Основы автоматического управления

Лекция 7

Составитель:
Шендалева Е.В., к.т.н., доцент каф. ТХНГСС ОмГТУ

Критерий Найквиста

Этот частотный критерий, разработанный в 1932 году американским ученым Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФХ разомкнутой системы .

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad n \geq m.$$

Передаточная функция замкнутой САР по каналу управления:

$$W^{замк}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{B(s)/A(s)}{1 + B(s)/A(s)} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)}.$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы (*n*-го порядка) определено, как *A*(*s*) = 0. Характеристическое уравнение замкнутой системы (*n*-го порядка) выражается, как *A*(*s*)+*B*(*s*)=0. Рассмотрим, что представляет из себя выражение 1 + *W*(*s*):

$$1 + W(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{D^{замк}(s)}{D^{разом}(s)} = H(s), \tag{7. 1}$$

где $D^{замк}(s)$, $D^{разом}(s)$ – характеристические полиномы, соответственно, замкнутой и разомкнутой САР.

Подставляя *s* = *i*ω, получим АФХ разомкнутой системы (рис. 7. 1).

$$W(i\omega) = \frac{b_0 (i\omega)^m + b_1 (i\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} = U(\omega) + iV(\omega) = M(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

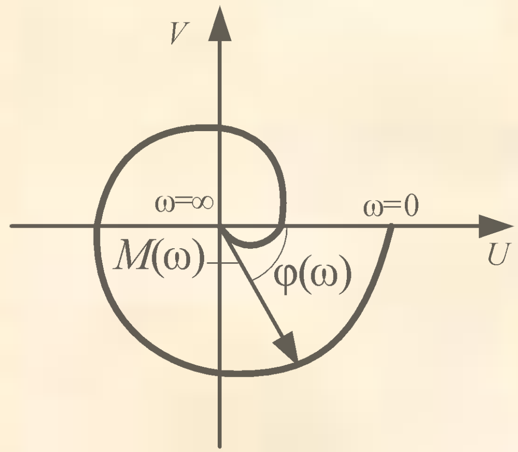

Рис. 7.1 АФХ разомкнутой системы

Вектор ($1+W(i\omega)$), следовательно, включает в себя свойства замкнутой и разомкнутой системы, и по тому, как ведет себя $W(i\omega)$ относительно (-1, $i0$) можно сделать вывод об устойчивости замкнутой системы.

Выделим три случая состояния равновесия разомкнутой системы: устойчива, нейтральна и неустойчива.

1 *случай* - система в разомкнутом состоянии устойчива. Тогда изменение аргумента характеристического полинома разомкнутой системы согласно критерию устойчивости Михайлова будет равно

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{разом}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}. \qquad (7.2)$$

Для того, чтобы замкнутая система была устойчива, должно выполняться равенство

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{замк}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что приращение аргумента вектора H(*i*ω) = (1+*W*(*i*ω)) равно нулю

$$\Delta \mathrm{Arg} H(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta \mathrm{Arg} D^{замк}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} - \Delta \mathrm{Arg} D^{разом}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2} = 0. \quad (7.3)$$

Соотношение (7.3) означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы вектор 1+*W*(*i*ω), начало которого находится в точке (-1, *i*0), а конец, скользя по АФХ разомкнутой системы, не охватывал точку (-1, *i*0) при изменении ω от 0 до ∞ (рис. 7.2). Таким образом, критерий Найквиста гласит:

Если разомкнутая система автоматического управления устойчива, то замкнутая система автоматического управления будет устойчива в том случае, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку (-1, *i*0) *при изменении* ω *от* 0 *до* ∞.

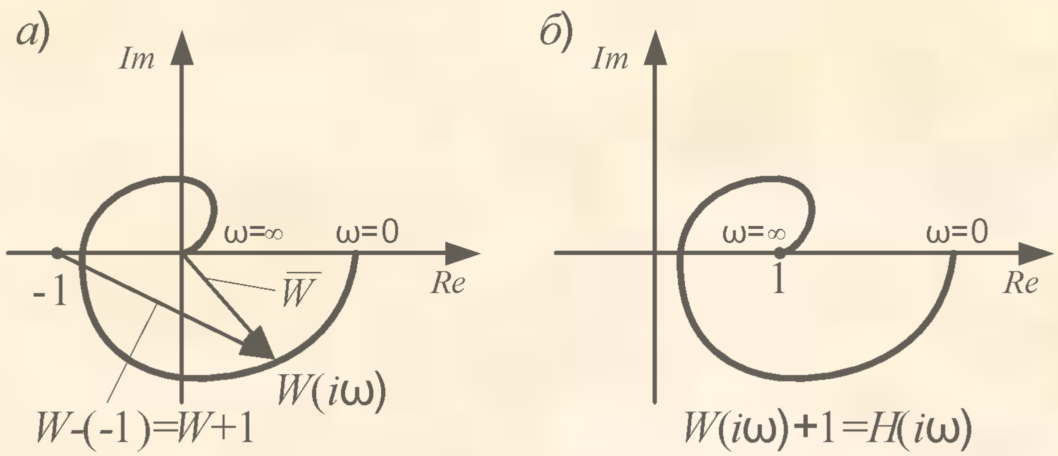

Рис. 7.2 Амплитудно-фазовая характеристика:
а — разомкнутой системы; *б* — функции *H*(*i* ω)

2 случай - система в разомкнутом состоянии неустойчива.

При рассмотрении многоконтурных и одноконтурных систем регулирования, содержащих неустойчивые звенья, разомкнутая система может оказаться неустойчивой.

Пусть в разомкнутом состоянии система неустойчива, при этом характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет *m* корней в правой полуплоскости. Тогда согласно принципу аргумента

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{разом}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

Если потребовать, чтобы система в замкнутом состоянии была устойчива, то должно выполняться равенство

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{замк}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}.$$

В этом случае угол поворота вектора $H(i\omega) = 1+W(i\omega)$ будет равен

$$\Delta \mathrm{Arg} H(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2} - (n-2m)\frac{\pi}{2} = \frac{m}{2}2\pi. \qquad (7.4)$$

Последнее говорит о том, что АФХ функции $H(i\,\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ охватывает начало координат в положительном направлении $m/2$ раз.

Число оборотов вектора $H(i\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов вектора АФХ разомкнутой системы $W(i\omega)$ вокруг точки (-1, i0). На основании этого вытекает следующая формулировка критерия Найквиста.

Если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то для того, чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы W(iω) при изменении частоты от 0 *до* ∞ *охватывала точку* (-1, *i*0) *в положительном направлении m/*2 *раз, где m - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.*

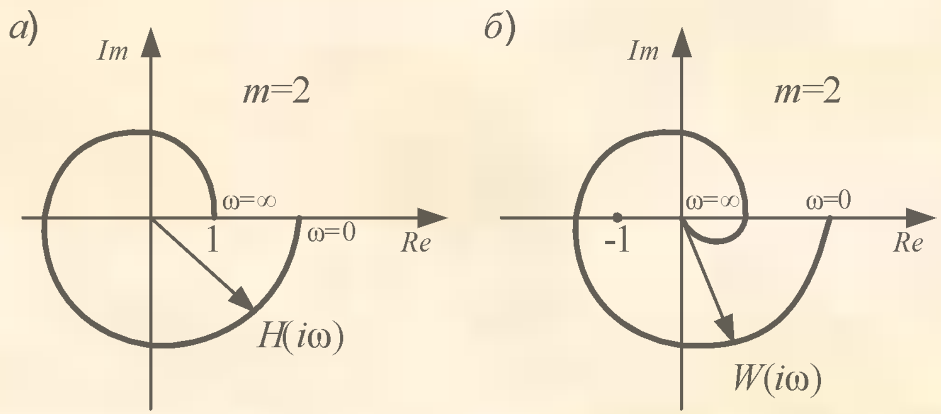

Рис. 7.3 АФХ: *а* - *H*(*i*ω); *б* - *W*(*i*ω) при *m* = 2

На рис. 7.3 изображены в качестве примера АФХ *H(i*ω) и АФХ разомкнутой системы, соответствующие устойчивой замкнутой системе, которая в разомкнутом состоянии неустойчива и *m* = 2.

При сложной форме *W*(*i*ω) могут возникнуть затруднения при определении числа ее оборотов вокруг точки (-1, *i*0). В этом случае удобно применять «правило переходов», предложенное Я. З. Цыпкиным.

Назовем переход *W*(*i*ω) через вещественную ось при возрастании ω положительным, если он происходит сверху вниз, и отрицательным, если он происходит снизу вверх. Если *W*(*i*ω) начинается или заканчивается на оси, то она совершает полперехода. Тогда критерий Найквиста можно сформулировать следующим образом.

Если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то для того чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов АФХ разомкнутой системы W(iω) через отрезок вещественной оси (-∞, -1) *при изменении частоты от* 0 *до* ∞ *была равна m/*2, *где m - число правых корней характеристического уравнения.*

В качестве примера на рис. 7.4 изображена АФХ разомкнутой системы: число правых корней *m* = 2; число переходов - два положительных, один отрицательный, их разность равна 1 = m/2, следовательно, замкнутая система устойчива.

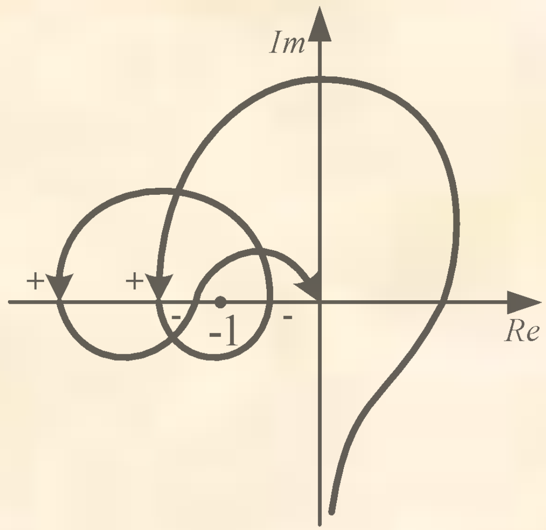

Рис. 7.4. АФХ разомкнутой системы при *m* = 2

3 случай - система в разомкнутом состоянии нейтральна.

В этом случае система должна содержать интегрирующие звенья, характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет корни, равные нулю, и записывается в виде

$$A(s) = s^{\nu} A_1(s) = 0 \qquad (7.5)$$

где ν - порядок астатизма; $A_1(s)$ — полином, не имеющий корней, равных нулю.

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы записывается в виде

$$W(i\omega) = \frac{B(i\omega)}{(i\omega)^{\nu} A_1(i\omega)} \tag{7.6}$$

При ω = 0, $W(i\omega) = \infty$ и АФХ претерпевает разрыв, поэтому решать вопрос об устойчивости замкнутой системы трудно, так как неясно, охватывает АФХ точку (-1, i0) или нет. Чтобы сохранить формулировку критерия для устойчивых в разомкнутом состоянии систем, при построении годографа Михайлова при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ обходят начало координат по полуокружности бесконечно малого радиуса r. Тогда нулевые корни дадут такой же угол поворота, как левые корни, т.е. каждый из векторов повернется на угол π (рис. 7.5).

Обходу начала координат по малой дуге $re^{i\varphi}$ соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \left.\frac{B(s)}{(s)^{\nu} A_1(s)}\right|_{s=0} = \frac{B(0)}{A_1(0)} \cdot \frac{1}{\left(re^{i\varphi}\right)^{\nu}} = Re^{-i\psi} \tag{7.7}$$

При $r \to 0$ радиус $R \to \infty$, а аргумент ψ меняется от $\nu\pi/2$ до $-\nu\pi/2$ при изменении φ от $\pi/2$ до $-\pi/2$.

Таким образом, при движении по полуокружности бесконечно малого радиуса в плоскости корней АФХ разомкнутой системы сама $W(i\omega)$ может быть представлена в виде вектора бесконечно большой длины, поворачивающегося на комплексной плоскости по часовой стрелке на угол, равный $-\nu\pi$.

При изменении ω от 0 до ∞, т.е. $r \to 0$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, $W(i\omega)$ изменяется по дуге бесконечно большого радиуса, описывая угол от 0 до $-\nu\pi/2$ (рис. 7.5).

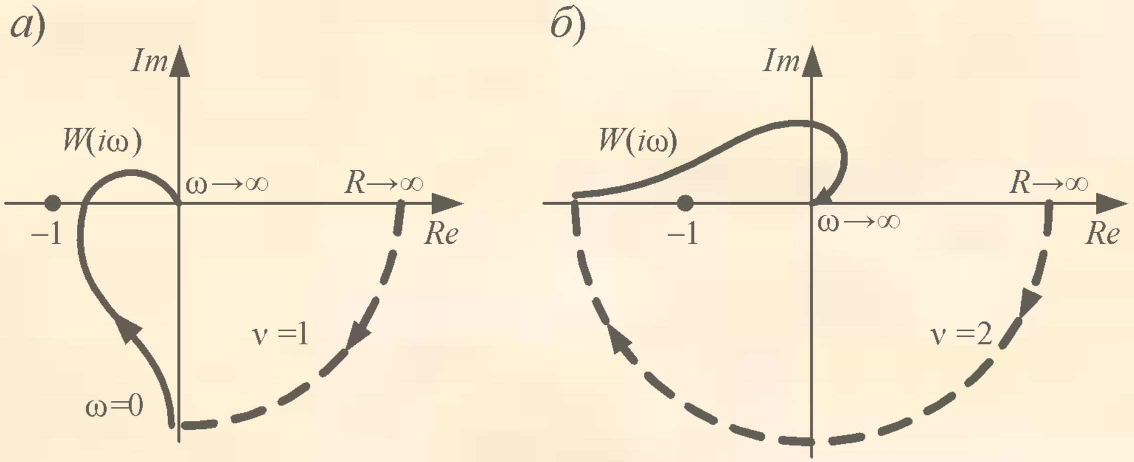

Рис. 7.5 АФХ нейтральной разомкнутой системы: ω→∞
а - с астатизмом первого порядка, ν = 1; *б* - с астатизмом второго порядка, ν = 2

Критерий Найквиста формулируется следующим образом.

Система автоматического регулирования, нейтральная в разомкнутом состоянии, устойчива в замкнутом состоянии, если АФХ разомкнутой системы с его дополнением в бесконечности не охватывает точку (-1, *i*0) при изменении ω от 0 до ∞.

Как видно из рис. 7.5, если разомкнутая система имеет астатизм первого порядка, то замкнутая система устойчива, так как точка (-1, *i*0) не охватывается, если же астатизм будет второго порядка, то замкнутая система неустойчива - точка (-1, *i*0) охватывается АФХ разомкнутой системы.

Достоинствами критерия Найквиста являются:

- применимость при неизвестных уравнениях некоторых звеньев разомкнутой системы;
- возможность исследования устойчивости систем с запаздыванием.

Пример 7.1

Исследовать устойчивость системы критерием Михайлова, если характеристическое уравнение системы имеет вид $D(s) = 2s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 5s + 1 = 0$.

Заменяя $s = i\omega$, находят действительную и мнимую функцию Михайлова: $D(i\omega) = 2(i\omega)^4 + 4(i\omega)^3 + 2(i\omega)^2 + 5(i\omega) + 1$, откуда $U(\omega) = 2\omega^4 - 2\omega^2 + 1$; $V(\omega) = \omega(-4\omega^2 + 5)$.

Годограф Михайлова изображен на рис. 7.6. Его анализ показывает, что система неустойчива.

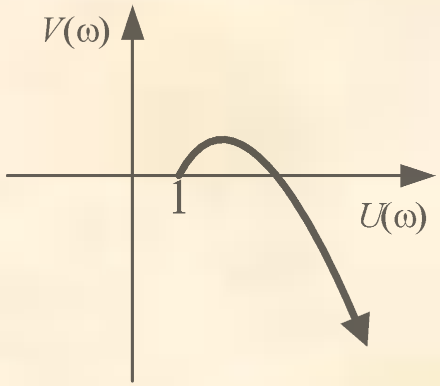

Рис. 7.6 Годограф

Приравниваем $U(\omega) = 0$; $V(\omega) = 0$. Решение этих уравнений дает:

$$\omega_{1,3}^2 = 1 \pm i; \quad \omega_0 = 0; \quad \omega_{2,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Так как имеются комплексно-сопряженные корни, то система неустойчива.

Пример 7.2

Исследовать устойчивость системы автоматического регулирования (рис. 7.7), если

$$W_1(s) = \frac{1}{2s+1}; \quad w_2(s) = e^{-2s}.$$

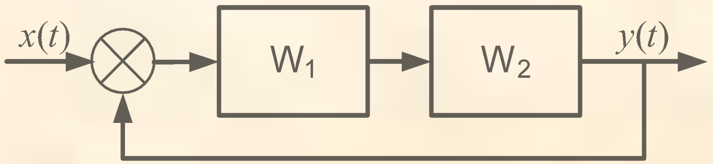

Рис. 7.7 Структурная схема САР

В разомкнутом состоянии система автоматического регулирования устойчива. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы изображена на рис. 7.8.

$$W^{разом}(i\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}e^{i(-2\omega-arctg\,2\omega)}$$

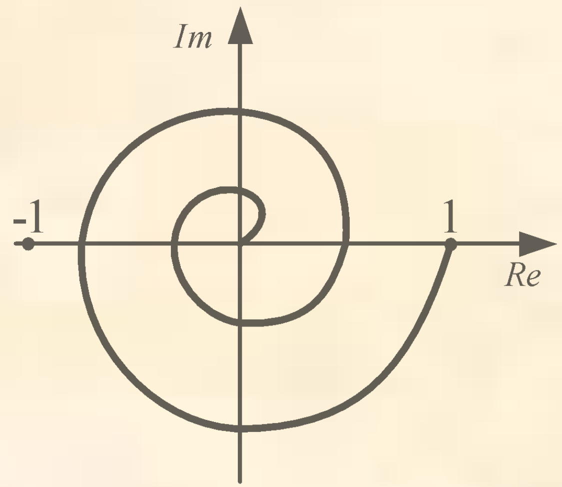

Рис. 7.8 АФХ разомкнутой системы

Так как амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку с координатами (-1, i0), то замкнутая система устойчива.