Основы автоматического управления

Лекция 8

Составитель:
Шендалева Е.В., к.т.н., доцент каф. ТХНГСС ОмГТУ

Исследование качества процессов регулирования

Одной из проблем, возникающих при построении систем автоматического регулирования, наряду с проблемой устойчивости, является качество регулирования, характеризующее точность и плавность протекания переходного процесса.

Система автоматического регулирования называется качественной, если она удовлетворяет определенным технологическим требованиям: например, как будет меняться реакция системы, если на ее вход действуют различного рода возмущения как по каналу управления, так и по каналу возмущения, т.е. обеспечивается ли принципиальная возможность прихода системы в некоторое установившееся состояние.

Такое понятие качества автоматической системы охватывает ее статические и динамические свойства, выраженные в количественной форме и получившие название показателей качества управления.

Для оценки качества регулирования в количественной форме используются показатели качества, которые подразделяются на прямые, косвенные, частотные, интегральные.

Показатели качества управления

Прямые показатели:

Наиболее распространенными прямыми показателями или критериями качества, применяемыми в системах управления, являются:

1 Статическая ошибка регулирования $y_{ст}$, определяемая как разность между установившимся значением регулируемой переменной и ее заданным значением (рис. 8.1а), т.е. $y_{ст} = y_{уст} - y_{зад}$.

2 Динамическая ошибка регулирования $y_{дин}$, определяемая как наибольшее отклонение в переходном процессе регулируемой переменной от ее установившегося значения (рис. 8.1б).

3 Время регулирования *Тр* – время, за которое разность между текущим значением регулируемой переменной и ее заданным значением (или установившимся) становится меньше ε (рис. 8.1), $|y_{зад}(t) - y(t)| < \varepsilon$.

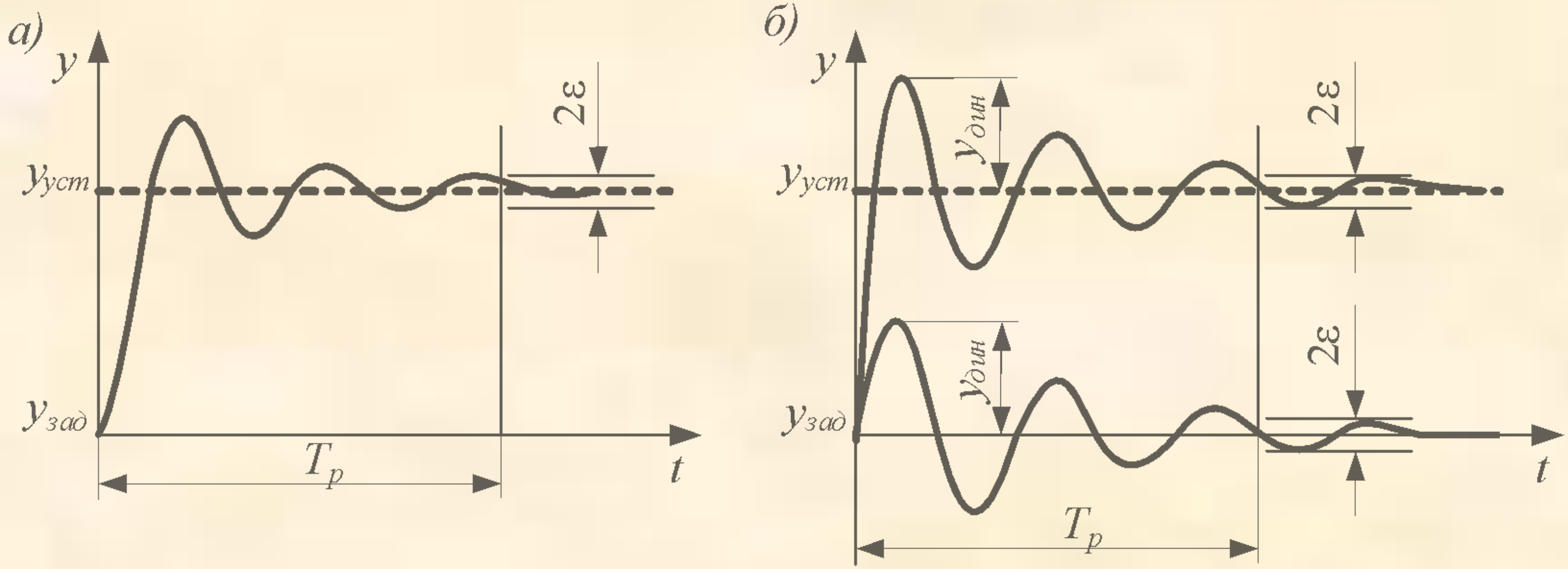

Рис. 8.1. Ошибки регулирования: а) статическая; б) динамическая

4 Перерегулирование σ, измеряемое в % и равное отношению первого максимального отклонения регулируемой переменной от ее установившегося значения к этому установившемуся значению (рис. 8.2а)

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}} 100\%. \quad (8.1)$$

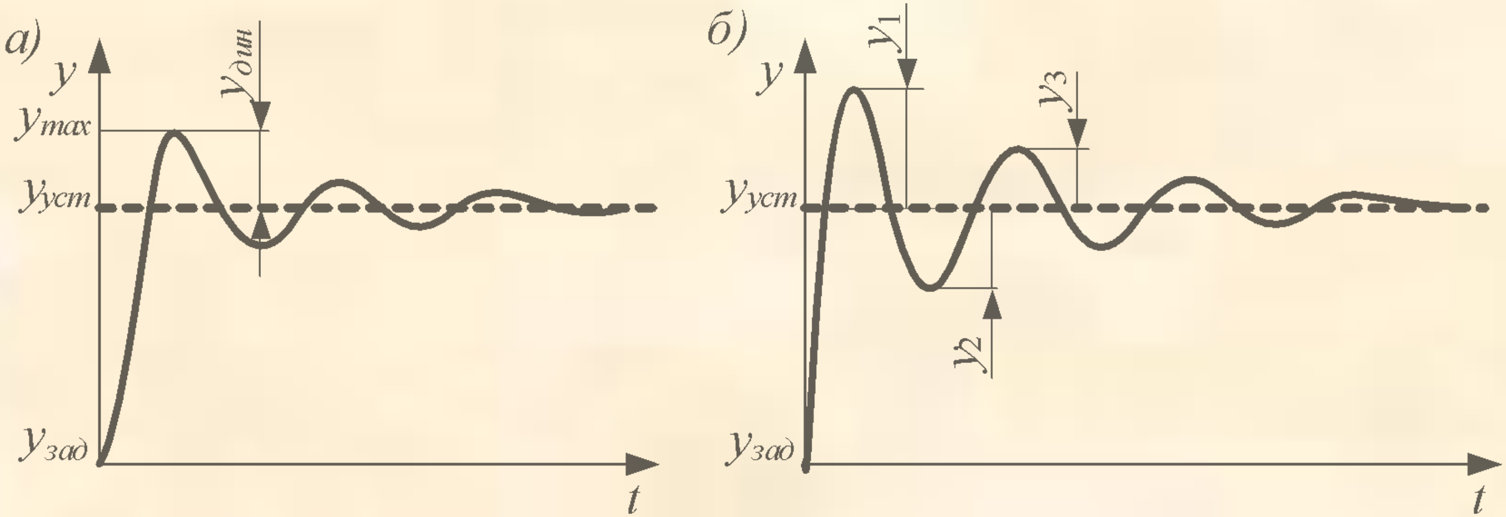

Рис. 8.2. Ошибки регулирования: а) перерегулирование; б) степень затухания

Качество регулирования считается удовлетворительным, если перерегулирование не превышает 30 – 40 %.

5 Степень затухания ψ, измеряемая в %, служит количественной оценкой интенсивности затухания колебательных процессов и определяется как отношение разности первой и третьей амплитуд к первой амплитуде (рис. 8.2б)

$$\psi = \frac{(y_1 - y_3)}{y_1} 100\% \qquad (8.2)$$

Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если степень затухания составляет 75 % и выше, в некоторых случаях допускается порядка 60 %.

Для того, чтобы система автоматического регулирования удовлетворяла требуемому качеству необходимо, чтобы прямые показатели качества регулирования этой системы были меньше или равны заданным.

$$y_{ст} \le y_{ст}^{зад}; \;\; y_{дин} \le y_{дин}^{зад}; \;\; T_p \le T_p^{зад}; \;\; \sigma \le \sigma_{зад}; \;\; \psi \ge \psi_{зад}.$$

Иногда требования по качеству регулирования могут быть более жесткие, например, переходный процесс должен быть монотонным или монотонным и без перегибов.

Прямые показатели качества удобно использовать в тех случаях, когда имеется график переходного процесса $y(t)$, который может быть получен экспериментально в реальной системе регулирования или путем моделирования на ЭВМ. Если же такой возможности нет, т. е. не удается никаким образом получить кривую переходного процесса, то пользуются косвенными показателями качества, которые вычисляются без построения графика переходного процесса по коэффициентам уравнений или по частотным характеристикам.

Косвенные показатели качества

Основную группу среди косвенных показателей качества составляют корневые показатели качества регулирования, к которым относятся степень устойчивости и степень колебательности. С точки зрения качества регулирования можно сделать следующие выводы.

1 Степень устойчивости характеризует интенсивность затухания наиболее медленно затухающей неколебательной составляющей переходного процесса, которая определяется как $y_к(t) = C_к e^{-\eta t}$. Пусть рассматриваемая система описывается дифференциальным уравнением второго порядка, характеристическое уравнение которого имеет два действительных различных корня $s_1 = -\alpha_1$, $s_2 = -\alpha_2$ и $\alpha_1 < \alpha_2$ (рис. 8.3*а*). Последним соответствуют две элементарные составляющие свободного движения системы (рис. 8.3*б*).

Как видно из графиков переходных процессов, чем меньше абсолютное значение корня характеристического уравнения, тем медленнее затухает соответствующая ему составляющая.

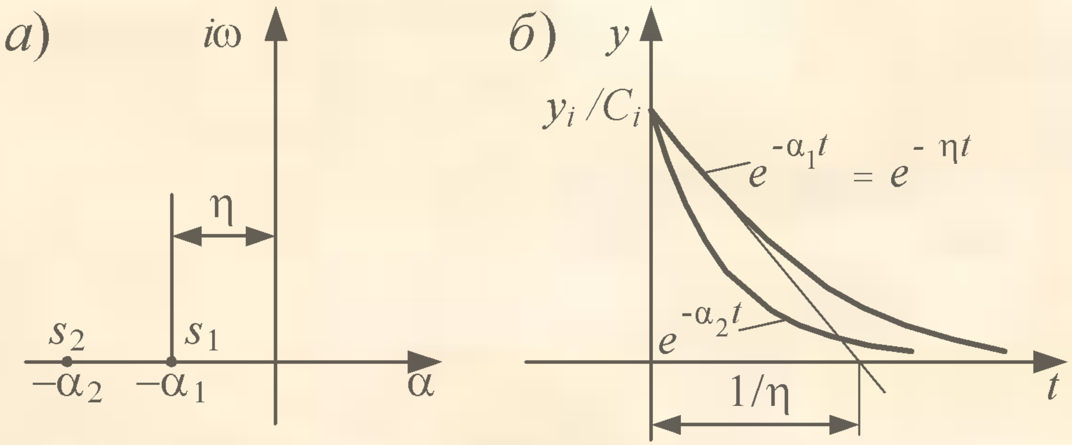

Рис. 8.3 определение качества монотонных переходных процессов по степени устойчивости:
а - расположение корней характеристического уравнения; б - составляющие переходного процесса

Результирующий переходный процесс $y(t) = \Sigma\, y_i\,(t)$. Его затухание определяется наиболее медленно затухающей составляющей, т.е. наименьшим по абсолютному значению корнем характеристического уравнения.

Если же характеристическое уравнение системы имеет комплексные сопряженные корни, то составляющая переходного процесса $y_i(t)$ будет иметь колебательный характер $y_i(t) = C_i e^{-\eta t} \cos\omega t$ и действительная часть корня, а фактически степень устойчивости η = α, характеризует огибающую (рис. 8.4).

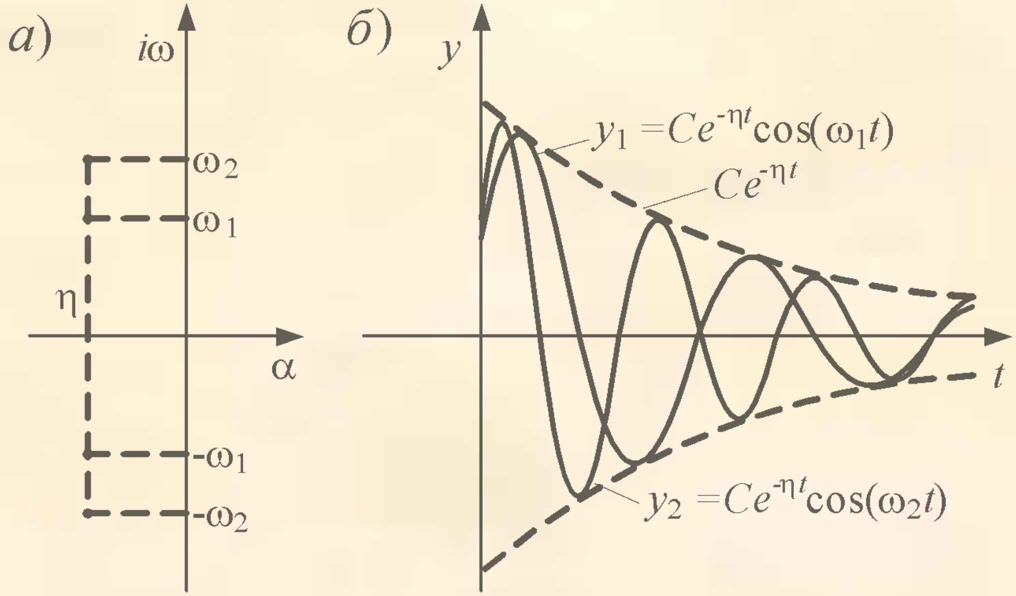

Рис. 8.4 Определение качества колебательных переходных процессов по степени устойчивости:
а - расположение корней характеристического уравнения; б - переходные процессы

Как видно из рис. 8.4 два колебательных переходных процесса разной частоты имеют одинаковые огибающие $y = e^{-\eta t}$. Но при одинаковой степени устойчивости качество этих переходных процессов существенно отличается друг от друга. Следовательно, знания степени устойчивости для оценки качества колебательных переходных процессов недостаточно.

Степень устойчивости может быть использована для оценки времени регулирования монотонных переходных процессов. Касательная к $y = C\mathrm{e}^{-\eta t}$ в точке t = 0 отсекает на оси абсцисс отрезок 1/η (рис. 8.3*б*). Время регулирования в этом случае определяется как

$$T\text{р} < 3/\eta. \tag{8.3}$$

Если требуется уменьшить время регулирования, то степень устойчивости надо увеличивать. При оценке времени регулирования частота не учитывается.

2 Степень колебательности так же, как и степень устойчивости, используется и для оценки запаса устойчивости и для оценки качества регулирования. Степень колебательности m − это модуль минимального отношения действительной и мнимой частей корня s_j характеристического уравнения

$$m = \min_j \left| \frac{Re(s_j)}{Im(s_j)} \right| = tg\varphi \qquad (8.4)$$

Степень колебательности характеризует затухание наиболее медленно затухающей составляющей $y(t) = Ae^{-m\omega t}\sin\omega t$, откуда следует, что изменение частоты влечет и изменение амплитуды колебаний.

Степень колебательности однозначно связана со степенью затухания. Действительно, в момент времени t_0 амплитуда свободной составляющей определяется как $y_1 = Ae^{-m\omega t_0}$, а в момент времени $t_0 + T$, т.е. через период, $y_3 = Ae^{-m\omega(t_0+T)}$. В этом случае степень затухания, согласно (8.2), запишется

$$\psi = \frac{Ae^{-m\omega t_0} - Ae^{-m\omega(t_0+T)}}{Ae^{-m\omega t_0}} Ae^{-m\omega T}. \qquad (8.4)$$

так как $T = 2\pi/\omega$, $\psi = 1 - e^{-2\pi m}$

Степень затухания изменяется от 0 до 1, а степень колебательности - от 0 до ∞. Наиболее часто используются следующие их значения: m = 0,141 (ψ = 0,61); m = 0,221 (ψ = 0,75); m = 0,366 (ψ = 0,9); m = 0,478 (ψ = 0,95).

3 Оценка статической ошибки может быть получена по предельной теореме

$$y_{ст} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} W_{ош}^{замк} X(s) s \qquad (8.5)$$

где $W_{ош}^{замк}(s)$ передаточная функция замкнутой системы по каналу ошибки; $X(s)$ - изображение задающего воздействия, в большинстве случаев $x(t) = C = \text{const}$ и $X(s) = C/s$.

С учетом вышесказанного

$$y_{ст} = \lim_{s\to 0} W_{ош}^{замк}(s) C.$$

Например, для систем с интегральным регулятором статическая ошибка отсутствует

$$y_{ст} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+\frac{S_0}{s}W_{об}(s)}C\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{s+S_0 W_{об}(s)}C\right) = 0$$

а для систем с пропорциональным регулятором равна $y_{ст} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+S_1 W_{об}(s)}C\right).$

Если в Wоб(s) коэффициент передачи равен k, то $y_{ст} = \frac{C}{1+S_1 k}.$

Из последнего соотношения видно, что в системах с П-регулятором статическая ошибка уменьшается с увеличением значения параметра настройки регулятора. В реальных системах берется максимально возможное значение S_1, исходя из обеспечения запаса устойчивости.

В заключение следует заметить, что динамическая ошибка корневыми методами не оценивается.

Интегральные критерии качества

Интегральные критерии качества представляют собой определенные интегралы по времени в пределах от 0 до ∞ от некоторой функции переходного процесса *y*(*t*) или ошибки ε (*t*) и вычисляются непосредственно, либо по переходным функциям системы, или по коэффициентам передаточной функции системы. Целью использования этих критериев является получение общей оценки быстродействия и отклонения регулируемой величины от установившегося значения. К интегральным критериям качества предъявляются два требования: а) простота вычисления интеграла; б) несложность выражения через коэффициенты дифференциального уравнения.

1 Линейный интегральный критерий

$$J_л = \int_0^\infty y(t)dt \qquad (8.6)$$

служит для оценки качества неколебательных процессов. Геометрически этот критерий характеризует площадь, заключенную между кривой переходного процесса и осью абсцисс (рис. 8.5*а*), он учитывает как время регулирования, так и величину динамических отклонений. Если неизвестна кривая переходного процесса, но известна передаточная функция замкнутой системы $W^{замк}(s)$ и входная переменная *x*(*t*) = 1(*t*), то значение линейного интегрального критерия определяется с использованием теоремы о конечном значении функции. Действительно, формулу (8.6) можно записать иначе

$$J_л = \lim_{t\to\infty} \int_0^t y(\tau)d\tau$$

и тогда

$$J_л = \lim_{s\to 0} s\frac{y(s)}{s} = \lim_{s\to 0} W^{замк}(s)x(s) = W^{замк}(0)x(0).$$

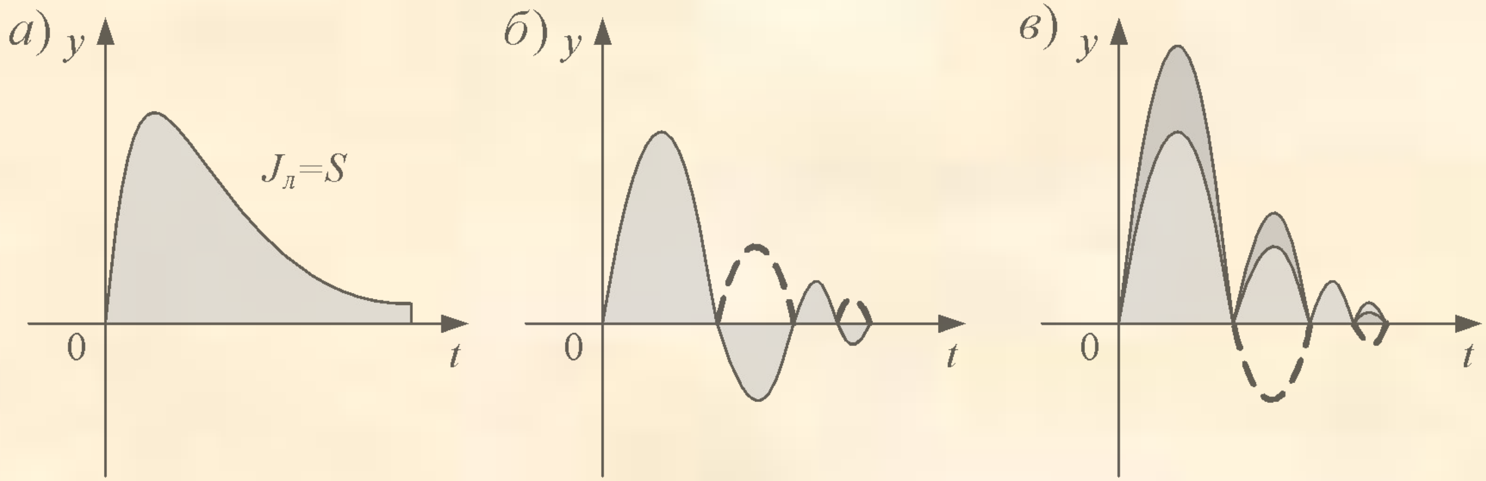

Рис. 8.5 Интегральные оценки качества регулирования: *а* - линейная; *б* - модульная; *в* - квадратичная

Линейный интегральный критерий качества можно вычислить и другими методами. Например, если даны дифференциальное уравнение и начальные условия

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0,\ y^{(n-1)}(0),\ \ldots,\ y'(0),\ y(0),$$

то, проинтегрировав его, получим

$$a_n \int_0^\infty y^{(n)}(t)dt + a_{n-1} \int_0^\infty y^{(n-1)}(t)dt + \ldots + a_0 \int_0^\infty y(t)dt = 0$$

Для устойчивых систем $y^{(i)}(\infty) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда $-a_n y^{(n-1)}(0) - a_{n-1} y^{(n-2)}(0) - \ldots - a_0 J_л = 0$, откуда

$$J_л = \frac{a_n y^{(n-1)}(0) + a_{n-1} y^{(n-2)}(0) + \ldots + a_1 y(0)}{a_0},$$

а при нулевых начальных условиях

$$J_л = \frac{a_1 y(0)}{a_0}.$$

Существуют модификации линейного интегрального критерия, которые применяются в тех случаях, когда начальный участок переходного процесса является менее ответственным, например,

$$J_{л}^{*}=\int_{0}^{\infty} t y(t) dt.$$

Выведем формулу, позволяющую вычислять такой критерий. Для этого продифференцируем по *s* функцию

$$y(s)=\int_{0}^{\infty} y(t) e^{-st} dt,$$

осуществляющую преобразование по Лапласу функции $y(t)$

$$\frac{dy(s)}{ds}=-\int_{0}^{\infty} t y(t) e^{-st} dt.$$

Если перейти к пределу $\frac{dy(s)}{ds}$ при $s \to 0$, то получим

$$J_{л}^{*}=\lim_{s\to 0}(-1)y'(s).$$

Следует отметить, что для вычисления таких критериев не требуется знание переходного процесса. Чем меньше значение линейного интегрального критерия, тем лучше качество процесса регулирования. Однако использование данного типа критериев для знакопеременных переходных процессов не дает объективной картины, так, например, для незатухающей синусоиды $J_{л}$ = 0. Поэтому для оценки качества регулирования таких процессов используют интегральные оценки, знакопеременность подынтегральной функции которых устранена каким-либо способом.

Пример 8.1

Требуется вычислить $J_л^*$ для системы с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{s}{(s+1)^2}.$$

Так как $W(s)=\frac{y(s)}{x(s)}$, а $x(s)=\frac{1}{s}$, $y(s)=W(s)x(s)=\frac{W(s)}{s}=\frac{1}{(s+1)^2}$.

$$J_л^*=\lim_{s\to 0}\left\{-1\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]\right\}'=\lim_{s\to 0}(-1)\left(-2\frac{1}{(s+1)^3}\right)=2.$$

2 Модульный интегральный критерий

$$J_м=\int_0^\infty |y(t)|dt. \quad (8.7)$$

применяется для оценки качества колебательных процессов, а для неколебательных процессов он совпадает с линейным интегральным критерием. Для его вычисления требуется знание переходного процесса. На практике этот критерий используется при численном исследовании систем на моделях с применением вычислительной техники, т.е. там, где операция взятия модуля не представляет трудности.

Геометрически критерий равен площади, заключенной между кривой $y(t)$ и осью абсцисс (рис. 8.5*б*).

В некоторых случаях используют модификацию модульного интегрального критерия

$$J_м=\int_0^\infty t|y(t)|dt,$$

которая придает больший вес значениям переходного процесса в его конце.

3 Интегральный квадратичный критерий

$$J_{кв} = \int_0^\infty y^2(t)dt, \tag{8.9}$$

является наиболее распространенным критерием качества и представляет собой площадь под кривой $y^2(t)$ (рис. 8.5*в*). Как видно из (8.9), разные по величине ординаты переходного процесса входят в критерий с разным весом, что приводит к тому, что начальный участок переходного процесса приобретает наибольшее значение, чем его "хвост", который практически не влияет на квадратичный критерий.

Стремясь минимизировать (8.9), фактически минимизируют наибольшие отклонения регулируемой величины, поэтому минимальные значения критерия всегда соответствуют колебательным процессам с малым затуханием. С целью устранения этого недостатка применяют улучшенную квадратичную оценку

$$J'_{кв} = \int_0^\infty \left(y^2(t) + Ty'^2(t)\right)dt, \tag{8.10}$$

которая, кроме самих отклонений, учитывает с весовым коэффициентом их производную. Весовой коэффициент выбирается равным желаемому времени нарастания или применяется в пределах

$$T_p/6 \le T \le T_p/3, \tag{8.11}$$

где T_p - желаемая длительность переходного процесса.

Квадратичный критерий, как и линейный, можно вычислить без построения переходного процесса по частотной характеристике замкнутой системы и преобразованию по Фурье от входного сигнала. Используя формулу Релея, получают

$$J_{кв}=\int_0^{\infty}y^2(t)dt=\int_0^{\infty}y(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}y(i\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}y(i\omega)\left[\int_0^{\infty}y(t)e^{i\omega t}dt\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}y(i\omega)y(-i\omega)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|y(i\omega)|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|W(i\omega)|^2|x(i\omega)|^2d\omega.$$

В заключение следует отметить, что абсолютные значения любой интегральной оценки сами по себе не представляют интереса. Они служат для сопоставления различных вариантов настройки одной и той же системы, а также для определения параметров настройки системы.