

Основы автоматического управления

Лекция 10

Составитель:
Шендалева Е.В., к.т.н., доцент каф. НГД ОмГТУ

Устойчивость систем с запаздыванием и систем с иррациональными звеньями

Все реальные системы автоматического регулирования являются системами с запаздыванием. Необходимым и достаточным условием устойчивости линейных систем с постоянным запаздыванием является расположение всех корней характеристического уравнения в левой полуплоскости.

Непосредственное нахождение корней характеристического уравнения затруднительно, в связи с его трансцендентностью, поэтому применяют критерии устойчивости. Однако в обычной форме применим только критерий устойчивости Найквиста.

Если $W_{p.c}(i\omega)$ – амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы без запаздывания, а $W_{p.c.\tau}(i\omega)$ – амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы с запаздыванием τ , то можно записать:

$$W_{p.c.\tau}(i\omega) = W_{p.c}(i\omega) e^{-i\omega\tau};$$

$$M_{\tau}(\omega) = M(\omega);$$

$$\phi_{\tau}(\omega) = \phi(\omega) - \omega\tau.$$

Графики АФХ разомкнутых систем без запаздывания и с запаздыванием представлены на рис. 10.1. Как видно из графика, АФХ разомкнутой системы с запаздыванием закручивается, так как при изменении частоты от 0 до $+\infty$ фаза изменяется от 0 до $-\infty$.

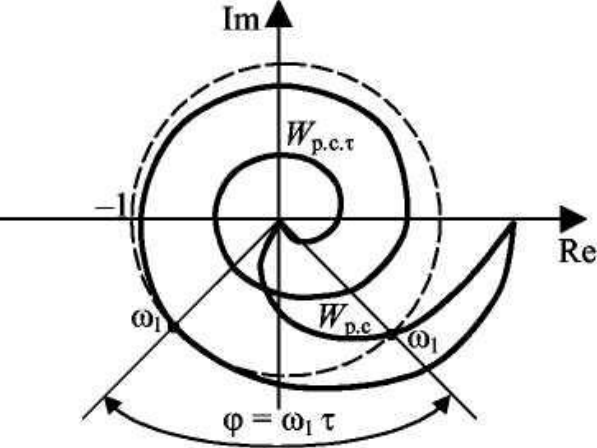


Рис. 10.1 АФХ разомкнутой системы с запаздыванием

Если изменять время запаздывания, то можно найти, так называемое, критическое значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости. Для этого критического случая справедлива запись

$$W_{p.c.\tau}(i\omega_{кр}) = W_{p.c.}(i\omega_{p.c.}) \cdot e^{-i\omega_{кр}\tau_{кр}} = M(\omega_{кр}) \cdot e^{i(\varphi(\omega_{кр}) - \omega_{кр}\tau_{кр})} = -1 \quad (10.1)$$

Из (10.1) можно записать значения фазочастотной характеристики, при которых пересекается отрицательная полуось действительной оси

$$\phi_{\tau}(i\omega_{кр}) = \phi(\omega_{кр}) - \omega_{кр}\tau_{кр} = -\pi(2j + 1), \quad (10.2)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$, откуда

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \varphi(\omega_{кр})}{\omega_{кр}} + \frac{2\pi}{\omega_{кр}} j \quad (10.3)$$

Минимальное критическое время запаздывания является граничным и определяется при $j = 0$

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \varphi(\omega_{кр})}{\omega_{кр}} = \frac{\varphi(\omega_{кр})}{\omega_{кр}}. \quad (10.4)$$

Его можно определить и графическим способом, для этого проводится окружность единичного радиуса на плоскости АФХ, ее пересечение с АФХ разомкнутой системы без запаздывания определяет $\varphi(\omega_{кр})$, а с запаздыванием позволяет определить $\omega_{кр}$ и, соответственно, $\tau_{кр}$.

Обеспечение устойчивости

Устойчивые и неустойчивые звенья и соединения

Все звенья систем автоматического регулирования подразделяются на **устойчивые и неустойчивые**. Так, **элементарные звенья**, как уже отмечалось, являются **устойчивыми**, исключение составляет интегрирующее звено, относящееся к группе **нейтральных звеньев**. Неустойчивые звенья имеют **полюсы в правой полуплоскости** и наиболее распространенным примером таких звеньев является **квазиинерционное звено**.

На устойчивость систем оказывают влияние параметры регулируемого объекта. **Для того, чтобы система была стабильной, необходимо обеспечить требуемый запас устойчивости**, причем, если параметры определены приближенно или могут изменяться в процессе эксплуатации системы, то запас устойчивости следует задать большим, чем при точно установленных и неизменных параметрах.

Состояние устойчивости можно обеспечить путем выбора настроек регуляторов системы регулирования.

Прежде всего определяют настройки регуляторов, при которых корни характеристического уравнения замкнутой системы находятся на мнимой оси (САР находится на границе устойчивости), затем по известным методикам создают устойчивую САР с заданными свойствами.

Синтез устойчивых систем

Согласно критерию Найквиста **граница устойчивости**

$$W_{об}(i\omega) \cdot W_{рег}(S_0, S_1, S_2, i\omega) = -1, \quad (1045)$$

что геометрически отражает факт прохождения АФХ разомкнутой системы через точку $(-1, i0)$. Здесь $W_{рег}(S_0, S_1, S_2, i\omega)$ – АФХ ПИД-регулятора; S_0, S_1, S_2 – настройки ПИД-регулятора.

Известно, из ПИД-закона регулирования можно получить различные законы регулирования. Рассмотрим синтез устойчивой одноконтурной системы регулирования с различными типами регуляторов.

Построение границы устойчивости для системы с ПИ-регулятором

Граница устойчивости для системы с ПИ-регулятором

$$W_{об}(i\omega) \cdot W_{рег}(S_0, S_1, i\omega) = -1. \quad (10.6)$$

Тогда АЧХ и ФЧХ системы с ПИ-регулятором

$$\begin{aligned} M_{об}(\omega) \cdot M_{рег}(S_0, S_1, \omega) &= 1; \\ \phi_{об}(\omega) + \phi_{рег}(S_0, S_1, \omega) &= -\pi \end{aligned} \quad (10.6a)$$

или вещественные и мнимые частотные характеристики

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_{p.c}(\omega, S_0, S_1) &= -1; \\ \operatorname{Im}_{p.c}(\omega, S_0, S_1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.6b)$$

В плоскости параметров настроек S_0, S_1 ПИ-регулятора строится граница устойчивости (рис. 10.3) по уравнениям (10.6), из которых по заданной частоте определяются настройки S_0 и S_1 . Полученная кривая и является границей устойчивости, ниже этой кривой располагается область устойчивой работы, а выше – область неустойчивой работы системы регулирования. Точки 1 и 2 на границе устойчивости соответствуют устойчивости систем с П- и И-регулятором.

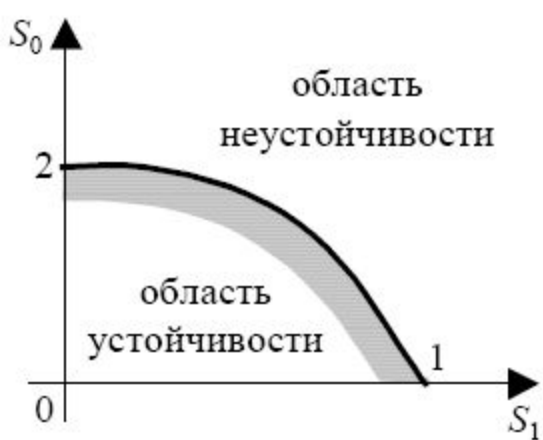


Рис. 10.2 Граница устойчивости САР

Границы устойчивости для системы с П-регулятором

Если в системе автоматического регулирования использован П-регулятор с передаточной функцией $W_{рег}(s) = -S_1$, то система уравнений (10.6а) принимает вид $M_{об}(\omega) \cdot S_1 = 1$;

$$\phi_{об}(\omega) = -\pi. \quad (10.7)$$

Из (10.7) определяют рабочую частоту ω_p (рис. 10.3) и предельное значение настройки, соответствующее границе устойчивости

$$S_{1пред} = \frac{1}{M_{об}(\omega_p)}. \quad (10.8)$$

Предельное значение настройки П-регулятора S_1 можно определить и графическим методом, используя соотношение $W_{об}(i\omega) \cdot S_1 = -1$. Если принять, что $S_1 = 1$, то отрезок d на отрицательной вещественной полуоси полностью определяется АФХ объекта и соответствует ее действительной части при равенстве мнимой нулю. В этом случае АФХ разомкнутой системы совпадает с АФХ объекта.

Увеличение настройки S_1 приводит к тому, что АФХ разомкнутой системы начинает увеличиваться и отсекает на вещественной отрицательной полуоси отрезок $r = d \cdot S_1$ (рис. 10.4). Дальнейшее увеличение S_1 приводит к тому, что при каком-то значении S_1 АФХ разомкнутой системы пройдет через точку $(-1, i0)$, т.е. система выйдет на границу устойчивости $r = 1$. При этом значение S_1 будет являться предельным, $d \cdot S_{1пред} = 1$, следовательно, $S_{1пред} = 1/d$, т.е. для определения настройки достаточно построить АФХ объекта и измерить отрезок d .

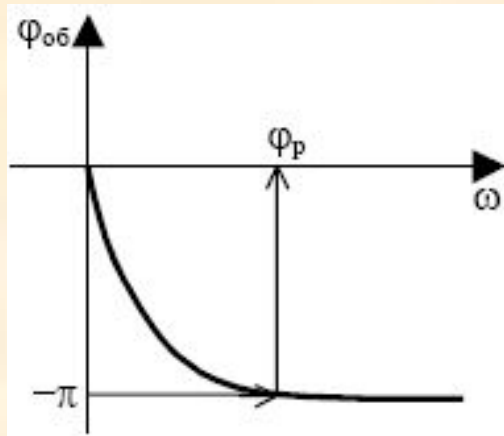


Рис. 10.3 Определение частоты для границы устойчивости системы с П-регулятором

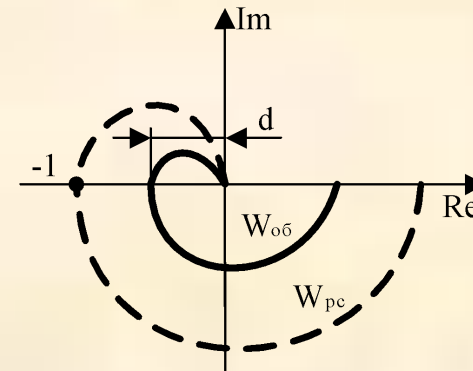


Рис. 10.4 Графическое определение предельного значения настройки П-регулятора

Степень устойчивости может быть использована для оценки времени регулирования монотонных переходных процессов. Касательная к $y = Ce^{-\eta t}$ в точке $t = 0$ отсекает на оси абсцисс отрезок $1/\eta$ (рис. 8.3б). Время регулирования в этом случае определяется как

$$T_p < 3/\eta. \quad (8.3)$$

Если требуется уменьшить время регулирования, то степень устойчивости надо увеличивать. При оценке времени регулирования частота не учитывается.

Границы устойчивости для системы с И-регулятором

Для системы автоматического регулирования с И-регулятором (10.6а) уравнения границы устойчивости

$$\begin{cases} \frac{M_{об}(\omega)S_0}{\omega} = 1; \\ \varphi_{об}(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (10.9)$$

Как и в случае использования П-регулятора, из второго уравнения системы (10.9) определяют рабочую частоту (рис. 10.5), по которой из первого уравнения определяют предельное значение настройки S_0

$$S_{0пред} = \frac{\omega_p}{M_{об}(\omega_p)}. \quad (10.10)$$

При графическом определении предельного значения параметра настройки S_0 систему уравнений (10.9) записывают в виде

$$W_{об}(i\omega) \left(\frac{S_0}{\omega} \right) e^{-i\pi/2} = -1. \quad (10.11)$$

Строится АФХ объекта, а затем АФХ разомкнутой системы при $S_0 = 1$ (рис. 10.6). Для построения последней вектор АФХ объекта необходимо развернуть на угол $-\pi/2$, а его модуль разделить на ω . В результате построения определяется отрезок d , отсекаемый АФХ разомкнутой системы на отрицательной вещественной полуоси. Увеличение значения настройки S_0 приводит к тому, что АФХ разомкнутой системы будет отсекал на отрицательной вещественной полуоси отрезок r , определяемый как $r = S_0 d$.

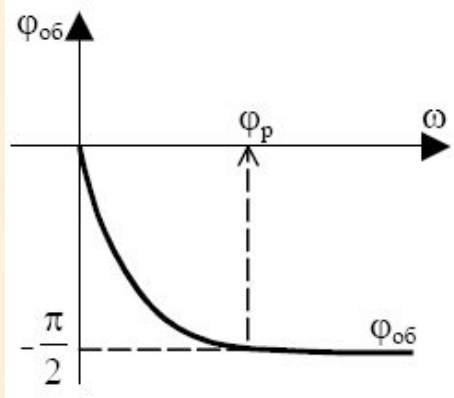
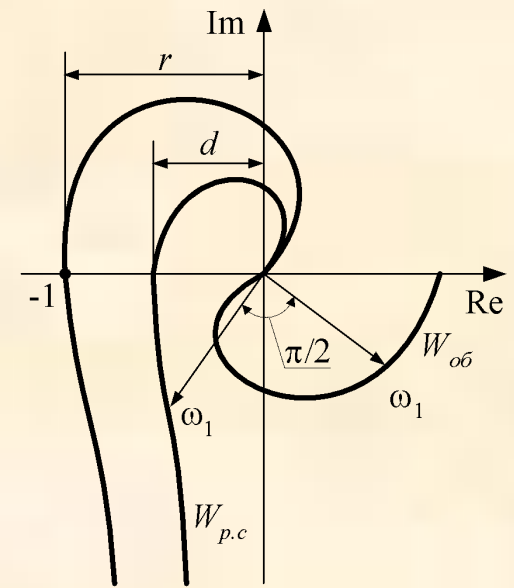


Рис. 10.5 Определение частоты для границы устойчивости системы с И-регулятором

Рис. 10.6 Графическое определение предельного значения настройки И-регулятора



Дальнейшее увеличение S_0 приводит к тому, что АФХ разомкнутой системы пройдет через точку $(-1, i0)$, и, следовательно, $r = 1$, а отсюда предельное значение настройки И-регулятора определится как $S_{0пред} = 1/d$.

Таким образом, для того, чтобы создать устойчивую систему, необходимо выбирать настройки П– и И–регулятора меньше предельных значений, а ПИ–регулятора – из области, расположенной ниже границы устойчивости.

Оценка запаса устойчивости

Синтез устойчивых систем, находящихся вблизи границы устойчивости и не обладающих необходимым запасом устойчивости, не удовлетворяет ни одну реальную систему, так как любое изменение переменных, даже незначительное, может вывести систему из устойчивого режима. В связи с этим **необходимо количественно оценивать запас устойчивости**. Наиболее распространены корневые и частотные методы оценки запаса устойчивости.

Корневые методы оценки запаса устойчивости

Границей устойчивости в плоскости корней характеристического уравнения является мнимая ось, поэтому, чем ближе корни характеристического уравнения располагаются к мнимой оси, тем ближе система находится к границе устойчивости. Следовательно, оценить запас устойчивости можно по расположению корней характеристического уравнения. Такой оценкой является степень устойчивости η , которая определяется расстоянием от ближайшего корня до мнимой оси (рис. 10.7а).

Если запас устойчивости задан через показатель $\eta_{зад}$, то система должна иметь степень устойчивости больше или равную заданной $\eta \geq \eta_{зад}$, и область расположения корней будет находиться слева от прямой $\eta = \eta_{зад}$.

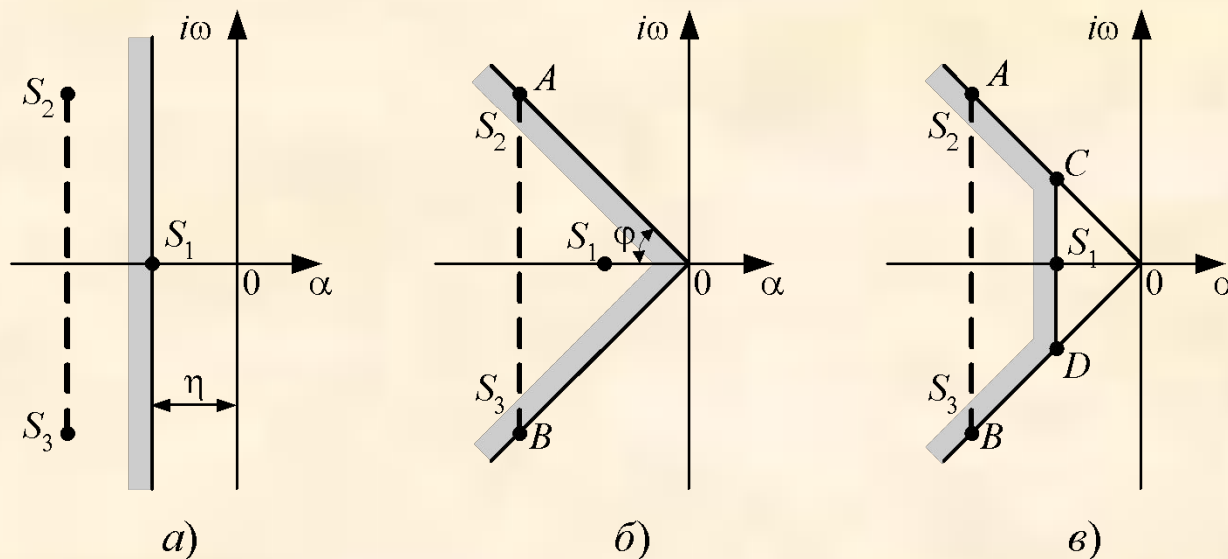


Рис. 10.7 Корневые показатели оценки запаса устойчивости: ϕ

а – степень устойчивости; б – степень колебательности;

в – одновременное использование степени устойчивости и степени колебательности

Другим показателем этой группы является **степень колебательности** m – модуль минимального отношения мнимой и действительной частей корня s_j характеристического уравнения (рис. 10.7б):

$$m = \min_j \left| \frac{\operatorname{Im}(s_j)}{\operatorname{Re}(s_j)} \right| = \operatorname{tg} \varphi \quad (10.12)$$

С геометрической точки зрения **степень колебательности** является **тангенсом** угла, заключенного между лучами OA или OB , проведенными через начало координат и наиболее удаленные корни, и отрицательной действительной полуосью, т.е. $\operatorname{tg} \varphi = m$ или $\varphi = \operatorname{arctg} m$. Корни, находящиеся на этих лучах, расположены таким образом, что все остальные корни лежат слева от них (в секторе AOB).

Для обеспечения запаса устойчивости необходимо, чтобы степень колебательности в системе была больше или равна заданной $m < m_{\text{зад}}$, а область заданного запаса устойчивости в этом случае определится сектором AOB (рис. 10.7б).

В ряде случаев для оценки запаса устойчивости можно использовать одновременно оба рассмотренных показателя – степень устойчивости и степень колебательности. В этом случае область обеспечения заданного запаса устойчивости определяется областью $ACDB$ (рис. 10.7в).

Частотные методы

Среди частотных методов оценки запаса устойчивости прежде всего выделяют методы, связанные с амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы, это методы определения запасов устойчивости по модулю и запас устойчивости по фазе.

Запас устойчивости по модулю определяется как длина отрезка d , равного расстоянию от точки пересечения АФХ разомкнутой системы с отрицательной вещественной полуосью до точки $(-1, i0)$ (рис. 10.8а).

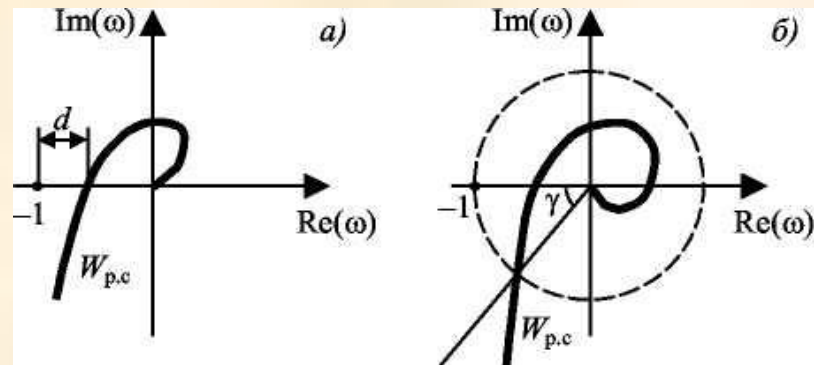


Рис. 10.8 Частотные методы:

а – запас устойчивости по модулю; б – запас устойчивости по фазе

Численно запас устойчивости по модулю показывает, на сколько должен измениться модуль АФХ разомкнутой системы, чтобы система вышла на границу устойчивости.

Запас устойчивости по фазе – это угол γ , лежащий между вещественной отрицательной полуосью и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения АФХ с единичной окружностью с центром в начале координат (рис. 10.8б).

Численно запас устойчивости по фазе показывает, насколько должно увеличиться отставание по фазе в разомкнутой системе при неизменном модуле АФХ, чтобы система вышла на границу устойчивости. Как правило, эти показатели используют вместе.

Для работоспособности системы требуется, чтобы запасы устойчивости по модулю и фазе были не меньше заданных величин: $d > d_{зад}$; $\gamma > \gamma_{зад}$.

Одним из основных частотных методов оценки запаса устойчивости является метод оценки *показателя колебательности*, который как бы объединяет запас устойчивости по модулю и запас устойчивости по фазе. Оказывается, что степень близости замкнутой системы к границе устойчивости можно определить по величине максимума амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы. Этот максимум и называется *показателем колебательности* M (рис. 10.9).

Чем больший максимум имеет АЧХ замкнутой системы, тем ближе АФХ разомкнутой системы к точке $(-1, i0)$ и, следовательно, тем меньше запас устойчивости имеет система как по модулю, так и по фазе. Как известно, АФХ замкнутой системы определяется через АФХ разомкнутой системы

$$W_{з.с}(i\omega) = \frac{W_{р.с}(i\omega)}{1 + W_{р.с}(i\omega)},$$

откуда АЧХ замкнутой системы

$$M_{з.с}(\omega) = \frac{|W_{р.с}(i\omega)|}{|1 + W_{р.с}(i\omega)|}.$$

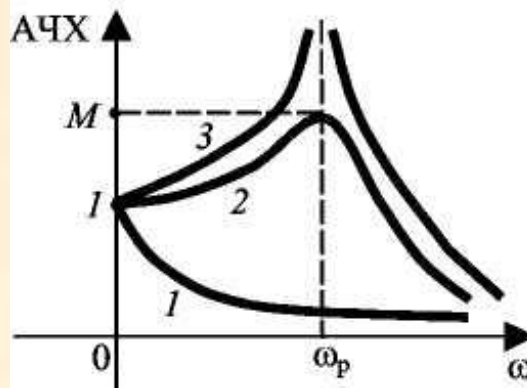


Рис. 10.9 АЧХ замкнутой системы

Анализ АФХ разомкнутой системы показывает, что, как видно из рис. 10.10, ее модуль равен длине отрезка OB , т.е. $|W_{p.c.}(i\omega)| = OB$.

Вектор $1 + W_{p.c.}(i\omega)$ определяется как разность векторов OA и OB , т.е.

$$1 + \vec{W}_{p.c.}(i\omega) = \vec{W}_{p.c.}(i\omega) - (-1) = \vec{AB}$$

Следовательно, $M_{з.с.}(\omega) = OB/AB$ (рис. 10.10).

Если изменять частоту от 0 до ∞ , то отношение OB/AB вначале возрастает, а затем уменьшается, соответственно АЧХ замкнутой системы вначале будет возрастать, а затем уменьшаться, т.е. будет иметь максимум. Для того, чтобы этот максимум не превышал заданной величины, а следовательно был задан показатель колебательности, необходимо, чтобы геометрически на плоскости АФХ разомкнутой системы отношение отрезков OB и AB имело постоянное значение

$$OB/AB = M = const. \quad (10.13)$$

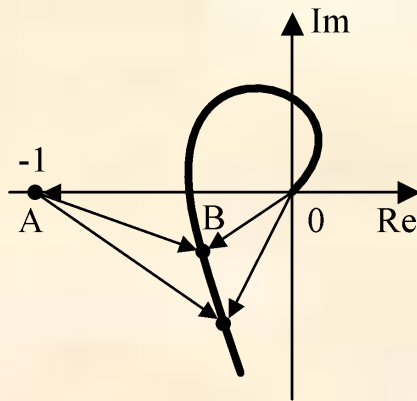


Рис. 10.10 Определение модуля АФХ

Если задан показатель колебательности, то задан запас и устойчивости (максимум АЧХ замкнутой системы не должен превышать некоторой заранее заданной величины), выражающийся геометрически в задании на плоскости АФХ разомкнутой системы окружности радиусом $r = \frac{M}{M^2 - 1}$ с центром на отрицательной вещественной полуоси на расстоянии $P = \frac{M^2}{M^2 - 1}$, которую не должна пересекать амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы (рис. 10.11).

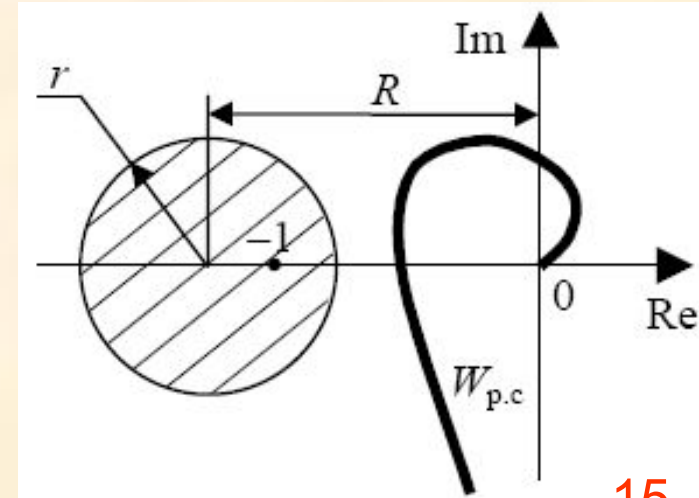


Рис. 10.11 Определение устойчивости замкнутой системы

Анализ систем на запас устойчивости

Расширенные частотные характеристики

Амплитудно-фазовая характеристика является конформным отображением мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения на плоскость АФХ, механизмом ее получения является замена в передаточной функции комплексного параметра s на $i\omega$. Введение в рассмотрение запаса устойчивости равносильно переносу границы устойчивости.

Если запас устойчивости характеризуется *степенью устойчивости*, то в этом случае граница устойчивости как бы сдвигается влево на величину $\eta_{зад}$ (рис. 10.12 а).

Отображение новой границы устойчивости, характеризующейся заданной степенью устойчивости, на плоскость АФХ даст некоторый годограф, который получил название *расширенной амплитудно-фазовой характеристики*. В плоскости корней характеристического уравнения любая точка на прямой заданной степени устойчивости определяется как $s = -\eta_{зад} + i\omega$. Следовательно, для получения расширенной частотной характеристики необходимо в передаточной функции комплексный параметр s заменить на $(-\eta_{зад} + i\omega)$. Годограф расширенной амплитудно-фазовой характеристики (РАФХ) $W(-\eta_{зад} + i\omega)$ по сравнению с обычной АФХ стал как бы шире (рис. 10.12б), в связи с чем эта характеристика и получила название расширенной. Согласно свойствам конформного отображения при $\omega = 0$ эта РАФХ выходит под углом 90° к действительной полуоси.

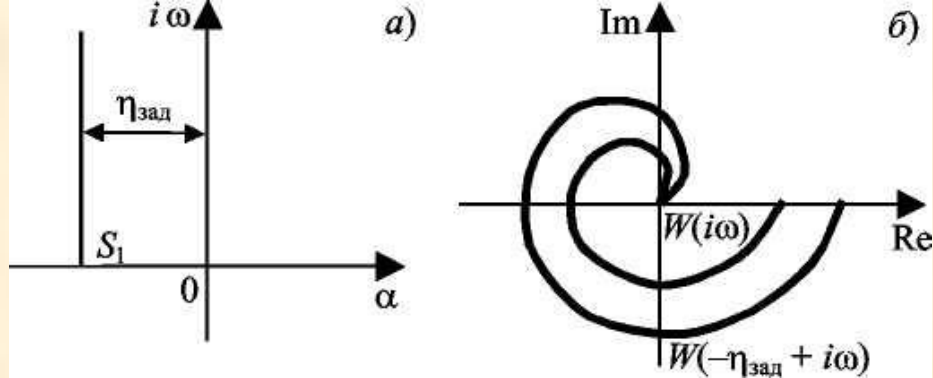


Рис. 10.12 Расширенная частотная характеристика по степени устойчивости:
 а – плоскость корней характеристического уравнения; б – частотные характеристики

Следующая расширенная частотная характеристика характеризуется заданной степенью колебательности. В этом случае граница устойчивости определяется лучами $A0B$ (рис. 10.13а).

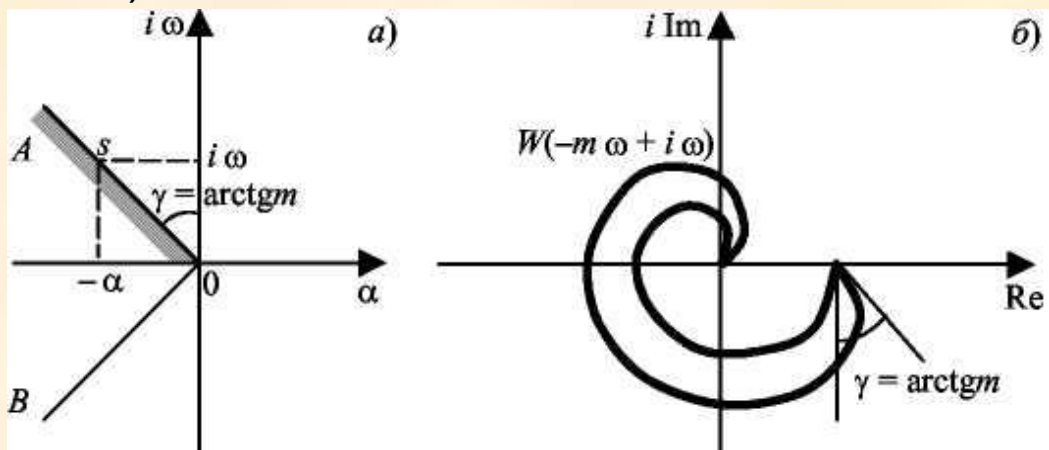


Рис. 10.13 Расширенная частотная характеристика по степени колебательности:
 а – плоскость корней характеристического уравнения; б – частотные характеристики

Отображение этой границы на плоскости АФХ и дает **годограф расширенной амплитудно-фазовой характеристики по степени колебательности m** .

На лучах $A0B$ параметр s имеет координаты $(-\alpha, i\omega)$, которые связаны соотношением $\alpha = m\omega$, тогда $s = -\alpha + i\omega = -m\omega + i\omega$, следовательно, для получения РАФХ достаточно в передаточной функции комплексный параметр s заменить на $(-m\omega + i\omega)$. Годограф рассматриваемой РАФХ $W(-m\omega + i\omega)$ на плоскости АФХ шире, чем годограф обычной АФХ, и при $\omega = 0$ выходит под углом $(\pi/2 + \text{arctg } m)$ (рис. 10.13б).

Расширенные амплитудно-фазовые характеристики могут быть записаны через расширенные амплитудно- и фазочастотные характеристики

$$W(-\eta + i\omega) = M(\eta, \omega)e^{-i\phi(\eta, \omega)}; W(-m\omega + i\omega) = M(m, \omega)e^{-i\phi(m, \omega)}. \quad (10.14)$$

Пример 10.1 Построить расширенные частотные характеристики, если

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1} :$$

а) при замене $s = -m\omega + i\omega$

$$\text{АФХ: } W(-m\omega + i\omega) = \frac{K}{T(-m\omega + i\omega) + 1} = \frac{K}{((1 - Tm\omega) + iT\omega)}$$

$$\text{АЧХ: } M(m, \omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - Tm\omega)^2 + T^2\omega^2}}$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(m, \omega) = -\text{arctg}\left(\frac{T\omega}{1 - Tm\omega}\right) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(m, \omega) = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{arctg}\left(\frac{T\omega}{1 - Tm\omega}\right) = -\left(\text{arctg } m + \frac{\pi}{2}\right)$$

График частотных характеристик изображен на рис. 10.14.

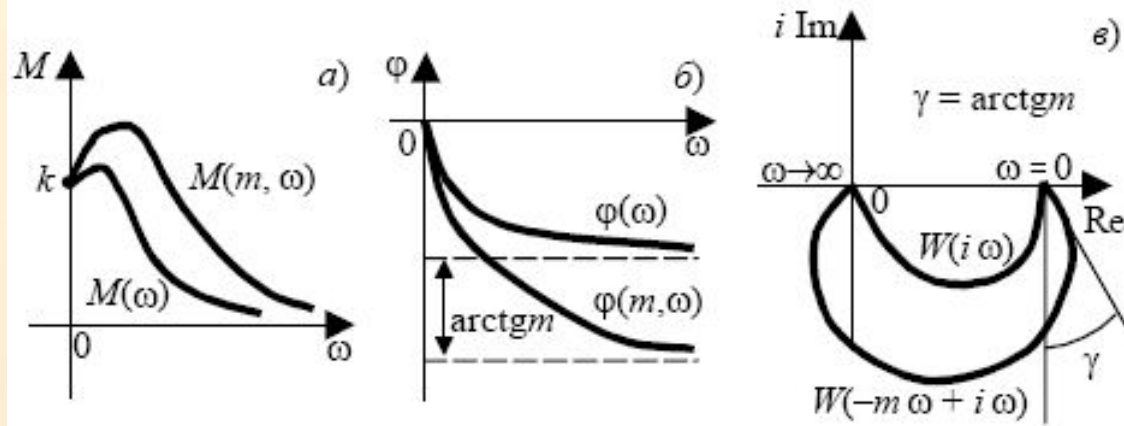


Рис. 10.14 Расширенные частотные характеристики: а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФХ

Сравнение АФХ и РАФХ показывает, что **для любой частоты значения $M(m, \omega)$, $\varphi(m, \omega)$ больше по абсолютной величине, чем $M(\omega)$, $\varphi(\omega)$, поэтому годограф $W(-m\omega + i\omega)$ шире, чем $W(i\omega)$.**

б) при замене $s = -\eta + i\omega$:

$$\text{АФХ: } W(-\eta + i\omega) = \frac{K}{T(-\eta + i\omega) + 1} = \frac{K}{((1 - T\eta) + iT\omega)}$$

$$\text{АЧХ: } M(\eta, \omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T\eta)^2 + T^2\omega^2}}$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\eta, \omega) = -\arctg\left(\frac{T\omega}{1 - T\eta}\right) \cdot \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Графики частотных характеристик изображены на рис. 10.15.

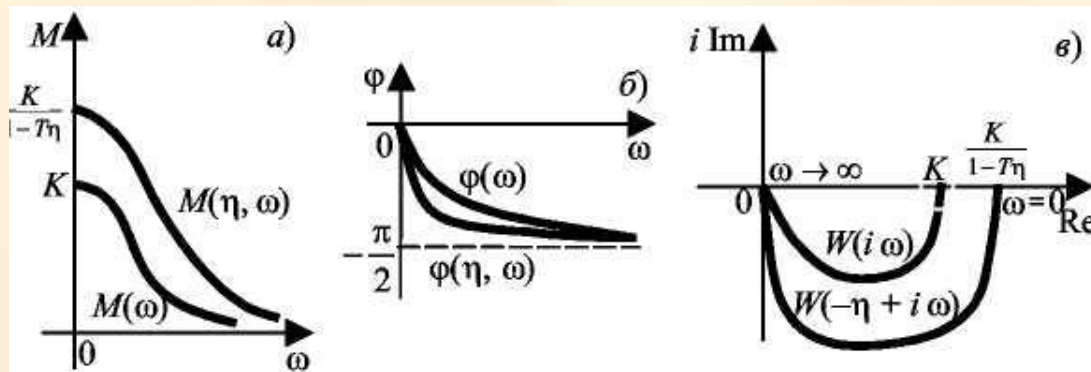


Рис. 10.15 Расширенные частотные характеристики: а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФХ