем: $M = \{X, Y, A \setminus S, \delta, \lambda, s_0\}$, где X, Y, S – соответственно множества входных, выходных значений ЦА и внутренних

Теория автоматов

Абстрактный автомат

- *Абстрактный автомат – обобщенная схема.*





Теория автоматов

Автомат Мили.

В автомате Мили функция выходов λ определяет значение выходного символа по классической схеме абстрактного автомата. Математическая модель автомата Мили и схема рекуррентных соотношений не отличаются от математической модели и схемы рекуррентных соотношений абстрактного автомата.

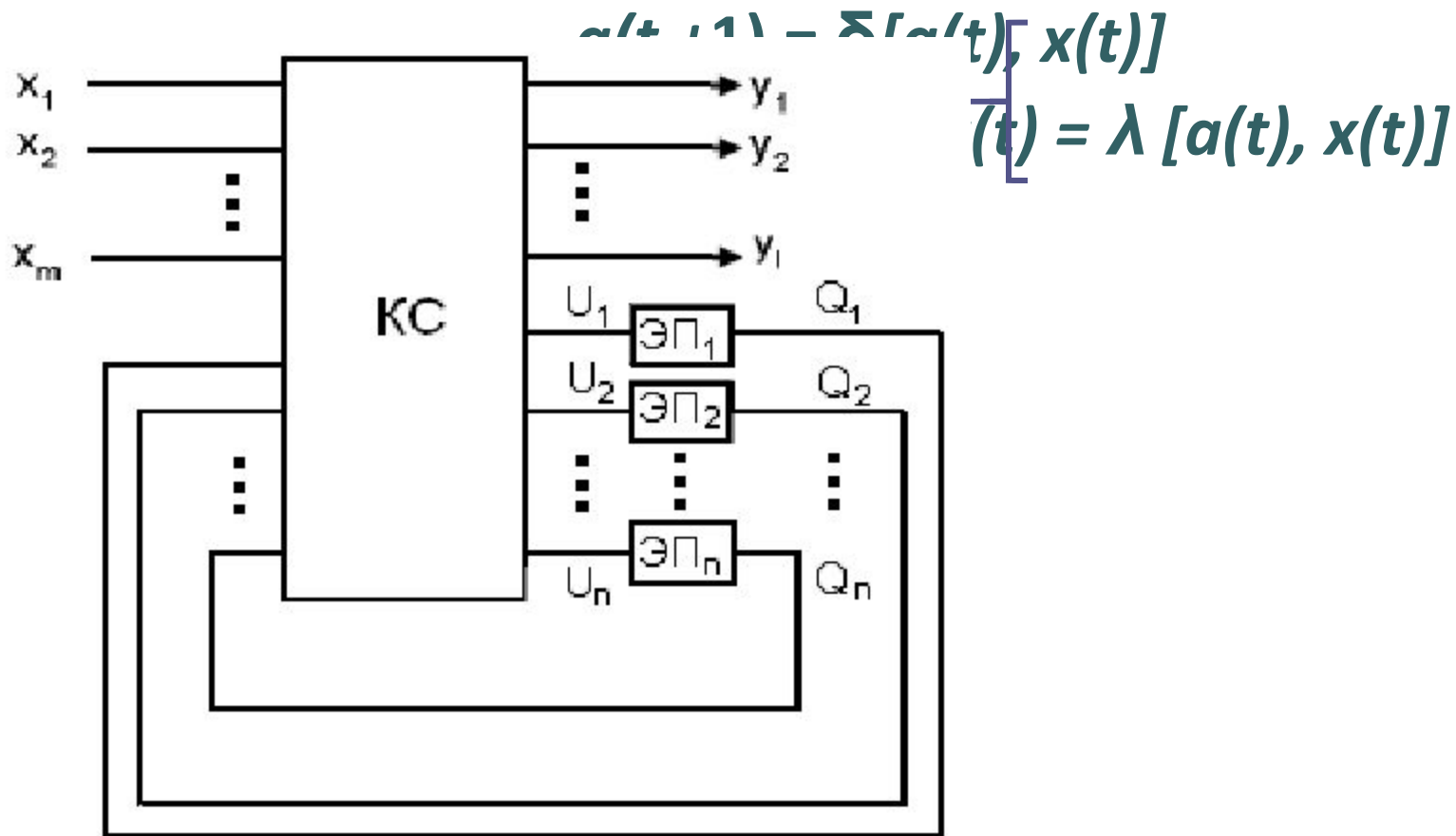
Законы функционирования: $a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$
 $y(t) = \lambda[a(t), x(t)]$

Отображения δ и λ получили названия, соответственно, **функции перехода** и **функции выхода** автомата.

Особенностью автомата Мили является то, что функция выходов является двухаргументной и символ в выходном канале $y(t)$ обнаруживается только при наличии символа во входном канале $x(t)$. Функциональная схема не отличается от схемы абстрактного автомата.

Теория автоматов

Автомат Мили.



Теория автоматов

Автомат Мили

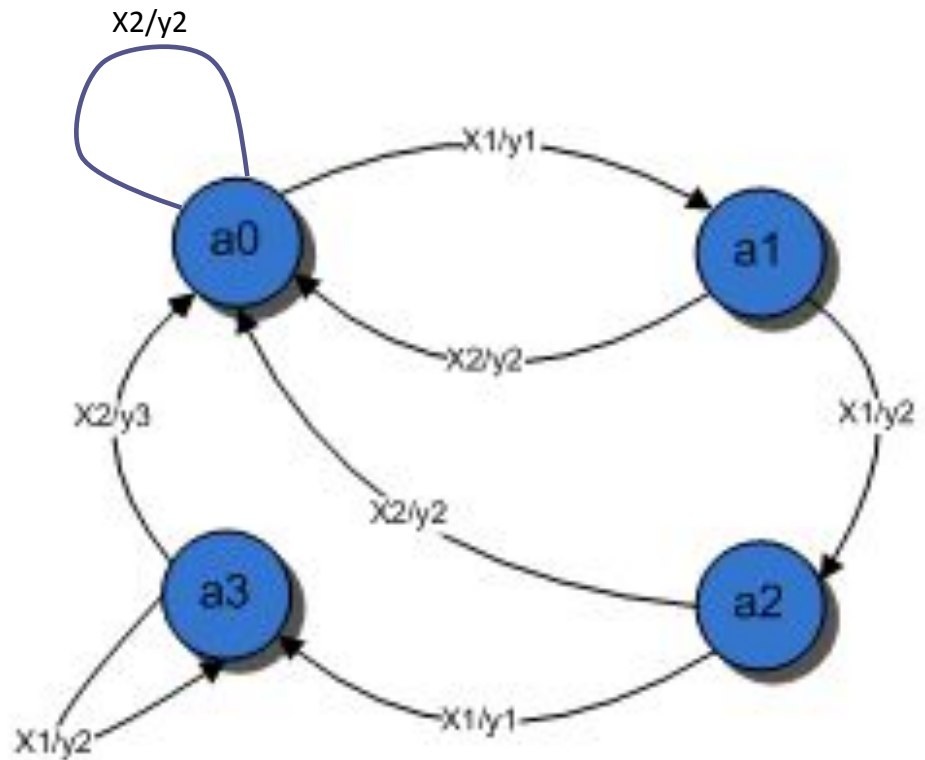
Граф автомата, заданного приведенными таблицами, переходов и выходов будет иметь вид:

δ

ВХ	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_3	a_3
x_2	a_0	a_0	a_0	a_0

λ

ВХ	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	y_2	y_2	y_1	y_2
x_2	y_2	y_2	y_2	y_3



Теория автоматов

Автомат Мура.

Зависимость выходного сигнала *только от состояния автомата* представлена в автоматах Мура. В автомате Мура функция выходов определяет значение выходного символа только по одному аргументу — состоянию автомата. Эту функцию называют также функцией меток, так как она каждому состоянию автомата ставит метку на выходе.

Законы функционирования: $a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$
 $y(t) = \lambda[a(t)]$

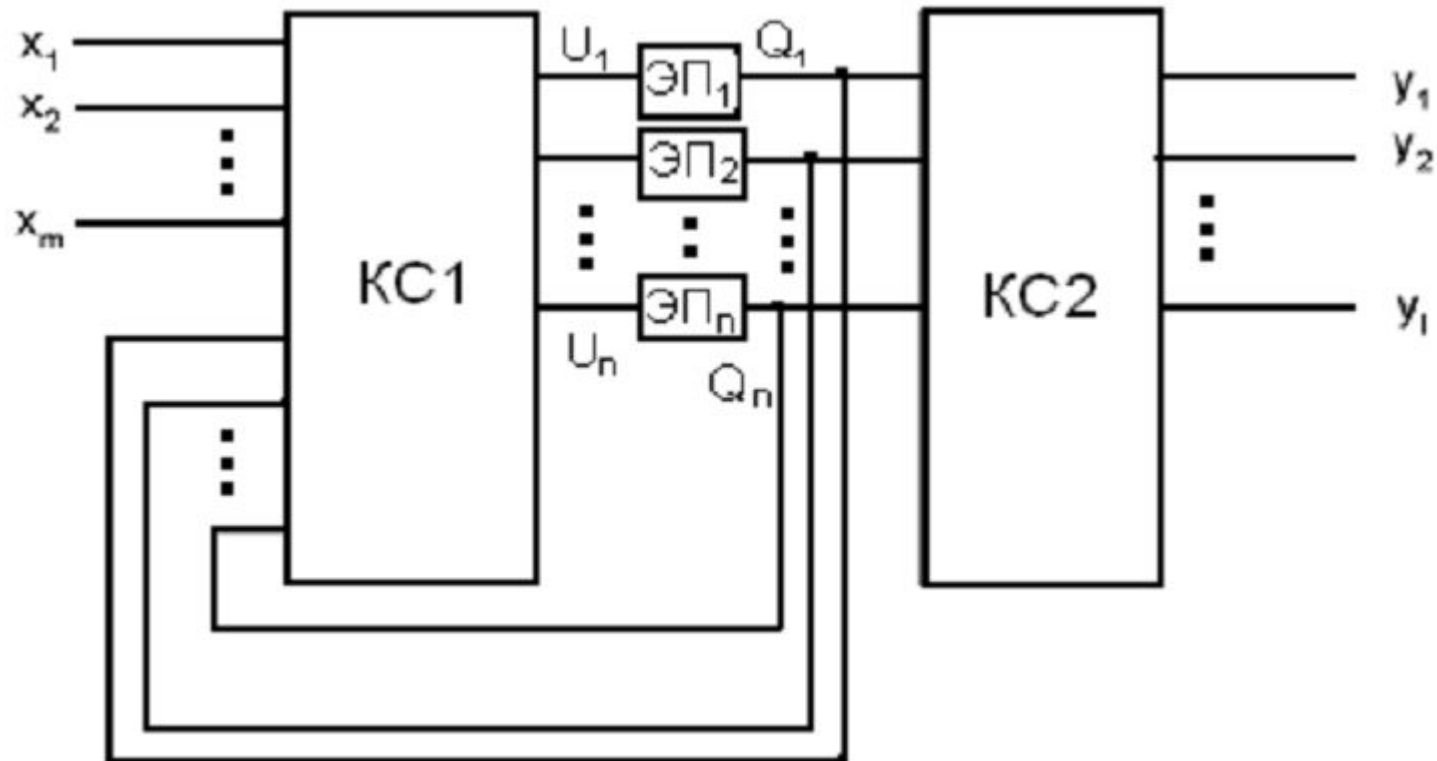
Пример автомата Мура:

Очевидно, что автомат Мура можно рассматривать как частный случай автомата Мили.

Теория автоматов

Автомат Мура.

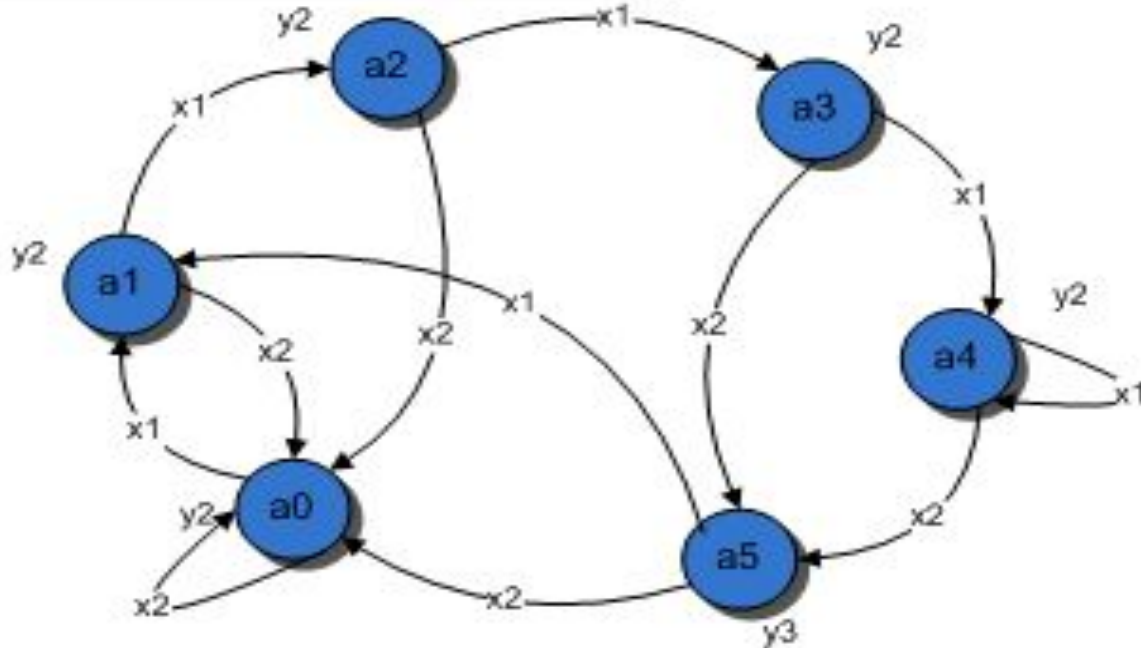
$$a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$$
$$y(t) = \lambda[a(t)]$$



Теория автоматов

Автомат Мура

	y_2	y_2	y_2	y_2	y_2	y_3
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$X1$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	a_1
$X2$	a_0	a_0	a_0	a_5	a_5	a_0



Абстрактный синтез автоматов

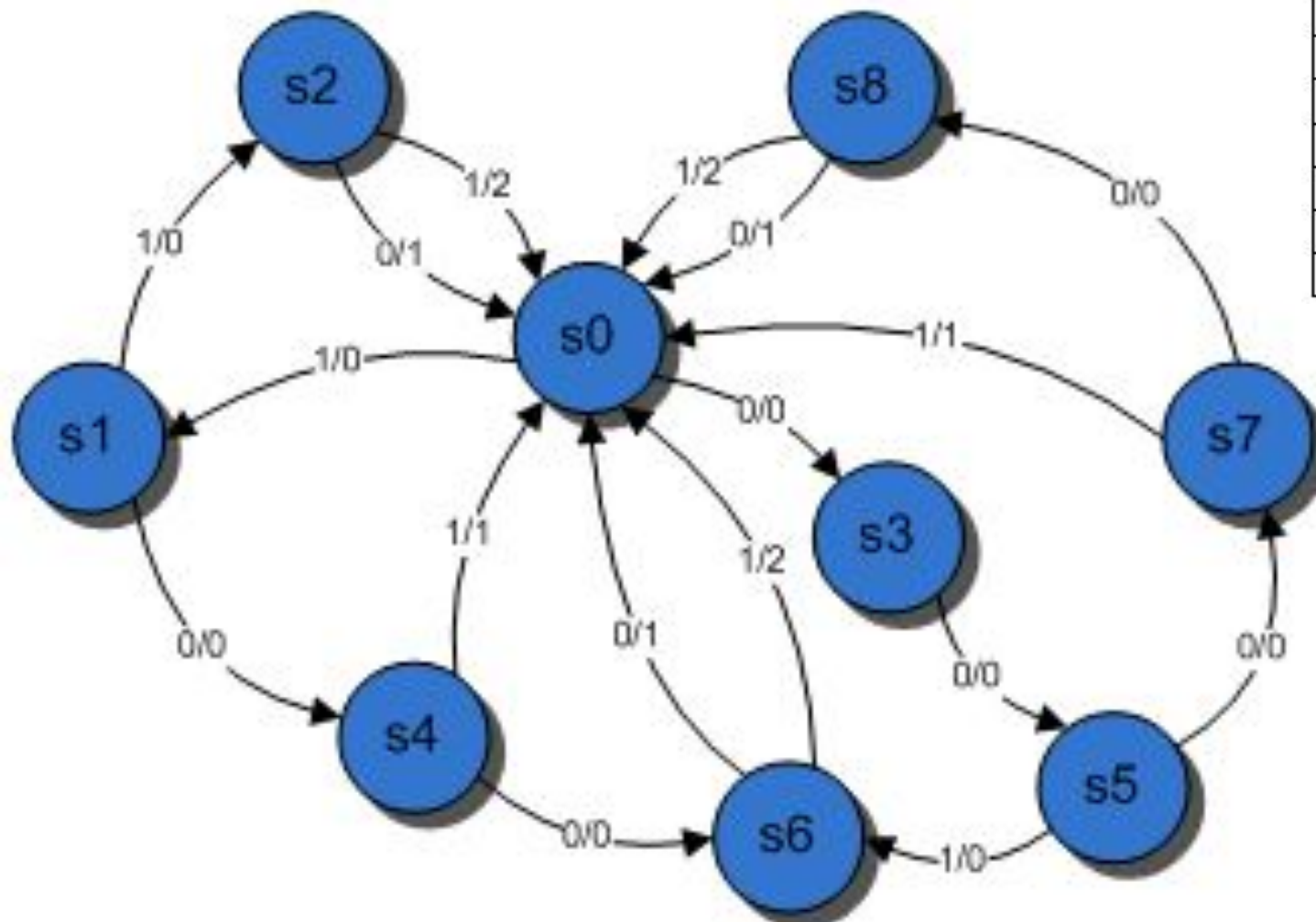
Задача структурного синтеза состоит в построении схемы автомата минимальной сложности. На первом этапе необходимо получить минимальную структуру абстрактного автомата.

*Будем рассматривать в качестве примера следующий автомат:
Входные сигналы: 0, 1.*

*Таблица переходов:
Выходные сигналы: 0, 1, 2.
 S_0 – начальное состояние.:*

<i>Сост.</i>	<i>0</i>	<i>1</i>
a_0	0/ a_3	0/ a_1
a_1	0/ a_4	0/ a_2
a_2	1/ a_0	2/ a_2
a_3	0/ a_5	0/ a_4
a_4	0/ a_6	1/ a_0
a_5	0/ a_7	0/ a_6
a_6	1/ a_0	2/ a_0
a_7	0/ a_8	1/ a_0
a_8	1/ a_0	2/ a_0

Абстрактный синтез автомата



<i>Сост.</i>	<i>0</i>	<i>1</i>
a ₀	0/ a ₃	0/ a ₁
a ₁	0/ a ₄	0/ a ₂
a₂	1/ a₀	2/ a₂
a ₃	0/ a ₅	0/ a ₄
a ₄	0/ a ₆	1/ a ₀
a ₅	0/ a ₇	0/ a ₆
a₆	1/ a₀	2/ a₀
a ₇	0/ a ₀	1/ a ₀
a₈	1/ a₀	2/ a₀

Абстрактный синтез автоматов

Для упрощения автомата в первую очередь необходимо выделить эквивалентные состояния.

Условия эквивалентности Колдуэлла:

1. Необходимое условие: внутренние состояния a_i и a_j называются **эквивалентными**, если при подаче произвольной входной последовательности с начальными состояниями a_i и a_j образуются одинаковые выходные последовательности.

2. Достаточное условие: если две одинаковые строки выходят в следующее состояние, то эти состояния **эквивалентны**.

Условия эквивалентности Колдуэлла состоит из 2 условий:

- **Условие совпадения выходов (необходимое)**
- **Условие совпадения следующих состояний (достаточное)**

Для нашего примера:

$$G_1 = \{(a_0, a_1, a_3, a_5), (a_2, a_6, a_8), (a_4, a_7)\}$$

Абстрактный синтез автоматов

Далее необходимо рассмотреть все возможные пары состояний для каждого из классов и отбросить те из них, которые переводятся по какому-либо символу входного алфавита за пределы этого класса. Эту процедуру нужно повторять до тех пор, пока следующее множество классов эквивалентности не совпадёт с предыдущим. В нашем примере окончательным будет уже второе разбиение:

$$G_2 = \{(a_0), (a_1 a_5)(a_3), (a_2 a_6 a_5), (a_4 a_7)\}$$

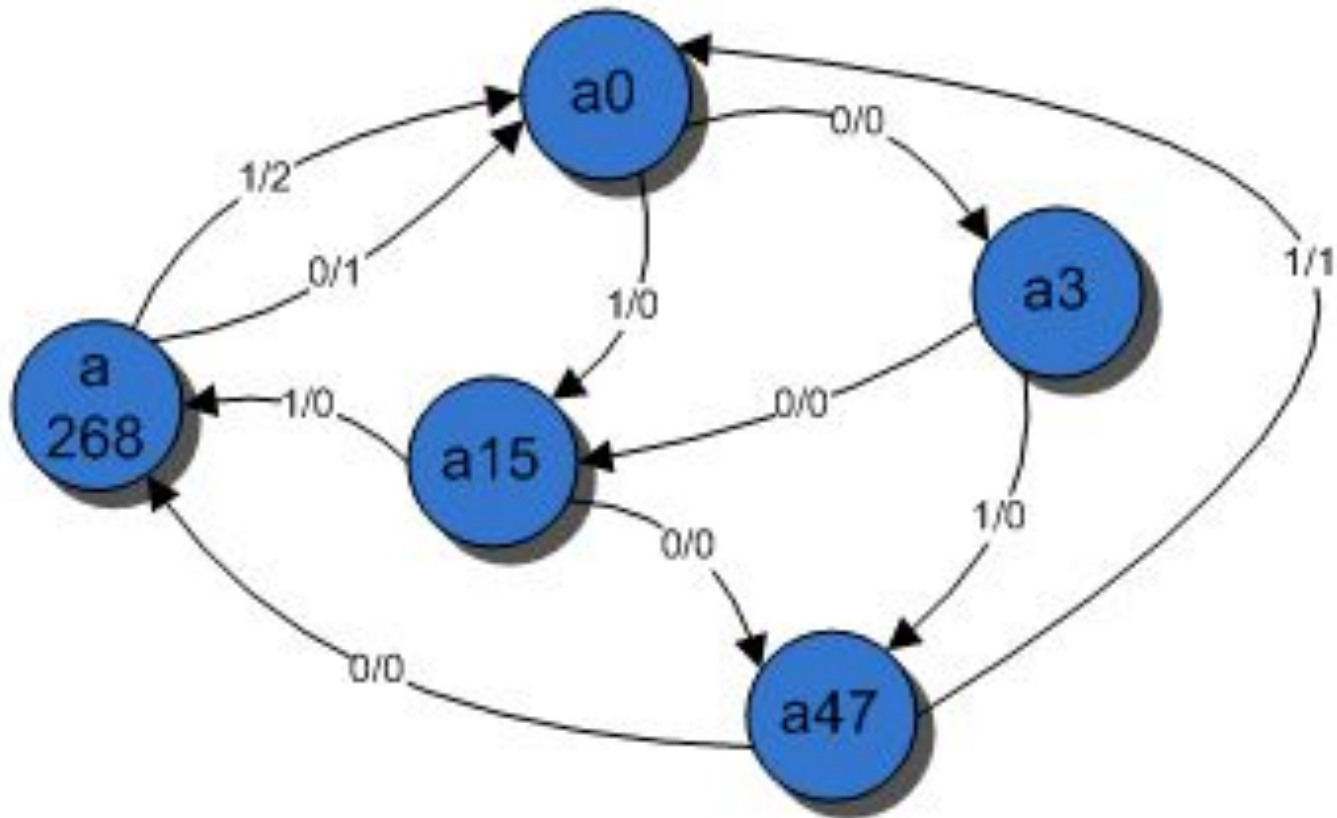
Новая таблица переходов:

	<i>0</i>	<i>1</i>
a_0	0/a3	0/a15
a_{15}	0/a47	0/a268
a_3	0/a15	0/a47
a_{268}	1/a0	2/a0
a_{47}	0/a268	1/a0

Теория автоматов

Абстрактный синтез автоматов

Граф минимизированного автомата:



Автомат Мура \square Автомат Мили

Автомат Мура и соответствующий ему автомат Мили:

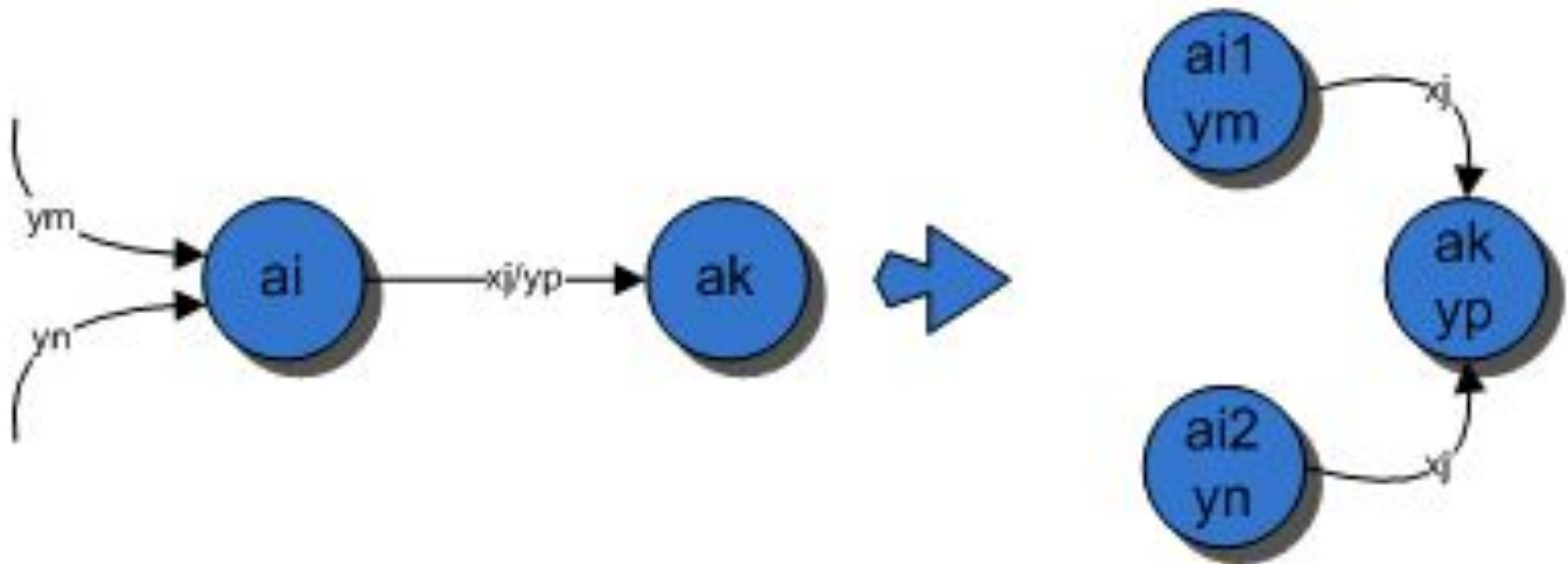


Переход от автомата Мили к автомату Мура:

От каждого автомата Мили можно перейти к эквивалентному ему автомату Мура. Если к одной вершине подходят дуги, отмеченные разными выходными сигналами, то производится разбиение на несколько вершин, каждая из которых отмечается своим выходным сигналом, и от каждой из этих вершин выводятся все дуги, существующие в графе автомата Мили.

Автомат Мили \square Автомат Мура

Переход от автомата Мили к эквивалентному автомату Мура:

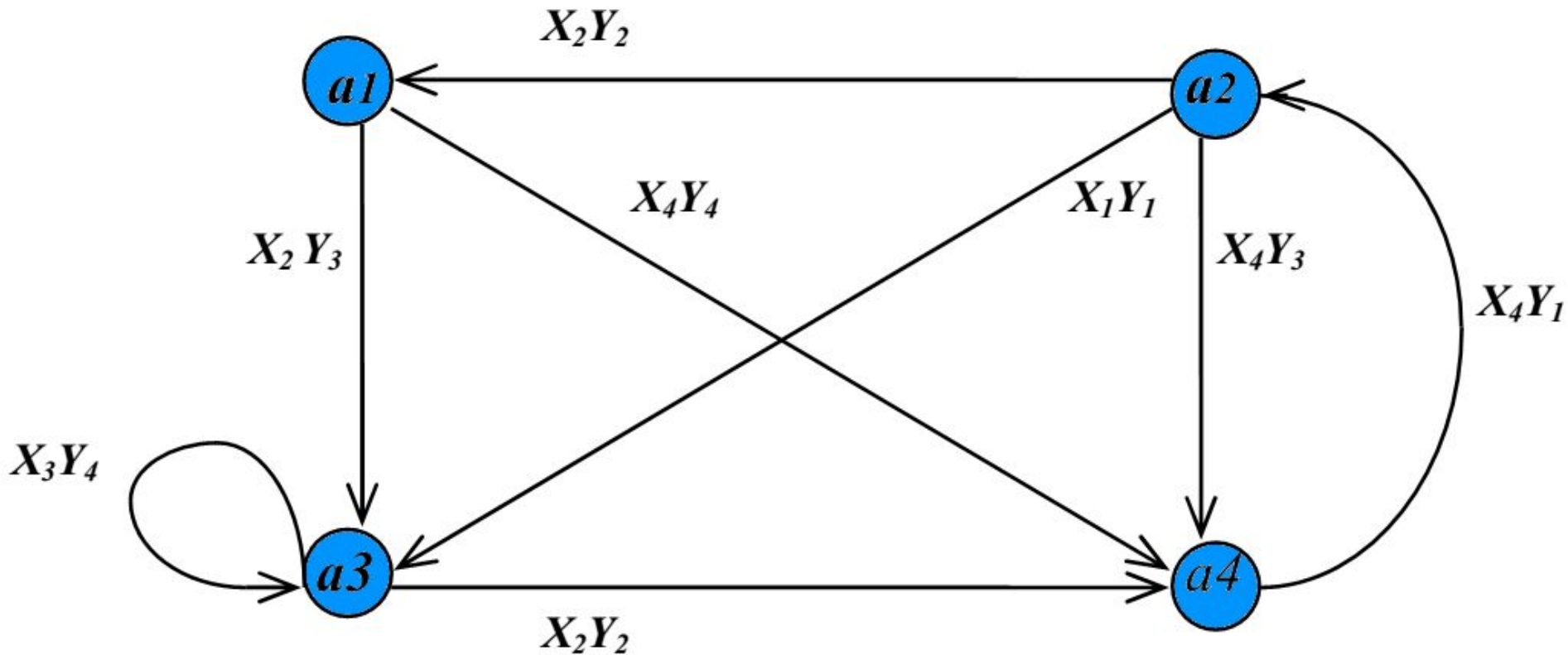


Алгоритм синтеза конечных автоматов

- 1 шаг. Построение диаграммы переходов (графа конечного автомата).*
- 2 шаг. Для заданной ДС составляем таблицы переходов и выходов.*
- 3 шаг. Определяем количество ЭП, количество входов и выходов.*
- 4 шаг. Кодируем состояния, входы и выходы конечного автомата.*
- 5 шаг. Составляем по таблице выходов - минимальные функции выходов.*
- 6 шаг. Составляем таблицу возбуждения памяти и функции ВП (миним.)*
- 7 шаг. Алгебраические функции приводим к единому базису И-НЕ.*
- 8 шаг. Составляем логическую функцию КА в базисе И-НЕ*

Синтез конечных автоматов (v.1)

1 шаг. Построение диаграммы переходов



Автомат
Мили

Синтез конечных автоматов (v.1)

2 шаг. Таблицы переходов и выходов.

$$a(t+1) = \delta[a(t); X(t)]$$

Сост. вх.	a_1	a_2	a_3	a_4
X_1	—	a_3	—	—
X_2	a_3	a_1	a_4	—
X_3	—	—	a_3	—
X_4	a_4	a_4	—	a_2

$$Y(t) = \lambda[a(t); X(t)]$$

Сост. вх.	a_1	a_2	a_3	a_4
X_1	—	Y_1	—	—
X_2	Y_3	Y_2	Y_2	—
X_3	—	—	Y_4	—
X_4	Y_4	Y_3	—	Y_1

Автомат

Миди

Синтез конечных автоматов (v.1)

3 шаг. Определение входных данных

Для этого используем

$$K=4 \quad [a_k]$$

$$P=4 \quad [X_i]$$

$$A=4 \quad [Y_j]$$

Определяем число элементов памяти:

$$r \geq \log_2 K = 2$$

Число разрядов входной шины:

$$n \geq \log_2 P = 2$$

Число разрядов выходной шины:

$$m \geq \log_2 S = 2$$

Автомат

Миди

Синтез конечных автоматов (v.1)

4 шаг. Кодируем состояния, входы и выходы.

Внутреннее состояние		Входные шины		Выходные шины	
$a_1=$	00	$X_1=$	00	$Y_1=$	00
$a_2=$	01	$X_2=$	01	$Y_2=$	01
$a_3=$	10	$X_3=$	10	$Y_3=$	10
$a_4=$	11	$X_4=$	11	$Y_4=$	11
	Q_1Q_2		x_1x_2		y_1y_2

Автомат

Миди

Синтез конечных автоматов (v.1)

4 шаг. Кодируем переходы и выходы.

Таблица переходов

x_1x_2 Q^1Q^2	00	01	10	11
00	—	10	—	—
01	10	00	11	—
10	—	—	10	—
11	11	11	—	01

Таблица выходов

x_1x_2 Q^1Q^2	00	01	10	11
00	—	00	—	—
01	10	01	01	—
10	—	—	11	—
11	11	10	—	00

Автомат
Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

5 шаг. Минимизация функций выходов.

$$y_1 = \overline{x_1}x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1\overline{x_2}Q_1\overline{Q_2}; \quad (1)$$

$$y_2 = x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee \overline{x_1}x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee \overline{x_1}x_2Q_1\overline{Q_2} \vee x_1\overline{x_2}Q_1\overline{Q_2}. \quad (2)$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00	X		X	X
01	1			X
11	1	1		X
10			X	1

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00	X		X	X
01		1		1
11	1	X		X
10			X	1

$$y_1 = Q_1\overline{Q_2} \vee x_2\overline{Q_2} \vee \overline{Q_1}x_1x_2;$$

$$y_2 = Q_1\overline{Q_2} \vee \overline{Q_1}x_1x_2 \vee x_2\overline{Q_1}Q_2.$$

Автомат

Мини

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Функции возбуждения памяти (ВП)
 строятся на основе таблицы переходов и таблицы истинности триггеров различных типов, которые являются основой элементов памяти (ЭП) конечного автомата .

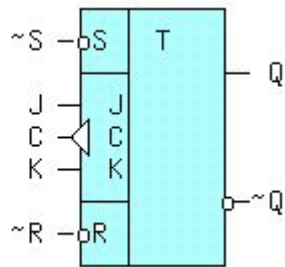
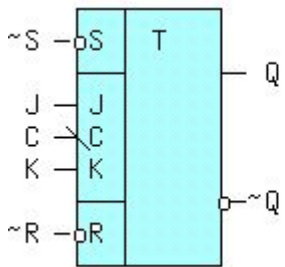


Рис.45.

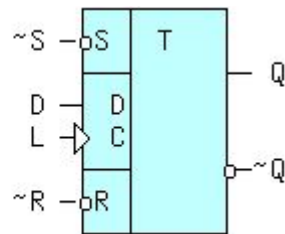
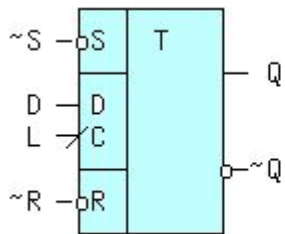
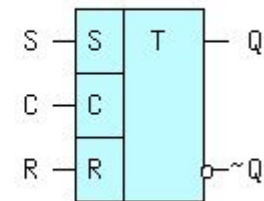
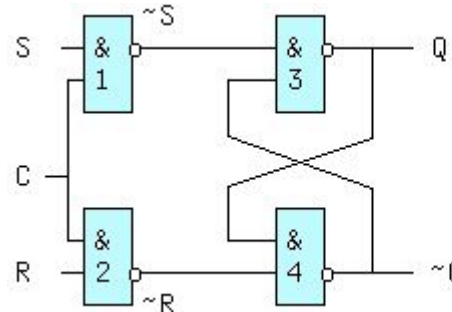


Рис.43.

$Q(t)$	$Q(t+1)$	S	R	D	J	K
0	0	0	X	0	0	X
0	1	1	0	1	1	X
1	0	0	1	0	X	1
1	1	X	0	1	X	0



Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Таблица функций ВП.

вх. сигн	Q ₁ 0 Q ₂ 0				Q ₁ 0 Q ₂ 1				Q ₁ 1 Q ₂ 0				Q ₁ 1 Q ₂ 1			
	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂
00	○				0	1	1	0	○				○			
01	0	1	-	0	-	0	1	0	0	-	0	1	○			
10	○				○				0	-	-	0	○			
11	0	1	0	1	0	1	0	-	○				1	0	0	-

$$\begin{cases} R_1 = x_1 x_2 Q_1 Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \overline{x_1} x_2 \overline{Q_1} \overline{Q_2} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{Q_1} \overline{Q_2} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{Q_1} Q_2 \vee x_1 x_2 \overline{Q_1} Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 = \overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{Q_1} Q_2} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{Q_1} \overline{Q_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2 = x_1 x_2 \overline{Q_1} \overline{Q_2} \vee \overline{x_1} x_2 Q_1 \overline{Q_2} \end{cases}$$

Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Минимизация функций ВП.

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00				
01		X		
11			1	
10				

$$R_{1min} = x_1x_2Q_1Q_2$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00		1		
01	1			X
11	1	1		
10				X

$$S_{1min} = x_2\overline{Q_1}\overline{Q_2} \vee x_1x_2\overline{Q_1} \vee x_1x_2Q_1Q_2$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00		1		
01	X	1		
11				
10				X

$$R_{2min} = \overline{x_1}\overline{Q_1}Q_2$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00				
01				1
11	1	X	X	
10				

$$S_{2min} = x_1x_2\overline{Q_1} \vee \overline{x_1}x_2Q_1\overline{Q_2}$$

Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

7 шаг. Система уравнений (И-НЕ) – структура КА

$$R_1 = x_1 x_2 Q_1 Q_2$$

$$S_1 = \overline{(x_2 Q_1 Q_2)} \overline{(x_1 x_2 Q_1)} \overline{(x_1 x_2 Q_1 Q_2)}$$

$$R_2 = \overline{x_1} Q_1 Q_2$$

$$S_2 = \overline{(x_1 x_2 Q_1)} \overline{(x_1 x_2 Q_1 Q_2)}$$

$$y_1 = \overline{(Q_1 Q_2)} \overline{(x_2 Q_2)} \overline{(x_1 x_2 Q_1)}$$

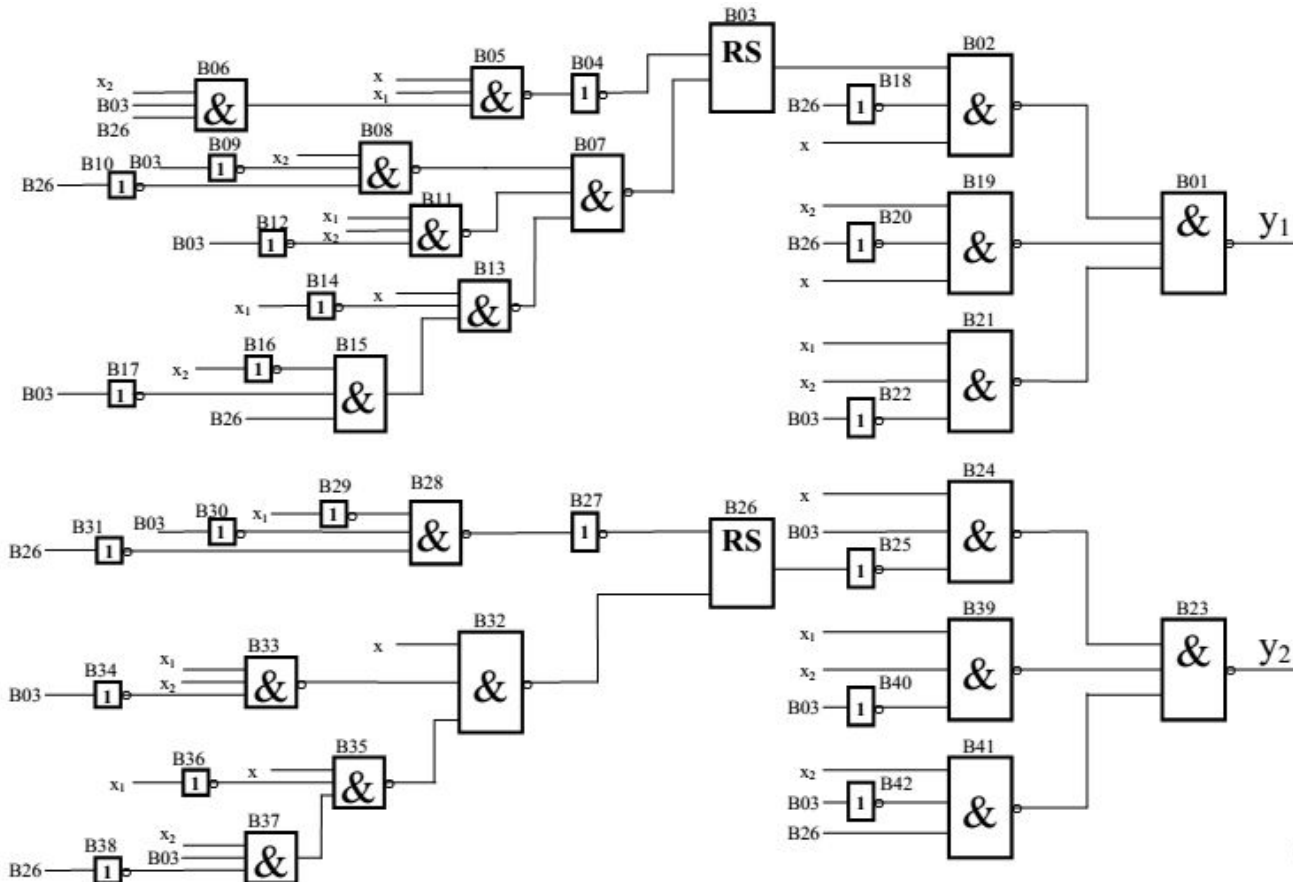
$$y_2 = \overline{(Q_1 Q_2)} \overline{(x_1 x_2 Q_1)} \overline{(x_2 Q_1 Q_2)}$$

Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

7 шаг. Логическая структура КА



Автомат

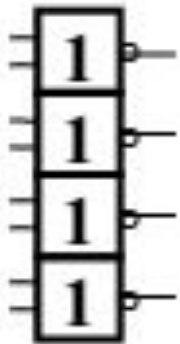
Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

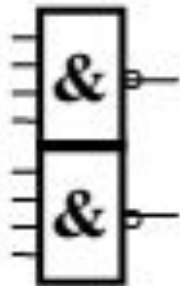
7 шаг. Система уравнений (И-НЕ) □
структура КА

Логические элементы. степени

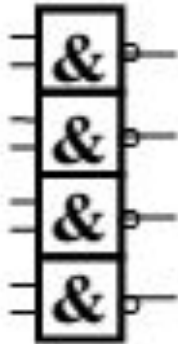
K176ЛЕ5



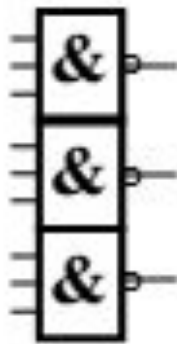
K176ЛА8



K176ЛА7



K176ЛА9



DD1 – K176ЛЕ5

DD2 – K176ЛА8

DD3 – K176ЛА7

DD4 – K176ЛА9

DD5 – K176ТВ1

НЕ (6)

8И-НЕ (1)

RS\D-триггер: 133ТМ2

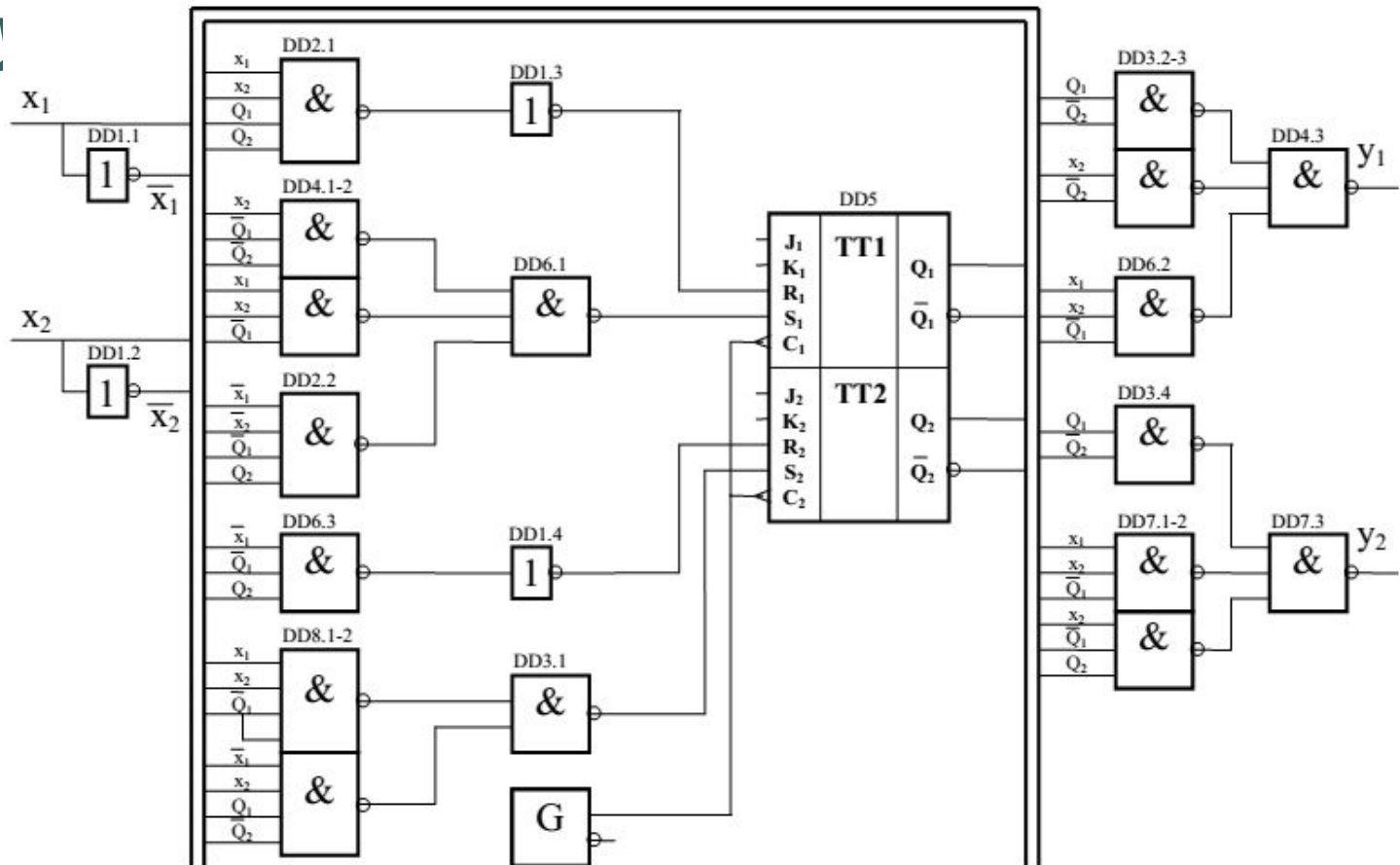
(2)
Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

7 шаг. Система уравнений (И-НЕ) □

стр.

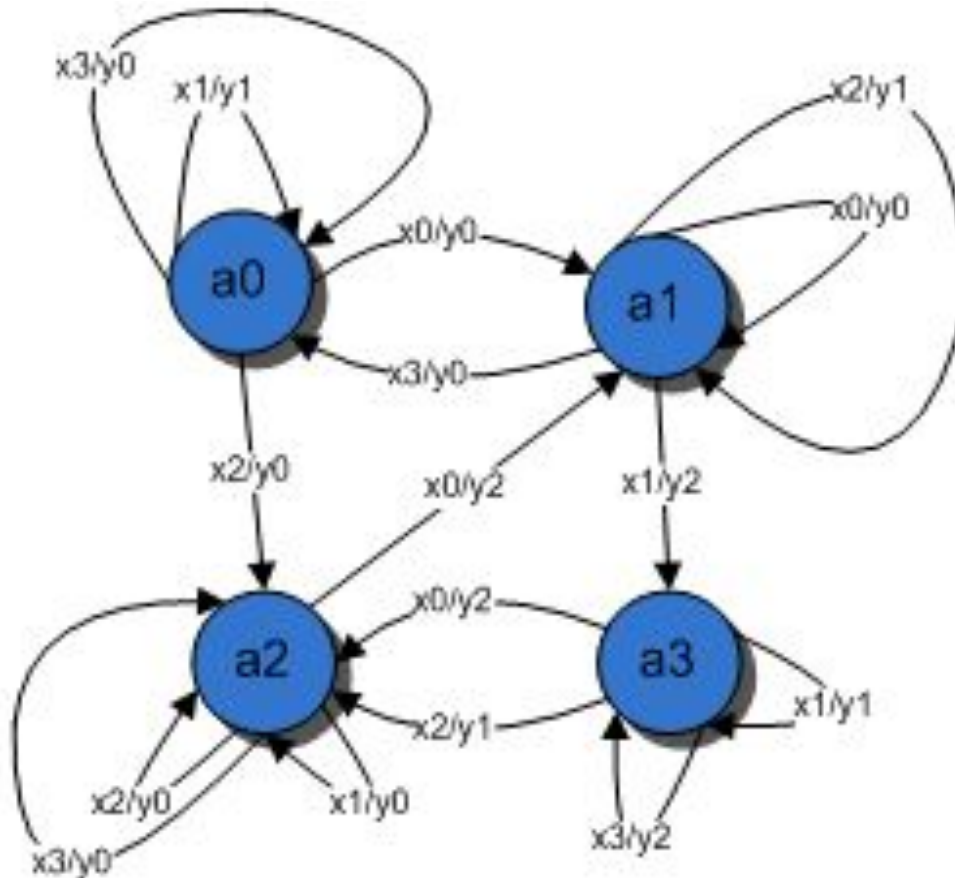


Автомат

M

СИНТЕЗ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ (v.2)

1 шаг. Построение диаграммы переходов



Автомат
Мульти

СИНТЕЗ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ (v.2)

2 шаг.

Таблица переходов: Таблица выходов:

	a_0	a_1	a_2	a_3
X_0	a_1	a_1	a_3	a_1
X_1	a_0	a_2	a_2	a_3
X_2	a_3	a_1	a_3	a_3
X_3	a_0	a_0	a_2	a_3

	a_0	a_1	a_2	a_3
X_0	y_0	y_0	y_2	y_2
X_1	y_1	y_2	y_1	y_0
X_2	y_0	y_1	y_1	y_0
X_3	y_0	y_0	y_2	y_0

СИНТЕЗ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ (v.2)

3 шаг.

Определение разрядности автомата.

$$k = 4[a_k], \quad p = 4[x_p], \quad s = 3[y_s]$$

Число элементов памяти r :

$$\log_2 k \leq r < \log_2 k + 1, \quad r = 2$$

Число разрядов входной шины n :

$$\log_2 p \leq n < \log_2 p + 1, \quad n = 2$$

Число разрядов выходной шины

$$m: \quad \log_2 s \leq m < \log_2 s + 1, \quad m = 2$$

Структурный синтез конечных автоматов

4 шаг.

Кодирование автомата.

<i>состояния</i>	<i>Q1</i>	<i>Q0</i>
<i>a₀</i>	0	0
<i>a₁</i>	0	1
<i>a₂</i>	1	0
<i>a₃</i>	1	1

<i>Входная шина</i>	<i>X1</i>	<i>X0</i>
<i>x₀</i>	0	0
<i>x₁</i>	0	1
<i>x₂</i>	1	0
<i>x₃</i>	1	1

<i>Выходная шина</i>	<i>Y1</i>	<i>Y0</i>
<i>y₀</i>	0	0
<i>y₁</i>	0	1
<i>y₂</i>	1	0

Структурный синтез конечных автоматов

5 шаг.

Таблицы переходов и выходов (все состояния, входы, выходы в закодированном виде)

Таблица переходов:

Q_1Q_0 X_1X_0	00	01	10	11
00	01	01	11	01
01	00	10	10	11
10	11	01	11	11
11	00	00	10	11

Таблица выходов:

Q_1Q_0 X_1X_0	00	01	10	11
00	00	00	11	10
01	01	10	01	00
10	00	01	01	00
11	00	00	10	00

Структурный синтез конечных автоматов

6 шаг. Минимизация функций выходов Y_0 и Y_1

Таблица выходов по Y_0

Q, X, X_0	0	0	1	1
0 0	0	0	1	1
0 1	0	1	0	0
1 1	0	0	0	1
1 0	0	0	0	0

Таблица выходов по Y_1

Q, X, X_0	0	0	1	1
0 0	0	0	0	0
0 1	1	0	0	1
1 1	0	0	0	0
1 0	0	1	0	1

Структурный синтез конечных автоматов

6 шаг. Получаем функции выходов:

$$Y_0 = \bar{x}_0 \bar{x}_1 Q_1 + x_0 \bar{x}_1 Q_0 \bar{Q}_1 + x_0 x_1 \bar{Q}_0 Q_1$$

$$Y_1 = x_0 \bar{x}_1 \bar{Q}_0 + \bar{x}_0 x_1 Q_0 \bar{Q}_1 + \bar{x}_0 x_1 \bar{Q}_0 Q_1$$

7 шаг. Построение таблицы возбуждения памяти

В качестве элементной базы используем элементы памяти RS-триггеры, JK-триггеры, D-триггеры (получаются наиболее простые логические выражения)

Структурный синтез конечных автоматов

7 шаг. Построение таблицы возбуждения памяти

$Q(t)$	$Q(t+1)$	S	R	D	J	K
0	0	0	X	0	0	X
0	1	1	0	1	1	X
1	0	0	1	0	X	1
1	1	X	0	1	X	0

Таблица истинности RS-, JK- и D-триггеров

Функция возбуждения памяти, построенной на D-триггерах

Q_1Q_0 X_1X_0	00	01	10	11
	D_0D_1	D_0D_1	D_0D_1	D_0D_1
00	01	01	11	01
01	00	10	10	11
10	11	01	11	11
11	00	00	10	11

Алгоритм синтеза конечных автоматов

7 шаг. Составляем и минимизируем

функцию возбуждения памяти автомата, построенной на D-триггерах выглядят таким образом.

По таблице возбуждения памяти автомата, построенной на D-триггерах, запишем ФВП D_0 и D_1

D_0 :

$Q_1 \backslash X, X_0$	0	0	1	1
0 0	0	0	0	1
0 1	0	1	1	1
1 1	0	0	1	1
1 0	1	0	1	1

D_1 :

$Q_1 \backslash X, X_0$	0	0	1	1
0 0	1	1	1	1
0 1	0	0	1	0
1 1	0	0	1	0
1 0	1	1	1	1

Структурный синтез конечных автоматов

7 шаг. Получаем

Функции возбуждения памяти D_0 и D_1 автомата, построенной на D-триггерах – T_0 и T_1 :

$$D_0 = x_1 Q_1 + \bar{Q}_0 Q_1 + x_0 \bar{x}_1 Q_0 + \bar{x}_0 x_1 \bar{Q}_0$$

$$D_1 = \bar{x}_0 + Q_0 Q_1$$

В базисе И-

НЕ

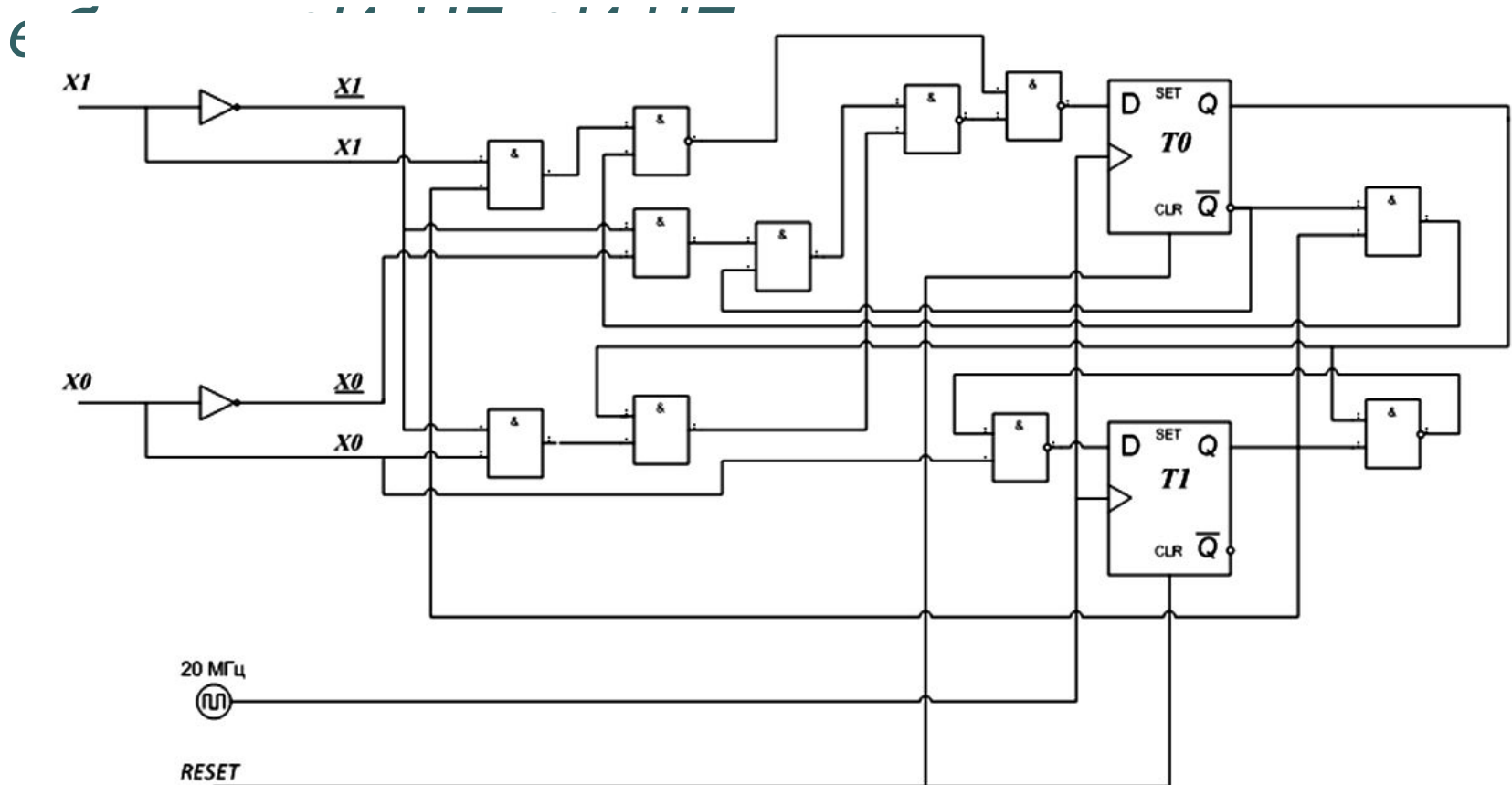
$$D_0 = \overline{\overline{x_1 Q_1 \bar{Q}_0 Q_1} \overline{x_0 \bar{x}_1 Q_0 \bar{x}_0 x_1 \bar{Q}_0}}$$

$$D_1 = x_0 \overline{Q_0 Q_1}$$

Структурный синтез конечных

автоматов

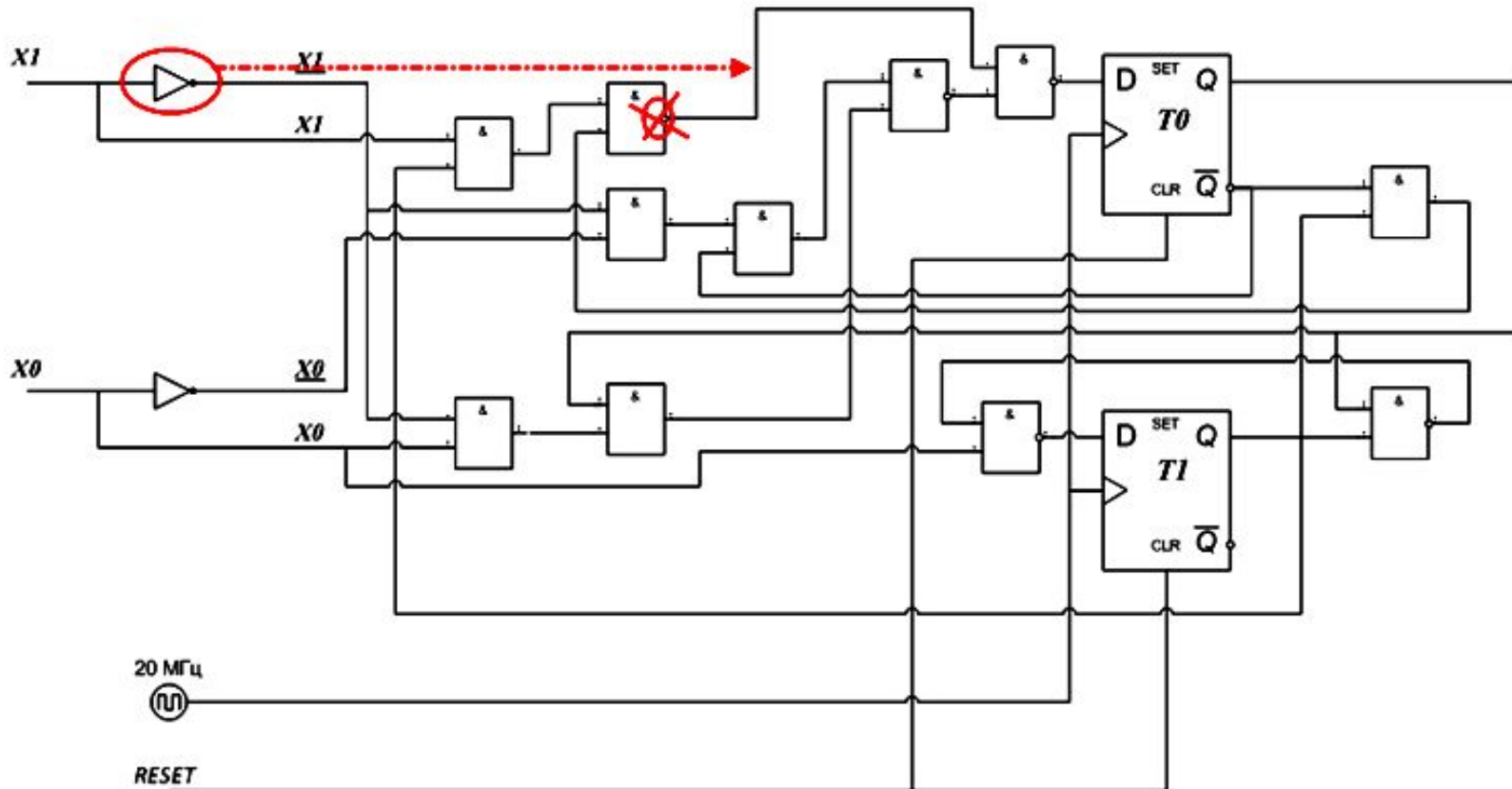
8 шаг. Составляем схему Э2(3)* для аппаратного КА



Структурный синтез конечных автоматов

автоматов

9 шаг. Минимизируем количество корпусов ТТЛШ ИС для аппаратного КА в базисе 2И, НЕ, 2И-Н⁻



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

Основные задачи и цели

PLD – Programmable logic devices или

ПЛИС – программируемые интегральные схемы

позволяют путем конфигурирования исходной структуры получать различные комбинационные или

последовательностные схемы. Любая ФАЛ или КА, которые можно синтезировать на жесткой логике, могут быть синтезированы на ПЛИС.

Общее требование – наличие средств изменения взаимных связей м\д элементами для формирования требуемых логических конфигураций.

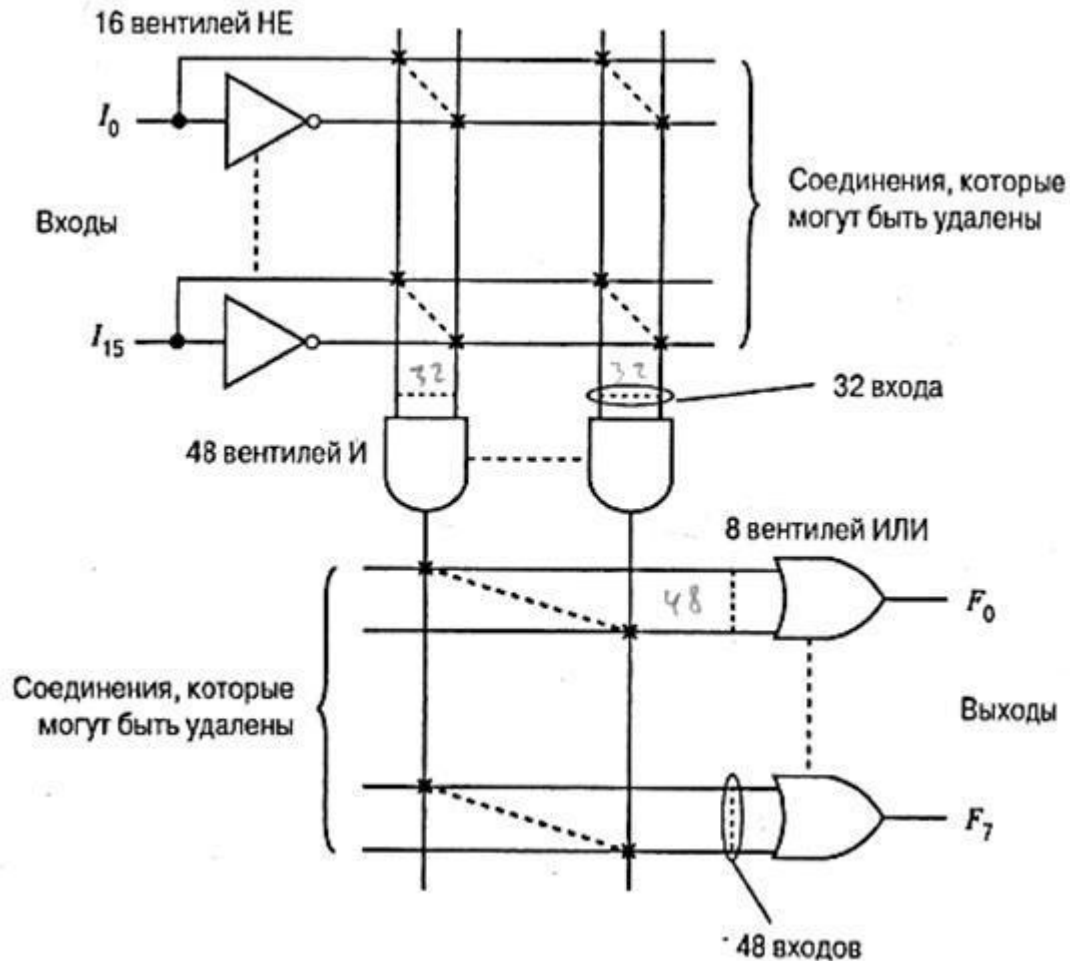
Типы ПЛИС

- 1. ПЛМ (Программируемые логические матрицы) (programmable logic arrays – PLA)*
- 2. ПМЛ (Программируемая матричная логика) (programmable array logic -PAL)*
- 3. Регистровые ПЛИС – (PAL xxRx)*

Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

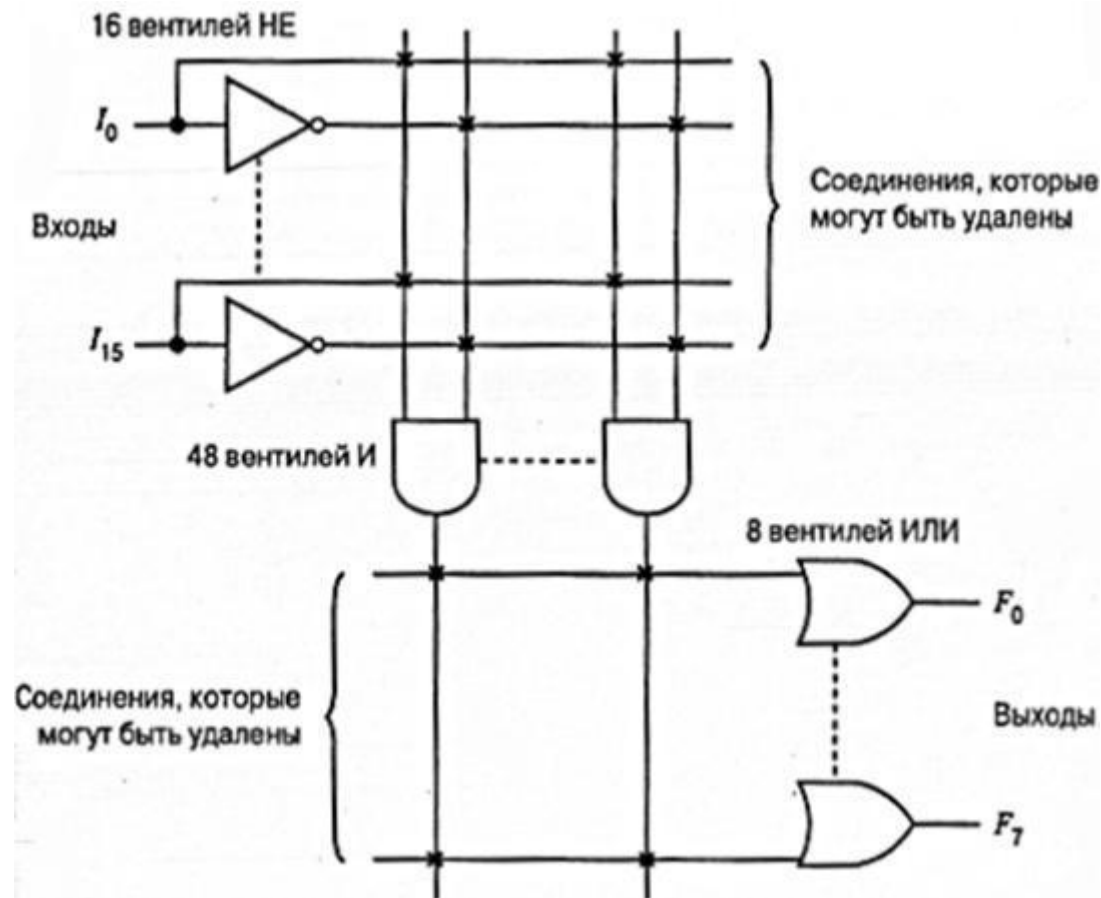
Функциональная схема ПЛМ



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

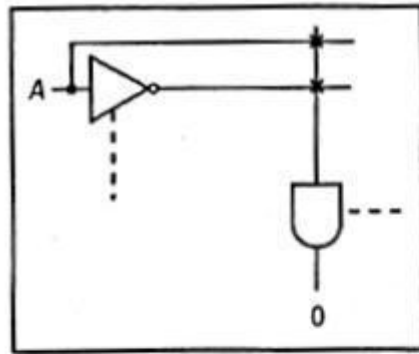
Упрощенная функциональная схема ПЛМ



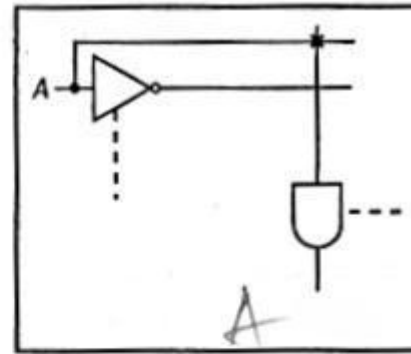
Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

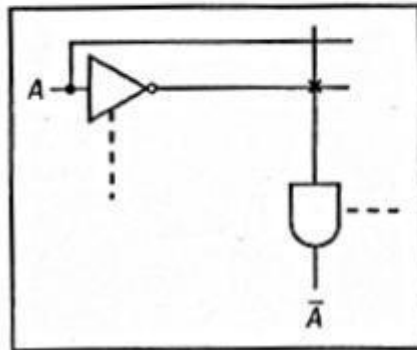
Основные константы и переменные ПЛМ



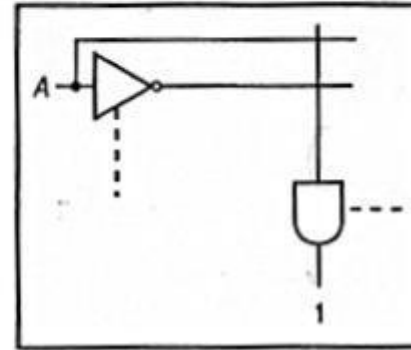
(а) Незапрограммированное состояние



(б) Выбор переменной в прямой форме



(в) Выбор переменной в инверсной форме

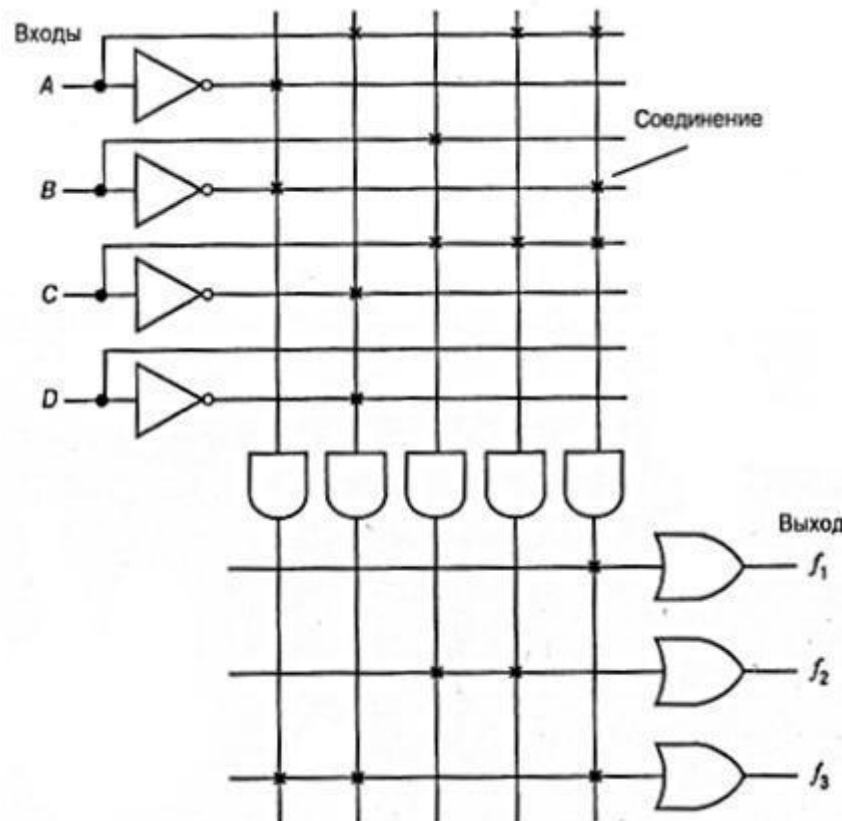


(г) Переменная не выбрана

Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

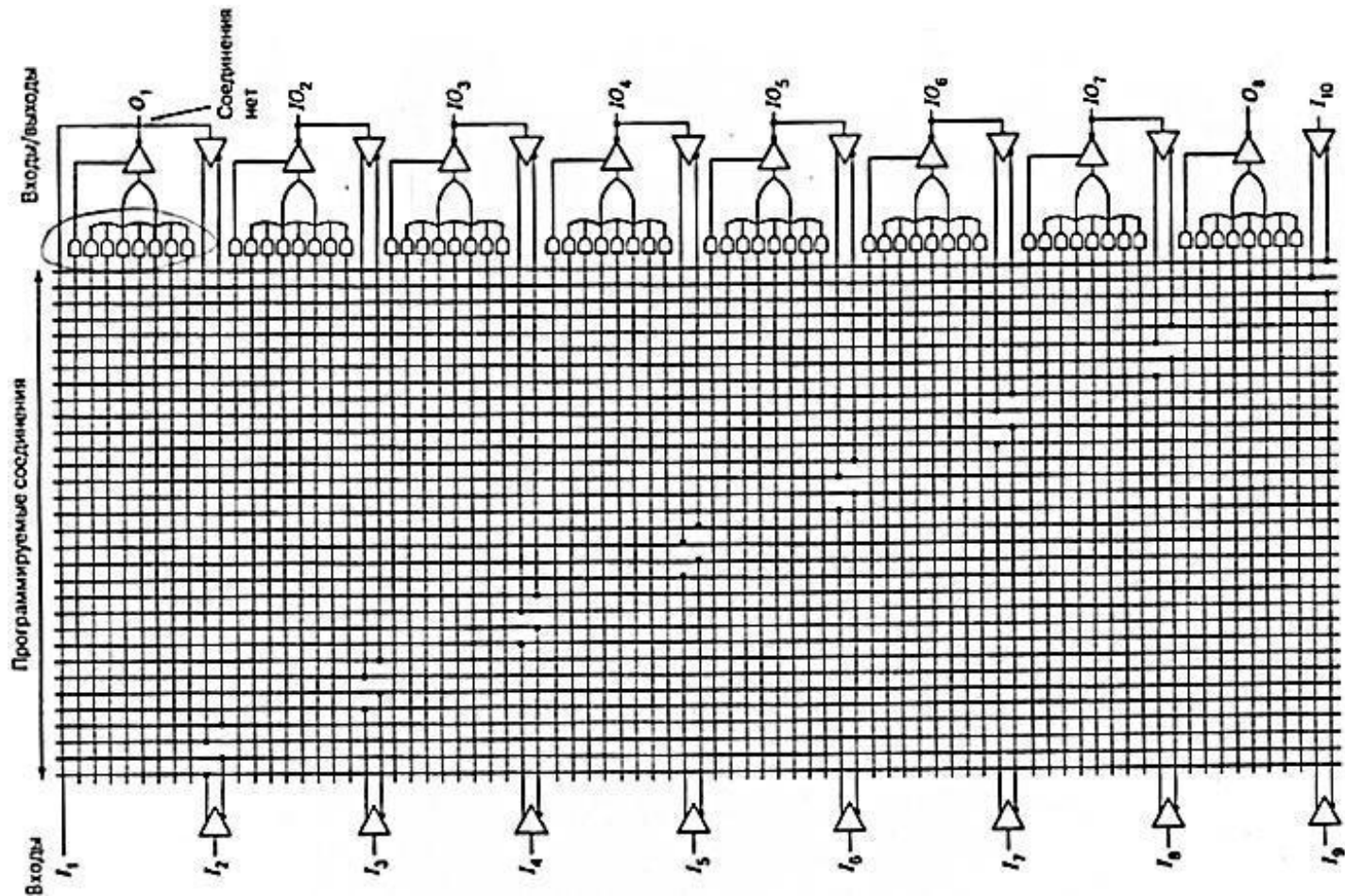
Основные типы ПЛИС



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

ПЛИС AMD PAL 16L8

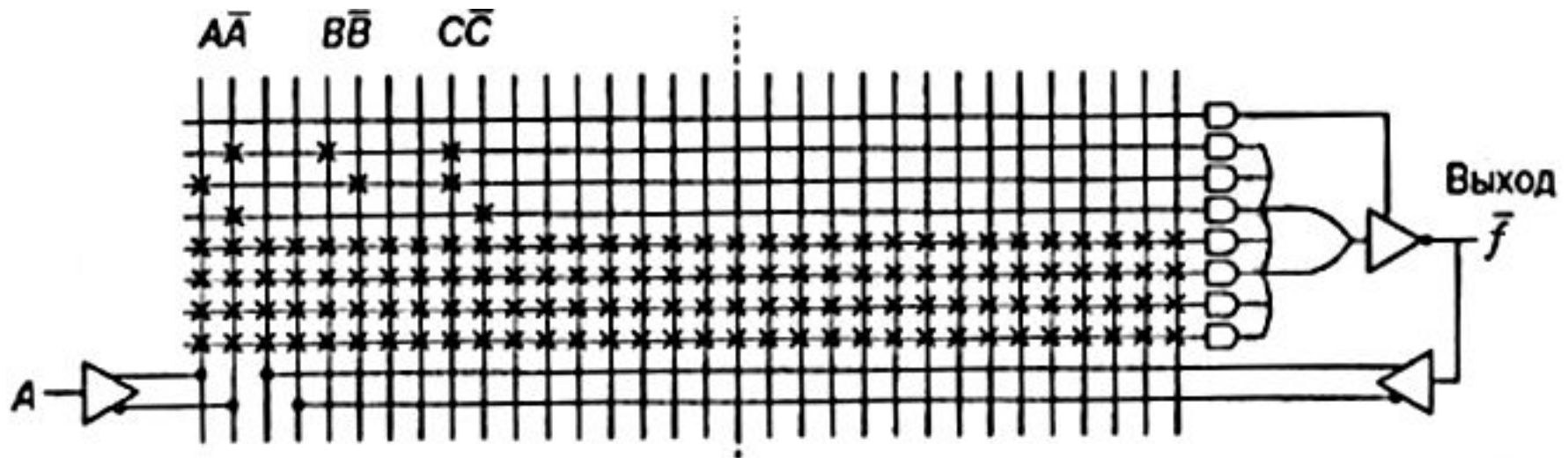


ПЛИС AMD PAL16L8

Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

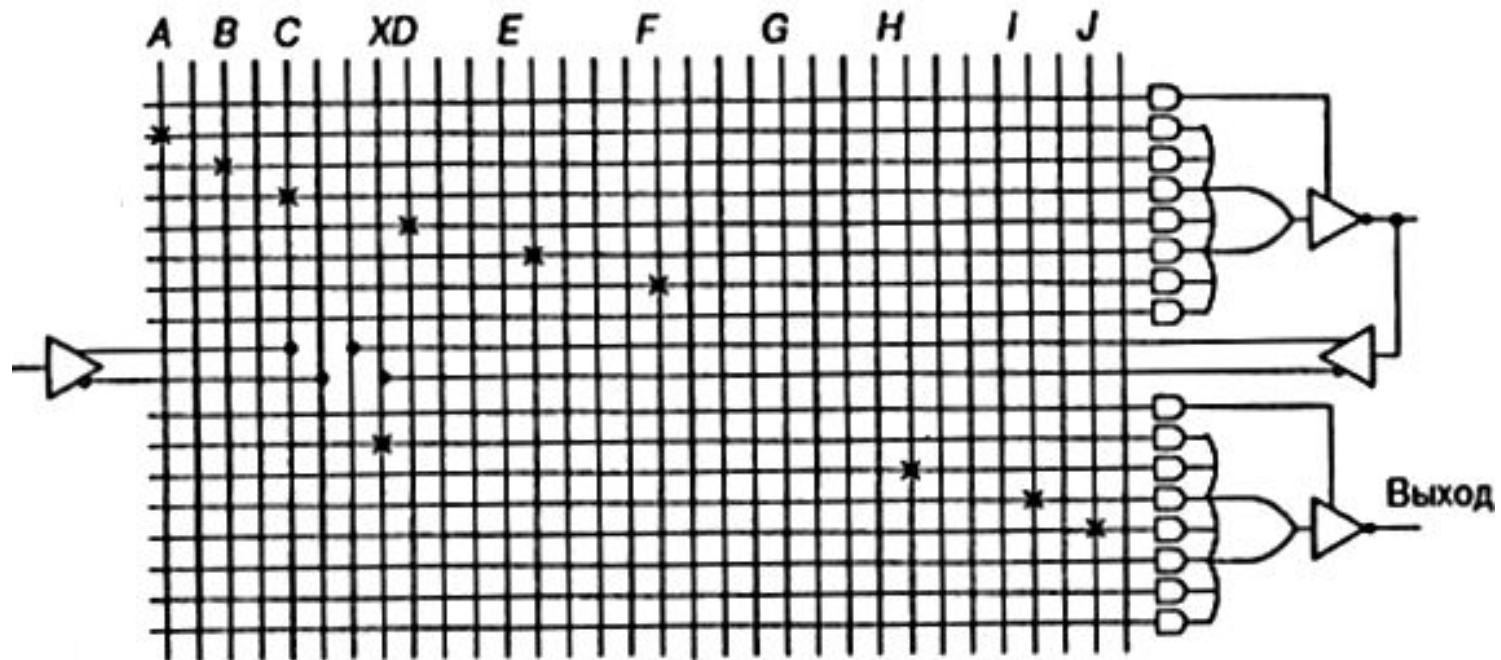
Процесс программирования ПЛМ



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

Запрограммированная ПЛМ

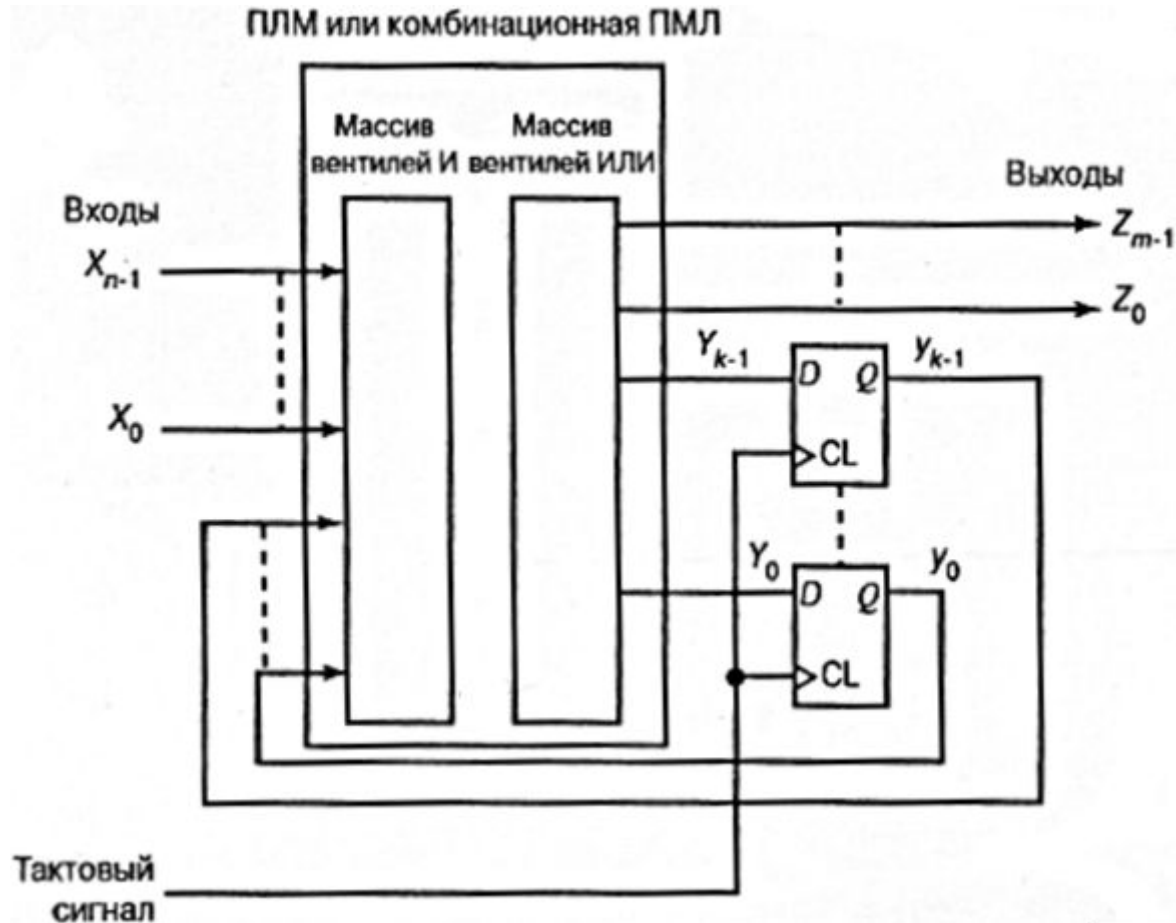


Соединения с неиспользуемыми вентилями И не показаны

Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

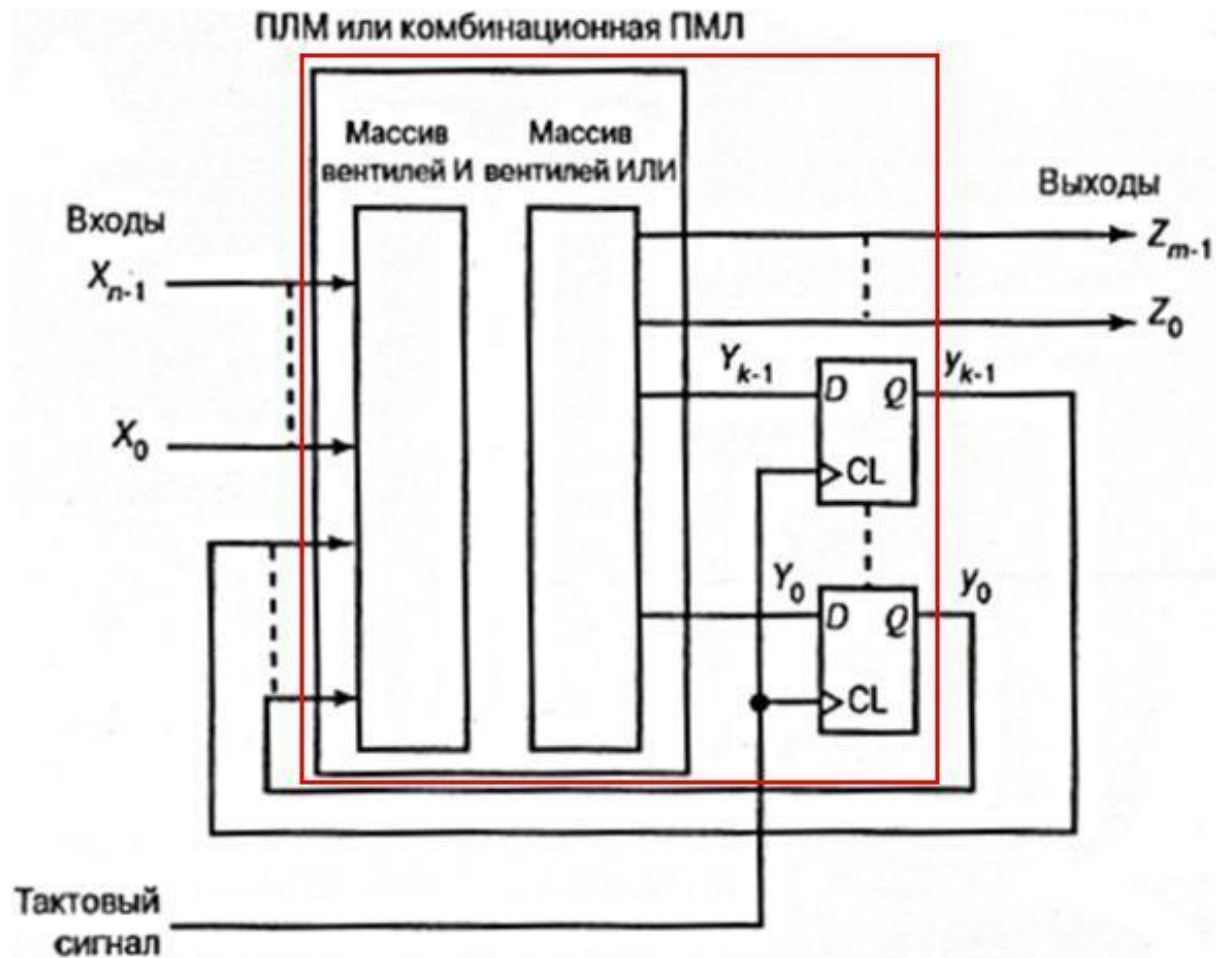
Автомат Мули на ПЛМ или комбинационной ПМЛ



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

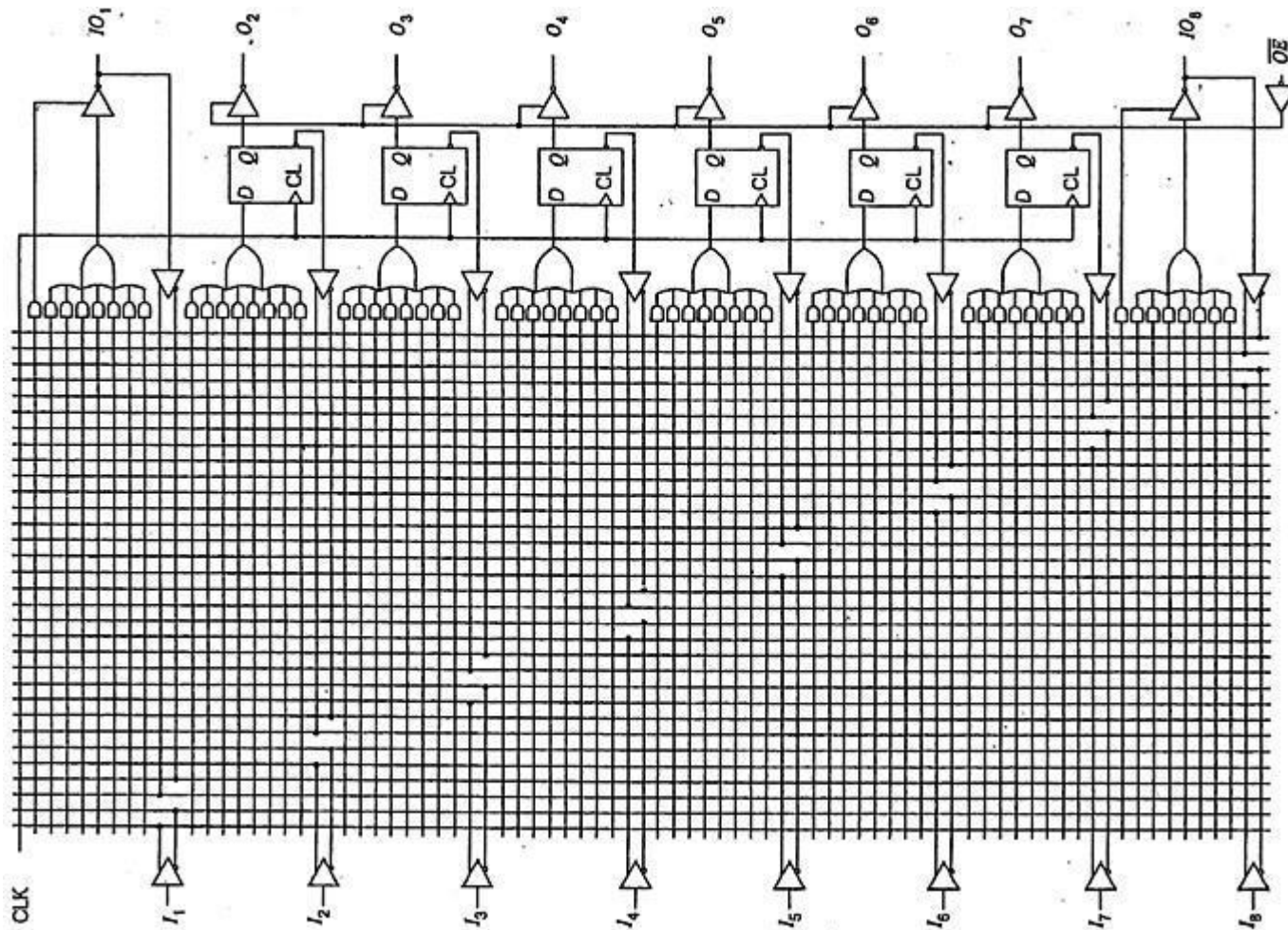
Автомат Мули на ПМЛ



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

ПМЛ AMD PAL 16R6



Теория автоматов

Синтез конечных автоматов на ПЛИС

ПЛИС AMD PAL 16xx

