# Основы автоматического управления

Лекция 7

Составитель:
Шендалева Е.В., к.т.н., доцент каф. ТХНГСС ОмГТУ

# Критерий Найквиста

Этот частотный критерий, разработанный в 1932 году американским ученым Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФХ разомкнутой системы .

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s)=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad n \geq m.$$

Передаточная функция замкнутой САР по каналу управления:

$$W^{замк}(s)=\frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{B(s)/A(s)}{1+B(s)/A(s)} = \frac{B(s)}{A(s)+B(s)}.$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы (*n*-го порядка) определено, как *A*(*s*) = 0. Характеристическое уравнение замкнутой системы (*n*-го порядка) выражается, как *A*(*s*)+*B*(*s*)=0. Рассмотрим, что представляет из себя выражение 1 + *W*(*s*):

$$1+W(s)=1+\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s)+B(s)}{A(s)} = \frac{D^{замк}(s)}{D^{разом}(s)} = H(s), \qquad (7.\ 1)$$

где $D^{замк}(s)$, $D^{разом}(s)$ – характеристические полиномы, соответственно, замкнутой и разомкнутой САР.

Подставляя *s* = *i*ω, получим АФХ разомкнутой системы (рис. 7. 1).

$$W(i\omega)=\frac{b_0 (i\omega)^m + b_1 (i\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} = U(\omega) + iV(\omega) = M(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

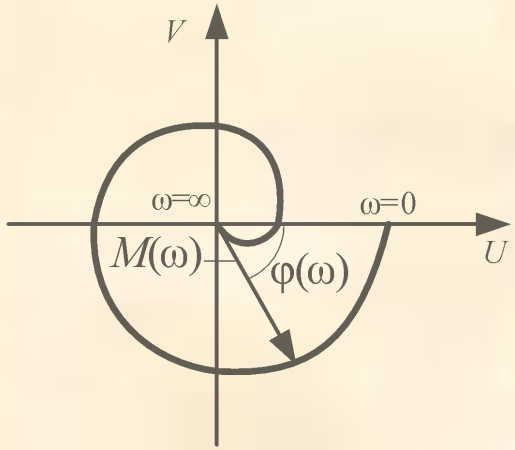


Рис. 7.1 АФХ разомкнутой системы

Вектор (1+*W*(*i*ω)), следовательно, включает в себя свойства замкнутой и разомкнутой системы, и по тому, как ведет себя *W*(*i*ω) относительно (-1, *i*0) можно сделать вывод об устойчивости замкнутой системы.

Выделим три случая состояния равновесия разомкнутой системы: устойчива, нейтральна и неустойчива.

**1 *случай*** - система в разомкнутом состоянии устойчива. Тогда изменение аргумента характеристического полинома разомкнутой системы согласно критерию устойчивости Михайлова будет равно

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{разом}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}. \qquad (7.2)$$

Для того, чтобы замкнутая система была устойчива, должно выполняться равенство

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{замк}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что приращение аргумента вектора H(*i*ω) = (1+*W*(*i*ω)) равно нулю

$$\Delta \mathrm{Arg} H(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta \mathrm{Arg} D^{замк}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} - \Delta \mathrm{Arg} D^{разом}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2} = 0. \qquad (7.3)$$

Соотношение (7.3) означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы вектор 1+*W*(*i*ω), начало которого находится в точке (-1, *i*0), а конец, скользя по АФХ разомкнутой системы, не охватывал точку (-1, *i*0) при изменении ω от 0 до ∞ (рис. 7.2). Таким образом, критерий Найквиста гласит:

*Если разомкнутая система автоматического управления устойчива, то замкнутая система автоматического управления будет устойчива в том случае, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку* (-1, *i*0) *при изменении* ω *от* 0 *до* ∞.

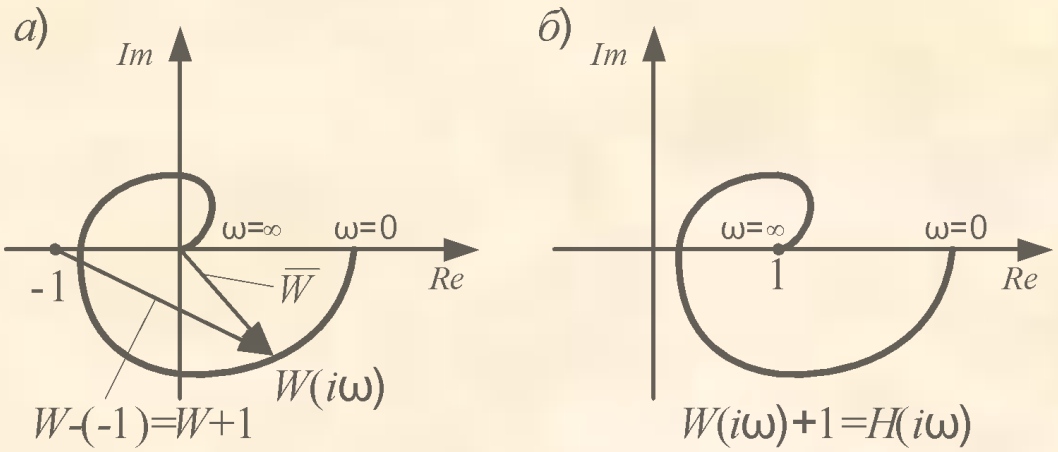


Рис. 7.2 Амплитудно-фазовая характеристика:
*а* — разомкнутой системы; *б* — функции *H*(*i* ω)

***2 случай*** - система в разомкнутом состоянии неустойчива.

При рассмотрении многоконтурных и одноконтурных систем регулирования, содержащих неустойчивые звенья, разомкнутая система может оказаться неустойчивой.

Пусть в разомкнутом состоянии система неустойчива, при этом характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет *m* корней в правой полуплоскости. Тогда согласно принципу аргумента

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{разом}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

Если потребовать, чтобы система в замкнутом состоянии была устойчива, то должно выполняться равенство

$$\Delta \mathrm{Arg} D^{замк}(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2}.$$

В этом случае угол поворота вектора $H(i\omega) = 1+W(i\omega)$ будет равен

$$\Delta \mathrm{Arg} H(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2} - (n-2m)\frac{\pi}{2} = \frac{m}{2}2\pi. \qquad (7.4)$$

Последнее говорит о том, что АФХ функции $H(i\,\omega)$ при изменении частоты от 0 до $\infty$ охватывает начало координат в положительном направлении $m/2$ раз.

Число оборотов вектора $H(i\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов вектора АФХ разомкнутой системы $W(i\omega)$ вокруг точки (-1, $i0$). На основании этого вытекает следующая формулировка критерия Найквиста.

*Если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то для того, чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы W(iω) при изменении частоты от 0 до ∞ охватывала точку (-1, i0) в положительном направлении m/2 раз, где m - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.*

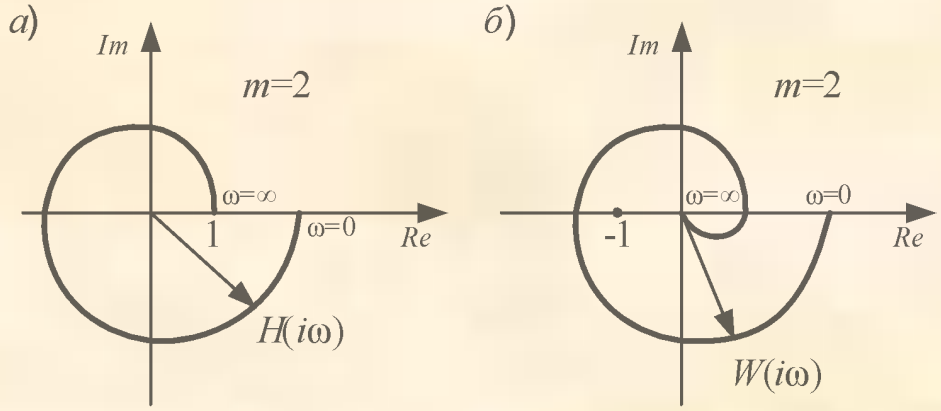


Рис. 7.3 АФХ: *а* - *H*(*i*ω); *б* - *W*(*i*ω) при *m* = 2

На рис. 7.3 изображены в качестве примера АФХ *H*(*i*ω) и АФХ разомкнутой системы, соответствующие устойчивой замкнутой системе, которая в разомкнутом состоянии неустойчива и *m* = 2.

При сложной форме *W*(*i*ω) могут возникнуть затруднения при определении числа ее оборотов вокруг точки (-1, *i*0). В этом случае удобно применять «правило переходов», предложенное Я. З. Цыпкиным.

Назовем переход *W*(*i*ω) через вещественную ось при возрастании ω положительным, если он происходит сверху вниз, и отрицательным, если он происходит снизу вверх. Если *W*(*i*ω) начинается или заканчивается на оси, то она совершает полперехода. Тогда критерий Найквиста можно сформулировать следующим образом.

*Если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то для того чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов АФХ разомкнутой системы W(iω) через отрезок вещественной оси (-∞, -1) при изменении частоты от 0 до ∞ была равна m/2, где m - число правых корней характеристического уравнения.*

В качестве примера на рис. 7.4 изображена АФХ разомкнутой системы: число правых корней *m* = 2; число переходов - два положительных, один отрицательный, их разность равна 1 = m/2, следовательно, замкнутая система устойчива.

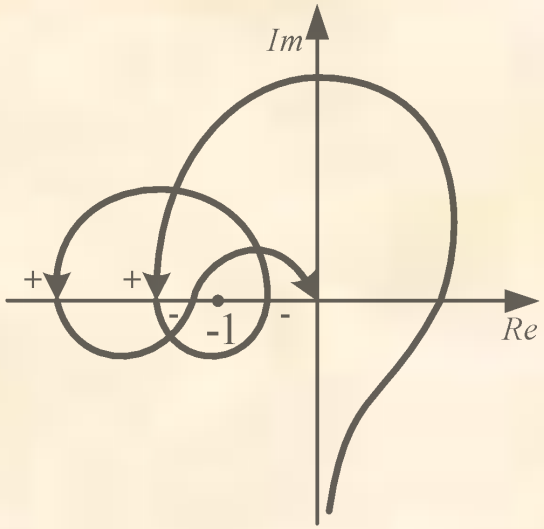


Рис. 7.4. АФХ разомкнутой системы при *m* = 2

***3 случай*** - система в разомкнутом состоянии нейтральна.

В этом случае система должна содержать интегрирующие звенья, характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет корни, равные нулю, и записывается в виде

$$A(s) = s^{\nu} A_1(s) = 0 \qquad (7.5)$$

где $\nu$ - порядок астатизма; $A_1(s)$ — полином, не имеющий корней, равных нулю.

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы записывается в виде

$$W(i\omega)=\frac{B(i\omega)}{(i\omega)^{\nu}A_1(i\omega)} \qquad (7.6)$$

При ω = 0, $W(i\omega) = \infty$ и АФХ претерпевает разрыв, поэтому решать вопрос об устойчивости замкнутой системы трудно, так как неясно, охватывает АФХ точку (-1, *i*0) или нет. Чтобы сохранить формулировку критерия для устойчивых в разомкнутом состоянии систем, при построении годографа Михайлова при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ обходят начало координат по полуокружности бесконечно малого радиуса *r.* Тогда нулевые корни дадут такой же угол поворота, как левые корни, т.е. каждый из векторов повернется на угол $\pi$ (рис. 7.5).

Обходу начала координат по малой дуге $re^{i\varphi}$ соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s)=\left.\frac{B(s)}{(s)^{\nu}A_1(s)}\right|_{s=0}=\frac{B(0)}{A_1(0)}\cdot\frac{1}{\left(re^{i\varphi}\right)^{\nu}}=Re^{-i\psi} \qquad (7.7)$$

При $r \to 0$ радиус $R \to \infty$, а аргумент $\psi$ меняется от $\nu\pi/2$ до $-\nu\pi/2$ при изменении $\varphi$ от $\pi/2$ до $-\pi/2$.

Таким образом, при движении по полуокружности бесконечно малого радиуса в плоскости корней АФХ разомкнутой системы сама $W(i\omega)$ может быть представлена в виде вектора бесконечно большой длины, поворачивающегося на комплексной плоскости по часовой стрелке на угол, равный $-\nu\pi$.

При изменении ω от 0 до $\infty$, т.е. $r \to 0$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, $W(i\omega)$ изменяется по дуге бесконечно большого радиуса, описывая угол от 0 до $-\nu\pi/2$ (рис. 7.5).

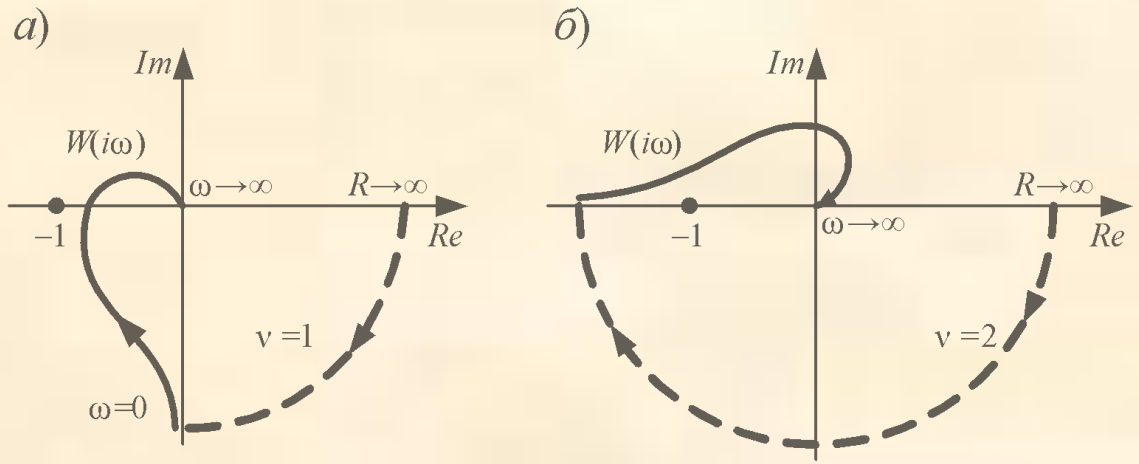


Рис. 7.5 АФХ нейтральной разомкнутой системы: ω→∞

*а* - с астатизмом первого порядка, ν = 1; *б* - с астатизмом второго порядка, ν = 2

Критерий Найквиста формулируется следующим образом.

Система автоматического регулирования, нейтральная в разомкнутом состоянии, устойчива в замкнутом состоянии, если АФХ разомкнутой системы с его дополнением в бесконечности не охватывает точку (-1, *i*0) при изменении ω от 0 до ∞.

Как видно из рис. 7.5, если разомкнутая система имеет астатизм первого порядка, то замкнутая система устойчива, так как точка (-1, *i*0) не охватывается, если же астатизм будет второго порядка, то замкнутая система неустойчива - точка (-1, *i*0) охватывается АФХ разомкнутой системы.

Достоинствами критерия Найквиста являются:

- применимость при неизвестных уравнениях некоторых звеньев разомкнутой системы;
- возможность исследования устойчивости систем с запаздыванием.

**Пример 7.1**

Исследовать устойчивость системы критерием Михайлова, если характеристическое уравнение системы имеет вид $D(s) = 2s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 5s + 1 = 0$.

Заменяя $s = i\omega$, находят действительную и мнимую функцию Михайлова:

$D(i\omega) = 2(i\omega)^4 + 4(i\omega)^3 + 2(i\omega)^2 + 5(i\omega) + 1$, откуда $U(\omega) = 2\omega^4 - 2\omega^2 + 1$; $V(\omega) = \omega(-4\omega^2 + 5)$.

Годограф Михайлова изображен на рис. 7.6. Его анализ показывает, что система неустойчива.

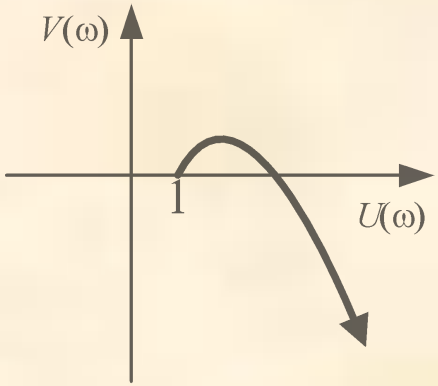


Рис. 7.6 Годограф

Приравниваем $U(\omega) = 0$; $V(\omega) = 0$. Решение этих уравнений дает:

$$\omega_{1,3}^2 = 1 \pm i; \quad \omega_0 = 0; \quad \omega_{2,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Так как имеются комплексно-сопряженные корни, то система неустойчива.

**Пример 7.2**

Исследовать устойчивость системы автоматического регулирования (рис. 7.7), если

$$W_1(s) = \frac{1}{2s+1}; \quad w_2(s) = e^{-2s}.$$

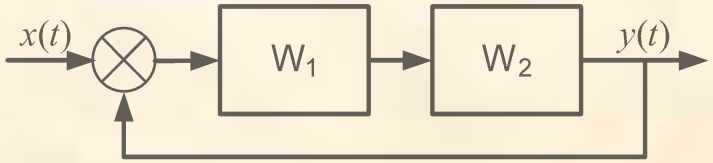


Рис. 7.7 Структурная схема САР

В разомкнутом состоянии система автоматического регулирования устойчива. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы изображена на рис. 7.8.

$$W^{разом}(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} e^{i(-2\omega - arctg\,2\omega)}$$

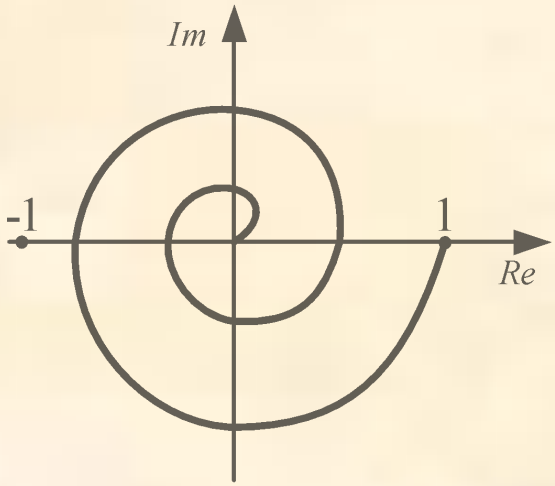


Рис. 7.8 АФХ разомкнутой системы

Так как амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку с координатами (-1, i0), то замкнутая система устойчива.