Основы автоматического управления

Лекция 9

Составитель:
Шендалева Е.В., к.т.н., доцент каф. ТХНГСС ОмГТУ

Устойчивость и установившаяся погрешность

Система автоматического регулирования рассчитывается из условия, что в установившемся режиме должна обеспечиваться малая погрешность, а переходный процесс протекать должным образом, т.е. система должна быть устойчивой (не «раскачиваться») и переходный процесс должен затухать с течением времени.

Переходный процесс описывается уравнением

$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) =$

$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 x'(t) + b_0 x(t).$ (9.1)

В установившимся режиме все производные равны нулю и уравнение принимает вид:

$a_0 y_{уст} = b_0 x_0,$ (9.2)

откуда

(9.3) $$y_{уст} = \frac{b_0 x_0}{a_0}$$

Разность

$$y_s = x_0 - y_{уст} = \left(1 - \frac{b_0}{a_0}\right) x_0$$

(9.4)

называется установившимся значением погрешности. Системы, имеющие $ys \neq 0$, называются *статическими,* а установившаяся погрешность ys – статизмом системы.

Иногда рассматривается относительная погрешность или коэффициент статизма S:

$$S = \frac{y_s}{x_0} \qquad (9.5)$$

.

Для достижения малой погрешности в установившемся режиме необходимо иметь большое значение коэффициента усиления системы, но при достаточно большом значении последнего система становится неустойчивой, т.е. возникает конфликт между требованием устойчивости и требованием малой погрешности. Решение этой проблемы можно рассмотреть на следующем примере. Пусть задана система, структурная схема которой изображена на рис. 9.1.

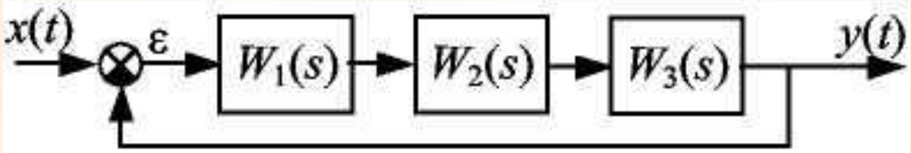


Рис. 9.1 Структурная схема системы автоматического регулирования

На этой схеме

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}; \quad W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}; \quad W_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}$$

Передаточная функция разомкнутой системы будет:

$$W_{pc}(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{k_2}{T_2 s + 1} \cdot \frac{k_3}{T_3 s + 1} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

где K – коэффициент усиления системы и $K = k_1\, k_2\, k_3$.

Для установившегося режима уравнение (9.1) принимает вид $(1 + K)y_{уст} = Kx_0$, откуда $y_{уст} = K\,x_0/(1 + K)$, а статизм системы и коэффициент статизма, соответственно:

$y_s = x_0/(1+K)$, $S=1/(1+K)$.

Характеристическое уравнение рассматриваемой системы имеет вид:

$T_1T_2T_3s^3 + (T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)s^2+(T_1+T_2+T_3)s + 1 + K = 0.$

Так как все коэффициенты характеристического уравнения третьего порядка положительны, то согласно критерию устойчивости Гурвица система будет устойчива, если выполняется неравенство:

$(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)(T_1+T_2+T_3) – T_1T_2T_3(1 + K)>0,$

из которого можно определить коэффициент усиления, т.е.:

$$K < \frac{(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3)}{T_1T_2T_3} - 1$$

Величина

$$K = \frac{(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3)}{T_1T_2T_3} - 1$$

называется предельным коэффициентом усиления.

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициент усиления системы был меньше предельного значения $K < K_{пр}$. Если взять $T_1 = T_2 = T_3$, то $K_{пр} = 8$ и, следовательно, $K < 8$.

Если же для получения малой погрешности задать статизм $S < 0{,}01$ ($S < 1\%$), то получается $K > 100$. Разрешение этого конфликта является одной из основных задач. Пути его разрешения различны, так, например, можно изменять постоянные времени T_1, T_2, T_3 и добиться требуемого значения коэффициента усиления. Наиболее общий путь разрешения такого конфликта – это изменение структурной схемы, введение дополнительных связей.

В общем случае система называется *астатической* относительно некоторого возмущающего воздействия f, если при f = const установившееся значение погрешности y_s не зависит от значения f. В такой системе должно присутствовать интегрирующее звено. Установившаяся погрешность в режиме отработки постоянного рассогласования равна нулю.

На рис. 9.2 изображен годограф Михайлова для устойчивой системы. Отрезок $0M0$ равен значению вектора $D(i\omega)$ (9.3) при $\omega = 0$ и равен значению коэффициента a_n характеристического уравнения.

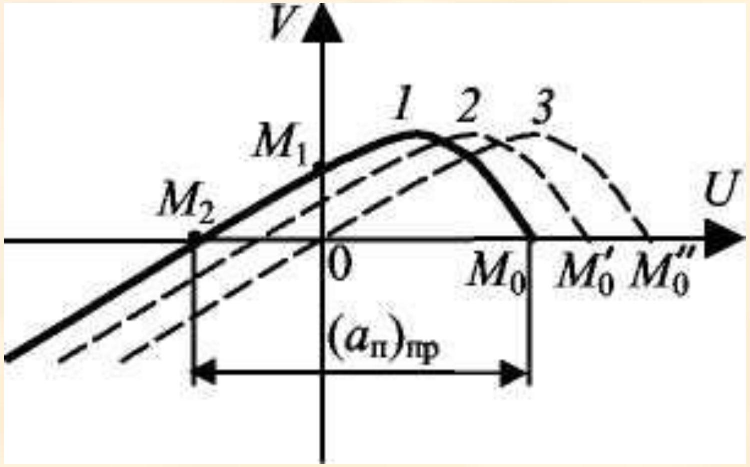


Рис. 9.2 Годограф Михайлова для устойчивых систем 3-го порядка

Можно показать, что коэффициент усиления системы влияет только на свободный член a_n характеристического уравнения. Поэтому при его увеличении будет увеличиваться только коэффициент a_n, и в этом случае все векторы $D(i\omega)$ получают одинаковое положительное действительное приращение, и вся кривая Михайлова без деформации передвигается направо, например, из положения 1 в положение 2 (рис. 9.2). Если увеличивать коэффициент усиления и дальше, то при некотором его предельном значении годограф Михайлова пройдет через начало координат, и система выйдет на границу устойчивости. Дальнейшее увеличение коэффициента усиления сделает систему неустойчивой.

Здесь возможно и обратное решение задачи, а именно, нахождение предельного коэффициента усиления. Отрезок $0M0'$ (рис. 9.2) соответствует предельному значению коэффициента $(a_n)_{пр}$, значение которого можно отсчитать и по первоначальному положению кривой Михайлова – отрезок M_2M_0.
Оценить влияние параметров системы на ее устойчивость, можно и пользуясь критерием Найквиста. В качестве примера ниже рассмотрена система третьего порядка с тремя инерционными звеньями (рис. 9.3), в которой

$$W_1(s)=\frac{k_1}{T_1s+1};\quad W_2(s)=\frac{k_2}{T_2s+1};\quad W_3(s)=\frac{k_3}{T_3s+1}$$

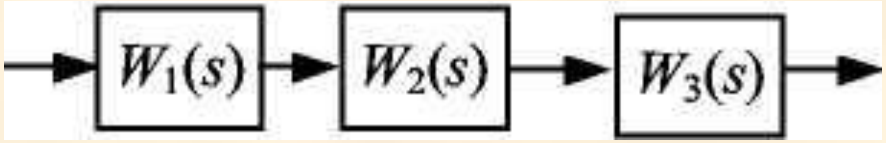


Рис. 9.3 Структурная схема системы с тремя звеньями

Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой системы для различных значений коэффициента усиления $K = k_1k_2k_3$ изображена на рис. 9.4*а.*

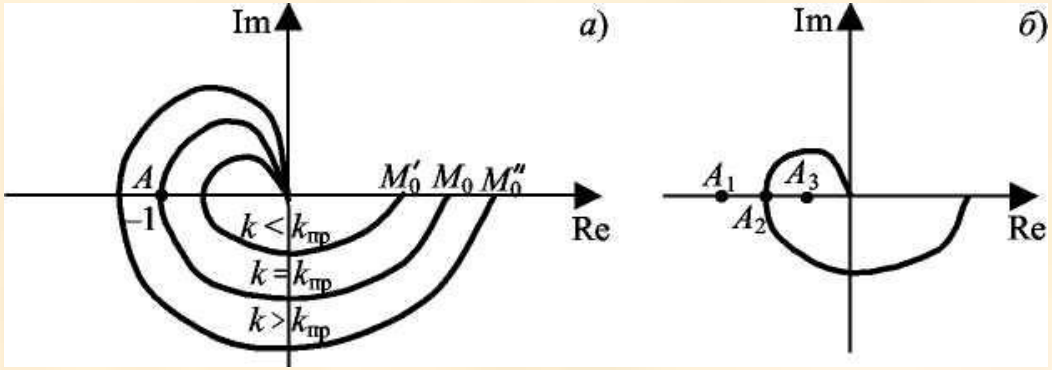


Рис. 9.4 АФХ статической системы третьего порядка:
а - для различных коэффициентов усиления;
б - вычерчивание обратных изменений единицы масштаба

Все эти характеристики могут быть получены из «первоначальной» путем изменения масштаба.

При малом значении коэффициента усиления *K* системы точка *A* находится в положении A_3. В этом случае АФХ разомкнутой системы не охватывает точку (–1, *i*0) и, следовательно, замкнутая система устойчива. При увеличении коэффициента усиления *K* критическая точка движется влево и при $K = K_{пр}$ занимает положение A_2, система находится на границе устойчивости.

При $K > K_{пр}$ критическая точка, продолжая перемещаться влево, занимает положение A_1 и система становится неустойчивой.

Применение критерия Найквиста к исследованию более простых систем − систем первого и второго порядка показывает, что если разомкнутая система является системой первого порядка без запаздывания, то как бы ни изменялись параметры системы, АФХ разомкнутой системы всегда будет располагаться в четвертом квадранте (рис. 9.5) и, следовательно, замкнутая система всегда будет устойчивой.

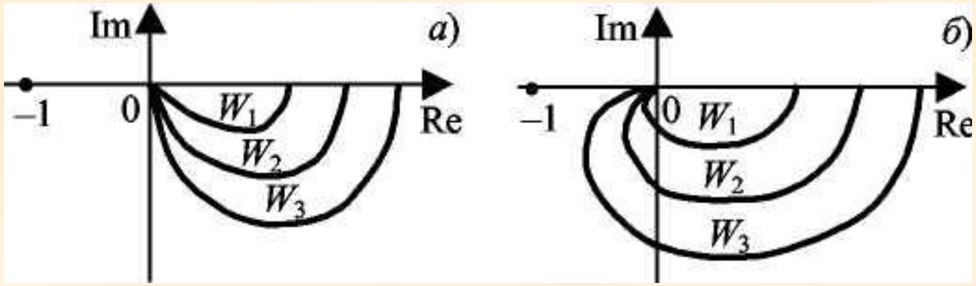


Рис. 9.5 АФХ простых систем:

а — АФХ систем первого порядка; *б* — АФХ систем второго порядка

Для разомкнутых систем второго порядка АФХ располагается в нижней полуплоскости и, следовательно, как бы ни изменялись ее параметры, АФХ никогда не охватывает точку (-1, *i*0), и исследуемая замкнутая система всегда будет устойчивой.

Также с помощью критериев устойчивости Михайлова и Найквиста могут быть решены вопросы стабилизации системы. В частности, одним из способов стабилизации является введение гибкой отрицательной связи.

Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

В инженерной практике иногда анализ устойчивости проводят по логарифмическим частотным характеристикам, построение которых проще, чем амплитудно-фазовой характеристики. Если проследить зависимость между поведением АФХ разомкнутой системы и логарифмической амплитудно-частотной и логарифмической фазочастотной характеристиками, то можно сформулировать критерий Найквиста применительно к логарифмическим частотным характеристикам.

Для того, чтобы система автоматического управления была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов логарифмической фазочастотной характеристикой прямых $\pm\pi(2j + 1)$, где $j = 0, 1, 2,...$ во всех областях, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика положительна, была равна $m/2$ где m – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

На рис. 9.6 приведены АФХ разомкнутой системы и соответствующие ей ЛАЧХ и ЛФЧХ.

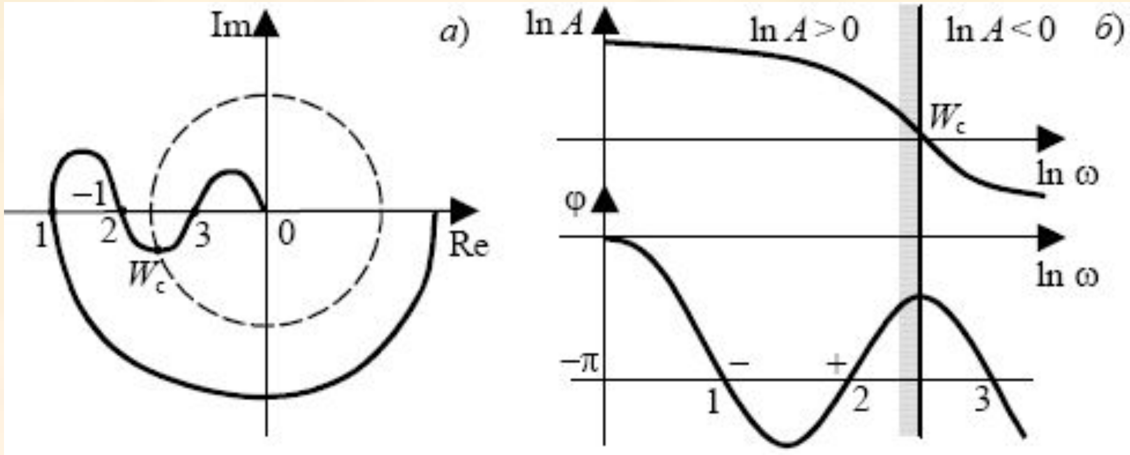


Рис. 9.6 Частотные характеристики:
а - АФХ;
б - логарифмические частотные характеристики

Д-разбиение

При рассмотрении устойчивости были использованы алгебраические критерии Гурвица и Вышнеградского. На практике используют другие методы исследования влияния различных параметров системы на ее устойчивость, т.е. разработаны следующие специальные методы построения областей устойчивости:

1) путем анализа перемещения корней характеристического уравнения в плоскости корней - метод корневого годографа;

2) путем анализа числа корней характеристического уравнения, лежащих в правой полуплоскости, в пространстве параметров системы - метод Д-разбивания пространства параметров, который был предложен и разработан в 1948 г. Неймарком.

Понятие Д-разбиения

Характеристическое уравнение замкнутой системы может быть приведено к виду

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ (a_0 = 1). \qquad (9.6)$$

Представим себе координатное пространство, осями которого являются коэффициенты уравнения, оно получило название пространство коэффициентов. Каждой точке этого пространства соответствуют конкретные численные значения коэффициентов уравнения и соответствующий им полином *n-й* степени, который имеет *n* корней, зависящих от численных значений коэффициентов a_i. Если изменять эти коэффициенты, то корни будут перемещаться в комплексной плоскости корней этого уравнения

Рассмотрим уравнение третьего порядка (рис. 9.7)

$D(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0.$ (9.7)

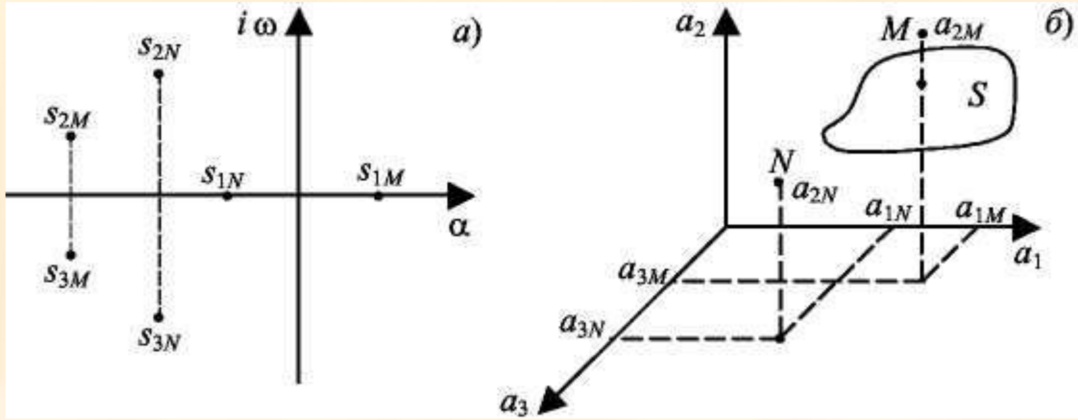


Рис. 9.7 Связь корней характеристического уравнения и пространства коэффициентов:
а — плоскость корней характеристического уравнения;
б — пространство параметров и соответствующее ему пространство коэффициентов a_1, a_2, a_3

Каждой точке пространства соответствует вполне определенный полином и вполне определенные три корня.

Например, точка *M* имеет координаты $\{a_{1M}, a_{2M}, a_{3M}\}$, и следовательно, характеристический полином записывается в виде

$$D(s) = s^3 + a_{1M} s^2 + a_{2M} s^2 + a_{3M}$$

и имеет корни S_{1M}, S_{2M}, S_{3M}.

Когда один из корней равен 0 или $+i\omega$, тогда точка пространства будет удовлетворять уравнению

$D(i\omega) = (i\omega)^3 + a_1(i\omega)^2 + a_2(i\omega) + a_3 = 0.$

При $-\infty < \omega < \infty$ этому уравнению соответствует некоторая поверхность Q. Если корни мнимые, то точка в пространстве коэффициентов попадает на эту поверхность Q. При пересечении ее корни переходят из одной полуплоскости в другую.

Таким образом, поверхность Q разделяет все пространство на области с равным количеством правых и левых корней, их обозначают $D(m)$, где m — число правых корней характеристического уравнения. Разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом правых корней внутри каждой области и выделение среди полученных областей области устойчивости называется методом Д-разбиения.

Для уравнения третьего порядка можно выделить 4 области $D(3)$, $D(2)$, $D(1)$, $D(0)$, последняя будет областью устойчивости.

Если изменяются не все коэффициенты, а часть из них, например, a_1 и a_2, при a_3 = const, то вместо поверхности получим линию, которая является сечением поверхности Q и разделяет плоскость коэффициентов a_1, a_2 на области с одинаковым числом правых корней (рис. 9.8).

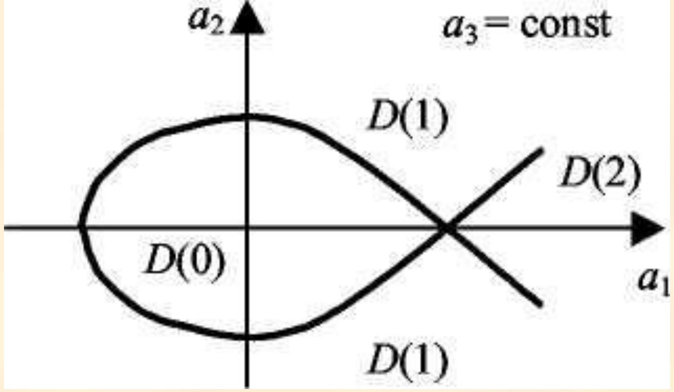


Рис. 9.8 Граница Д-разбиения в плоскости коэффициентов

Уравнение границы Д-разбиения получают из характеристического уравнения системы заменой $s = i\omega$.

$$D(i\omega) = (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (9.8)$$

Границу Д-разбиения можно строить не только в пространстве коэффициентов дифференциального уравнения, но и в пространстве параметров системы.

Д-разбиение по одному параметру

Пусть требуется выяснить влияние на устойчивость какого-либо параметра v, линейно входящего в характеристическое уравнение. Это уравнение можно привести к виду

$D(s) = M(s) + vN(s) = 0.$ (9.10)

Граница Д-разбиения определится как

$D(i\omega) = M(i\omega) + vN(i\omega) = 0,$ (9.11)

откуда

$$v = \frac{-M(i\omega)}{N(i\omega)} = X(\omega) + i\,Y(\omega).$$

Давая значения ω от -∞ до ∞, можно вычислить $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ и построить границу Д-разбиения, границу строят только для ω > 0, а для ω < 0 получают зеркальным отображением (рис. 9.9).

Если в плоскости комплексных корней двигаться по мнимой оси при изменении ω от -∞ до ∞ и штриховать ее слева, то в плоскости параметра v этому движению будет соответствовать движение по границе Д-разбиения, которую также штрихуют слева. Если же в плоскости v пересекать границу Д-разбиения по направлению штриховки (1) (рис. 9.9), то этому соответствует переход корня из правой полуплоскости в левую, если же против штриховки - то корень переходит из левой полуплоскости в правую. Если штриховка двойная, то мнимую ось пересекают два корня.

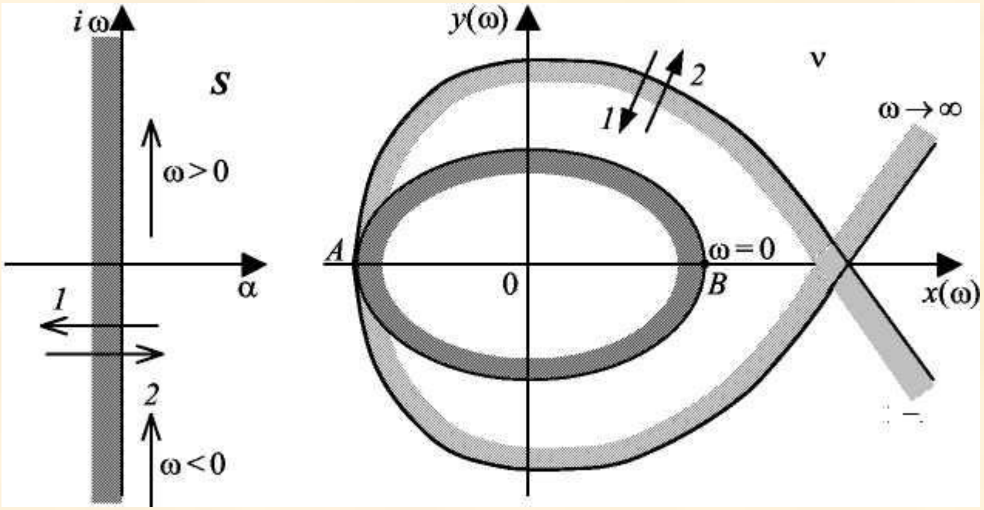


Рис. 9.9 Д-разбиение по одному параметру

Для определения области устойчивости достаточно знать распределение корней при каком-либо одном значении параметра v. Переходя в плоскости v от одного параметра к другому, по числу пересечений границы Д-разбиения, направлению и числу штриховок можно определить значение $D(m)$. Претендентом на область устойчивости является область, внутрь которой направлена штриховка и которая соответствует области с наибольшим числом левых корней. В выбранной области берется значение параметра v и по любому из критериев система проверяется на устойчивость.

Так как v - вещественное число, то из полученной области выделяют только отрезок вещественной оси, лежащей в области устойчивости, например, отрезок *AB.*

Д-разбиение по двум параметрам

На практике часто требуется выяснить влияние на устойчивость двух, а не одного параметра.

Характеристическое уравнение в этом случае приводится к виду:

$D(s) = \nu N(s) + \tau M(s) + L(s) = 0,$ (9.13)

подставляя $s = i\omega$, получают уравнение для границы Д-разбиения

$D(i\omega) = \nu N(i\omega) + \tau M(i\omega) + L(i\omega) = 0.$ (9.14)

Если обозначить

$N(i\omega) = N1(\omega) + iN2(\omega); M(i\omega) = M1(\omega) + iM2(\omega); L(i\omega) = L1(\omega) + iL2(\omega),$ (9.15)

то уравнение для границы можно разбить на два:

$\nu N1(\omega) + \tau M1(\omega) + L1(\omega) = 0; \nu N2(\omega) + \tau M2(\omega) + L2(\omega) = 0.$ (9.16)

Последняя система решается относительно параметров τ и v:

$$\nu = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ \tau = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad (9.17)$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} N_1(\omega) & M_1(\omega) \\ N_2(\omega) & M_2(\omega) \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} -L_1(\omega) & M_1(\omega) \\ -L_2(\omega) & M_2(\omega) \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} N_1(\omega) & -L_1(\omega) \\ N_2(\omega) & -L_2(\omega) \end{vmatrix}.$

Задавая различные значения частоты ω от -∞ до ∞, для каждого из ее значений по параметрическим уравнениям определяются величины ν и τ и строится граница Д-разбиения. При этом возможны следующие три случая.

При заданной частоте *ωк* определители $\Delta \neq 0$; $\Delta_1 \neq 0$; $\Delta_2 \neq 0$ отличны от нуля. В этом случае система совместна, и уравнения (9.16) представляют собой прямые линии в плоскости ν − τ (рис. 9.10*а*).

При некотором значении *ωк* $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$; $\Delta_2 \neq 0$. Тогда система (9.16) несовместна, конечных решений нет. Прямые 1 и 2 параллельны (рис. 9.10*б*).

При некотором значении *ωк* все определители равны нулю, тогда ν и τ становятся неопределенными. Прямые 1 и 2 сливаются друг с другом, в этом случае получают не точку, а так называемую особую прямую (рис. 9.10*в*), уравнение которой:

$$\nu N_1(\omega_к) + \tau M_1(\omega_к) + L_1(\omega_к) = 0.$$

Особая прямая не относится к кривой Д-разбиения, так как всем ее точкам соответствует одно и то же значение частоты, и направление движения по ней установить невозможно.

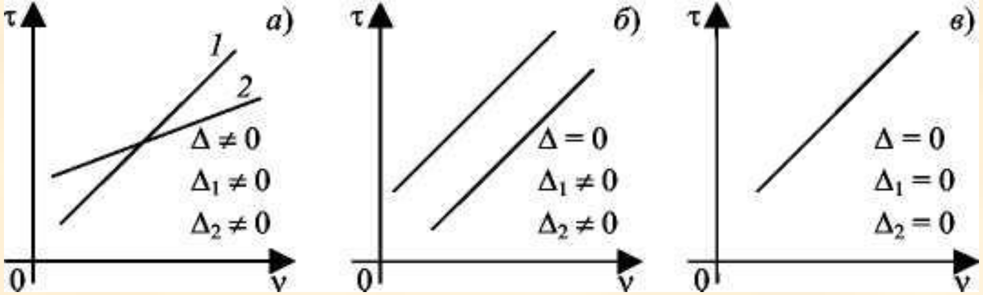


Рис. 9.10 Иллюстрация существования решения системы уравнений (9.16):
а − решение существует; *б* −конечных решений нет; *в* − решение неопределенно

В основном особые прямые возникают при ω = 0 или ω = ∞, это в том случае, когда *an* = 0 либо a0 = 0, соответственно. Если a_0 и a_n не зависят от ν и τ, то особые прямые отсутствуют.

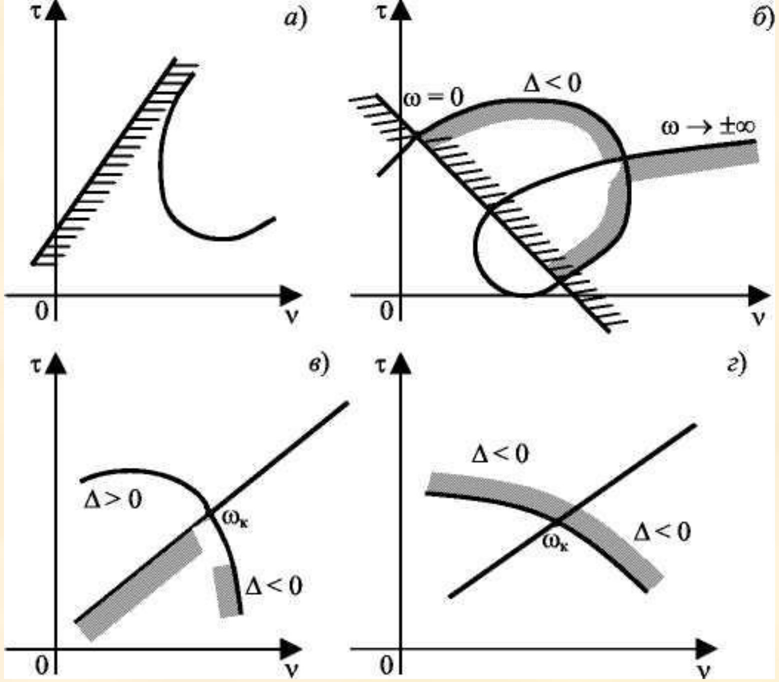
После построения границы Д-разбиения и особых прямых необходимо их заштриховать, пользуясь следующим правилом: при возрастании ω от -∞ до ∞ граница Д-разбиения штрихуется слева, если Δ > 0, и справа, если Δ < 0.

Так как ν и τ являются четными функциями ω, то границы Д-разбиения для положительных и отрицательных частот совпадают, поэтому кривую Д-разбиения обходят дважды, и она всегда штрихуется двойной штриховкой.

Штриховка особых линий, как правило, одинарная и штрихуется так, чтобы в местах сопряжения с Д-границей заштрихованные и незаштрихованные стороны прямой и кривой были направлены друг к другу (рис. 9.11*а*, *б*).

В тех случаях, когда особая прямая имеет место при некотором конечном значении частоты ω = *ωк* ≠ 0 и при этом Δ проходит через нуль и меняет знак, особая прямая штрихуется согласно правилу, но двойной штриховкой (рис. 9.11*в*). Если же Δ не меняет знак, то особая прямая не штрихуется и из рассмотрения выбрасывается (рис. 9.11*г*).

Рис. 9.11 Правило штриховки особой прямой при Д-разбиении по двум параметрам:
а, б − одинарная штриховка;
в − двойная штриховка;
г − не штрихуется



После нанесения штриховки определяют область, претендующую на область устойчивости, т.е. область, внутрь которой направлена штриховка. Пересечение границы Д-разбиения из заштрихованной зоны в незаштрихованную соответствует переходу двух комплексно-сопряженных корней из левой полуплоскости корней в правую, и наоборот. Пересечение особой прямой с одной штриховкой соответствует переходу одного корня.