

# Теория Автоматического Управления



# Теория Автоматического Управления

Цель курса состоит в изучении принципов автоматического управления, типов систем автоматического управления, используемых в технике, математического аппарата исследования линейных САУ, основных элементов и характеристик САУ, методов анализа САУ на устойчивость и качество управления, способов корректировки свойств линейных САУ.

# Содержание

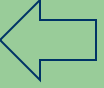
- 1.1. Общие понятия
- 1.2. Фундаментальные принципы управления
- 2.1. Основные виды САУ
- 2.2. Статические характеристики
- 2.3. Статическое и астатическое регулирование
- 3.1. Динамический режим САУ. Управление динамики
- 3.2. Линеаризация уравнения динамики
- 3.3. Передаточная функция
- 3.4. Элементарные динамические звенья
- 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем
- 4.2. САР напряжения генератора постоянного тока
- 5.1. Понятие временных характеристик
- 5.2. Переходные характеристики элементарных звеньев
- 6.1. Понятие частотных характеристик
- 6.2. Частотные характеристики типовых звеньев



## 1.1 Общие понятия

Теория автоматического управления (ТАУ) появилась во второй половине 19 века сначала как теория регулирования. Широкое применение паровых машин вызвало потребность в регуляторах, то есть в специальных устройствах, поддерживающих устойчивый режим работы паровой машины. Это дало начало научным исследованиям в области управления техническими объектами. Оказалось, что результаты и выводы данной теории могут быть применимы к управлению объектами различной природы с различными принципами действия. В настоящее время сфера ее влияния расширилась на анализ динамики таких систем, как экономические, социальные и т.п. Поэтому прежнее название “Теория автоматического регулирования” заменено на более широкое - “Теория автоматического управления”.

*Основной задачей автоматического управления является поддержание определенного закона изменения одной или нескольких физических величин, характеризующих процессы, протекающие в ОУ, без непосредственного участия человека. Эти величины называются управляемыми величинами. Если в качестве ОУ рассматривается хлебопекарная печь, то управляемой величиной будет температура, которая должна изменяться по заданной программе в соответствии с требованиями технологического процесса*



## 1.2 Фундаментальные принципы управления

- 1.2.1. Принцип разомкнутого управления
- 1.2.2. Принцип компенсации
- 1.2.3. Принцип обратной связи

## 1.2.1. Принцип разомкнутого управления

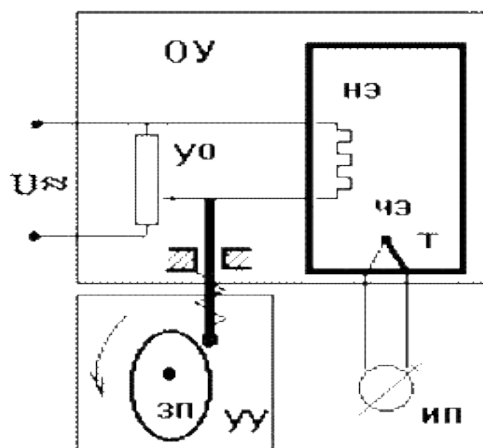


Рис. 1

Рассмотрим САУ хлебопекарной печи (рис.1). Ее *принципиальная схема* показывает принцип действия данной конкретной САУ, состоящей из конкретных технических устройств. Принципиальные схемы могут быть электрическими, гидравлическими, кинематическими и т.п.

Технология выпечки требует изменения температуры в печи по заданной программе, в частном случае требуется поддержание постоянной температуры. Для этого надо реостатом регулировать напряжение на нагревательном элементе НЭ. Подобная часть ОУ, с помощью которой можно изменять параметры управляемого процесса называется *управляющим органом* объекта (УО). Это может быть реостат, вентиль, заслонка и т.п.



## 1.2.1. Принцип разомкнутого управления

Часть ОУ, которая преобразует управляемую величину в пропорциональную ей величину, удобную для использования в САУ, называют *чувствительным элементом* (ЧЭ). Физическую величину на выходе ЧЭ называют *выходной величиной* ОУ. Как правило, это электрический сигнал (ток, напряжение) или механическое перемещение. В качестве ЧЭ могут использоваться термопары, тахометры, рычаги, электрические мосты, датчики давления, деформации, положения и т.п. В нашем случае это термопара, на выходе которой формируется напряжение, пропорциональное температуре в печи, подаваемое на измерительный прибор ИП для контроля. Физическую величину на входе управляющего органа ОУ называют *входной величиной* ОУ.

*Управляющее воздействие*  $\mathbf{u}(t)$  - это воздействие, прикладываемое к УО объекта с целью поддержания требуемых значений управляемой величины. Оно формируется *устройством управления* (УУ). Ядром УУ является *исполнительный элемент*, в качестве которого может использоваться электрические или поршневые двигатели, мембраны, электромагниты и т.п.



## 1.2.1. Принцип разомкнутого управления

*Задающим устройством (ЗУ) называется устройство, задающее программу изменения управляющего воздействия, то есть формирующее задающий сигнал  $u_0(t)$ . В простейшем случае  $u_0(t) = \text{const}$ . ЗУ может быть выполнено в виде отдельного устройства, быть встроенным в УУ или же вообще отсутствовать. В качестве ЗУ может выступать кулачковый механизм, магнитофонная лента, маятник в часах, задающий профиль и т.п. Роль УУ и ЗУ может исполнять человек. Однако это уже не САУ. В нашем примере УУ является кулачковый механизм, перемещающий движок реостата согласно программе, которая задается профилем кулачка.*

Величина  $f(t)$ , подаваемая на второй вход звена, называется *возмущением*. Она отражает влияние на выходную величину  $y(t)$  изменений окружающей среды, нагрузки и т.п.

В общем случае функциональное звено может иметь несколько входов и выходов (рис.3). Здесь  $u_1, u_2, \dots, u_n$  - входные (управляющие) воздействия;  $f_1, f_2, \dots, f_m$  - возмущающие воздействия;  $y_1, y_2, \dots, y_k$  - выходные величины.



## 1.2.2. Принцип компенсации

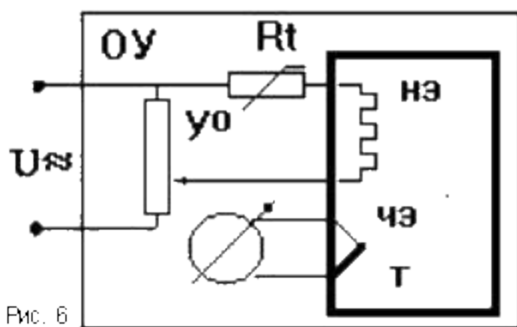
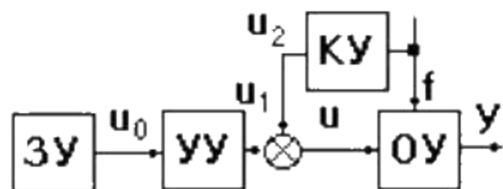


Рис. 6

Если возмущающий фактор искажает выходную величину до недопустимых пределов, то применяют *принцип компенсации* (рис.6, КУ - *корректирующее устройство*).

Пусть  $y_0$  - значение выходной величины, которое требуется обеспечить согласно программе. На самом деле из-за возмущения  $f$  на выходе регистрируется значение  $y$ . Величина  $e = y_0 - y$  называется *отклонением от заданной величины*. Если каким-то образом удастся измерить величину  $f$ , то можно откорректировать управляющее воздействие  $u$  на входе  $ОУ$ , суммируя сигнал  $УУ$  с корректирующим воздействием, пропорциональным возмущению  $f$  и компенсирующим его влияние.



## 1.2.2. Принцип компенсации

Примеры систем компенсации: биметаллический маятник в часах, компенсационная обмотка машины постоянного тока и т.п. На рис.6 в цепи НЭ стоит термосопротивление  $R_t$ , величина которого меняется в зависимости от колебаний температуры окружающей среды, корректируя напряжение на НЭ.

*Достоинство принципа компенсации:* быстрота реакции на возмущения. Он более точен, чем принцип разомкнутого управления. *Недостаток:* невозможность учета подобным образом всех возможных возмущений.

## 1.2.3. Принцип обратной связи

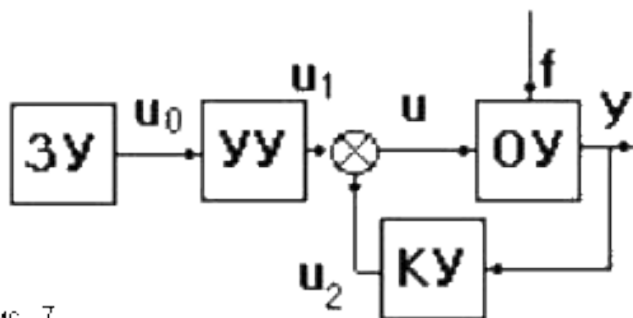


Рис. 7

Наибольшее распространение в технике получил *принцип обратной связи* (рис.7). Здесь управляющее воздействие корректируется в зависимости от выходной величины  $y(t)$ . И уже не важно, какие возмущения действуют на ОУ. Если значение  $y(t)$  отклоняется от требуемого, то происходит корректировка сигнала  $u(t)$  с целью уменьшения данного отклонения. Связь выхода ОУ с его входом называется *главной обратной связью (ОС)*.

## 1.2.3. Принцип обратной связи

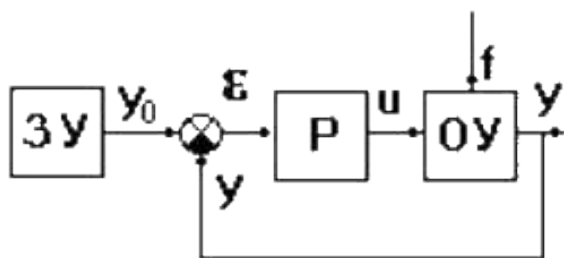


Рис. 8

В частном случае (рис.8) ЗУ формирует требуемое значение выходной величины  $y_0(t)$ , которое сравнивается с действительным значением на выходе САУ  $y(t)$ . Отклонение  $e = y_0 - y$  с выхода сравнивающего устройства подается на вход регулятора  $P$ , объединяющего в себе УУ, УО, ЧЭ. Если  $e \neq 0$ , то регулятор формирует управляющее воздействие  $u(t)$ , действующее до тех пор, пока не обеспечится равенство  $e = 0$ , или  $y = y_0$ . Так как на регулятор подается разность сигналов, то такая обратная связь называется *отрицательной*, в отличие от *положительной обратной связи*, когда сигналы складываются.

## 1.2.3. Принцип обратной связи

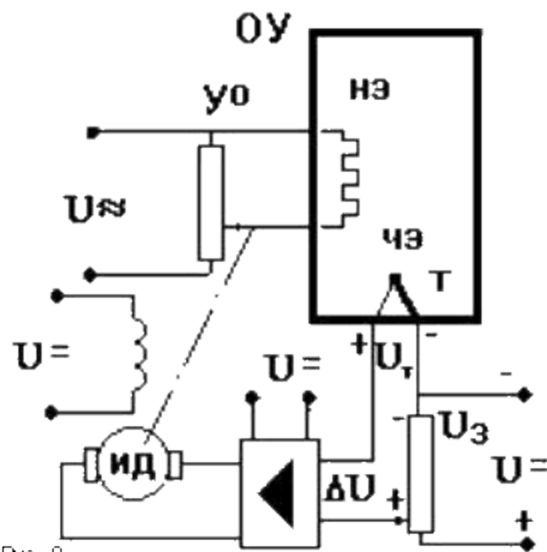


Рис. 9

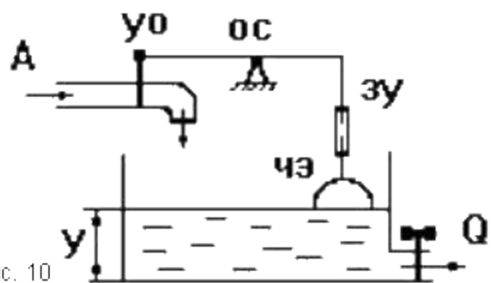


Рис. 10

Такое управление в функции отклонения называется *регулированием*, а подобную САУ называют *системой автоматического регулирования* (САР). Так на рис.9 изображена упрощенная схема САР хлебопекарной печи. Роль ЗУ здесь выполняет потенциометр, напряжение на котором  $U_3$  сравнивается с напряжением на термопаре  $U_T$ . Их разность  $U$  через усилитель подается на исполнительный двигатель ИД, регулирующий через редуктор положение движка реостата в цепи НЭ. Наличие усилителя говорит о том, что данная САР является *системой непрямого регулирования*, так как энергия для функций управления берется от посторонних источников питания, в отличие от *систем прямого регулирования*, в которых



## 1.2.3. Принцип обратной связи

*Недостатком принципа обратной связи является инерционность системы. Поэтому часто применяют комбинацию данного принципа с принципом компенсации, что позволяет объединить достоинства обоих принципов: быстроту реакции на возмущение принципа компенсации и точность регулирования независимо от природы возмущений принципа обратной связи.*

## 2.1. Основные виды САУ

В зависимости от принципа и закона функционирования ЗУ, задающего программу изменения выходной величины, различают основные виды САУ: *системы стабилизации, программные, следящие и самонастраивающиеся системы*, среди которых можно выделить *экстремальные, оптимальные и адаптивные системы*.

В *системах стабилизации* (рис.9,10) обеспечивается неизменное значение управляемой величины при всех видах возмущений, т.е.  **$y(t) = \text{const}$** . ЗУ формирует эталонный сигнал, с которым сравнивается выходная величина. ЗУ, как правило, допускает настройку эталонного сигнала, что позволяет менять по желанию значение выходной величины.

В *программных системах* обеспечивается изменение управляемой величины в соответствии с программой, формируемой ЗУ. В качестве ЗУ может использоваться кулачковый механизм, устройство считывания с перфоленты или магнитной ленты и т.п. К этому виду САУ можно отнести заводные игрушки, магнитофоны, проигрыватели и т.п. Различают *системы с временной программой* (например, рис.1), обеспечивающие  **$y = f(t)$** , и *системы с пространственной программой*, в которых  **$y = f(x)$** , применяемые там, где на выходе САУ важно получить требуемую траекторию в пространстве, например, в копировальном станке (рис.11),



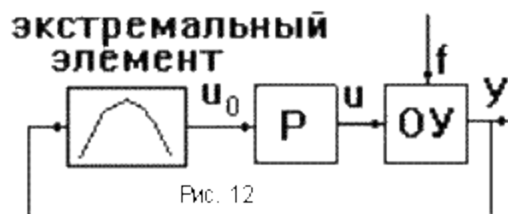
## 2.1. Основные виды САУ

*Следящие системы* отличаются от программных лишь тем, что программа  $y = f(t)$  или  $y = f(x)$  заранее неизвестна. В качестве ЗУ выступает устройство, следящее за изменением какого-либо внешнего параметра. Эти изменения и будут определять изменения выходной величины САУ. Например, рука робота, повторяющая движения руки человека. Все три рассмотренные вида САУ могут быть построены по любому из трех фундаментальных принципов управления. Для них характерно требование совпадения выходной величины с некоторым предписанным значением на входе САУ, которое само может меняться. То есть в любой момент времени требуемое значение выходной величины определено однозначно.

*В самонастраивающихся системах* ЗУ ищет такое значение управляемой величины, которое в каком-то смысле является оптимальным.



## 2.1. Основные виды САУ



Так в *экстремальных системах* (рис.12) требуется, чтобы выходная величина всегда принимала экстремальное значение из всех возможных, которое заранее не определено и может непредсказуемо изменяться. Для его поиска система выполняет небольшие пробные движения и анализирует реакцию выходной величины на эти пробы. После этого вырабатывается управляющее воздействие, приближающее выходную величину к экстремальному значению. Процесс повторяется непрерывно. Так как в данных САУ происходит непрерывная оценка выходного параметра, то они выполняются только в соответствии с третьим принципом управления: принципом обратной связи.



## 2.1. Основные виды САУ

*Оптимальные системы* являются более сложным вариантом экстремальных систем. Здесь происходит, как правило, сложная обработка информации о характере изменения выходных величин и возмущений, о характере влияния управляющих воздействий на выходные величины, может быть задействована теоретическая информация, информация эвристического характера и т.п. Поэтому основным отличием экстремальных систем является наличие ЭВМ. Эти системы могут работать в соответствии с любым из трех фундаментальных принципов управления.

В *адаптивных системах* предусмотрена возможность автоматической перенастройки параметров или изменения принципиальной схемы САУ с целью приспособления к изменяющимся внешним условиям. В соответствии с этим различают *самонастраивающиеся* и *самоорганизующиеся* адаптивные системы.

Все виды САУ обеспечивают совпадение выходной величины с требуемым значением. Отличие лишь в программе изменения требуемого значения. Поэтому основы ТАУ строятся на анализе самых простых систем: систем стабилизации. Научившись анализировать динамические свойства САУ, мы учтем все особенности более сложных видов САУ.

## 2.2. Статические характеристики

Режим работы САУ, в котором управляемая величина и все промежуточные величины не изменяются во времени, называется *установившимся*, или *статическим режимом*. Любое звено и САУ в целом в данном режиме описывается *уравнениями статики* вида  $y = F(u, f)$ , в которых отсутствует время  $t$ . Соответствующие им графики называются *статическими характеристиками*. Статическая характеристика звена с одним входом  $u$  может быть представлена кривой  $y = F(u)$  (рис. 13). Если звено имеет второй вход по возмущению  $f$ , то статическая характеристика задается семейством кривых  $y = F(u)$  при различных значениях  $f$ , или  $y = F(f)$  при различных  $u$ .

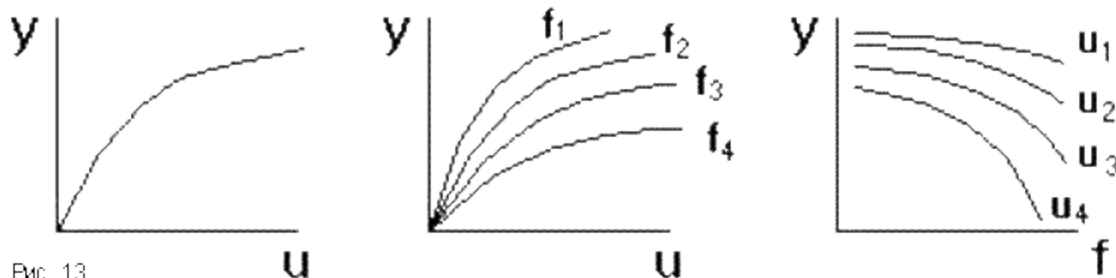


Рис. 13

## 2.2. Статические характеристики

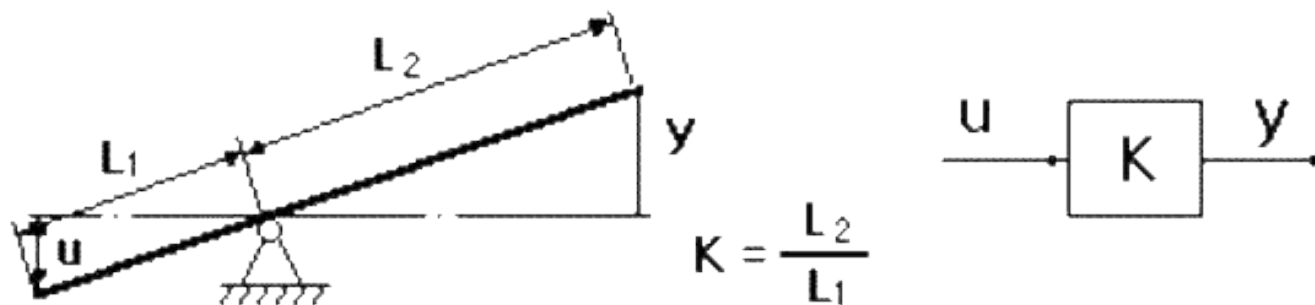
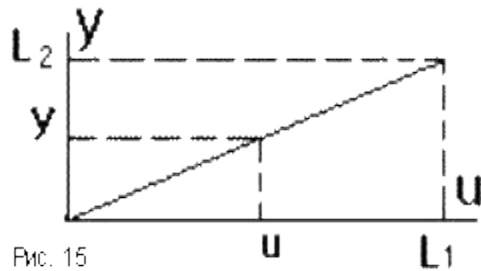


Рис. 14

Так примером одного из функциональных звеньев системы регулирования воды в баке является обычный рычаг (рис.14). Уравнение статики для него имеет вид  $y = Ku$ . Его можно изобразить звеном, функцией которого является усиление (или ослабление) входного сигнала в  $K$  раз. Коэффициент  $K = y/u$ , равный отношению выходной величины к входной называется *коэффициентом усиления* звена. Когда входная и выходная величины имеют разную природу, его называют *коэффициентом передачи*.

## 2.2. Статические характеристики



Статическая характеристика данного звена имеет вид отрезка прямой линии с наклоном  $\alpha = \text{arctg}(L_2/L_1) = \text{arctg}(K)$  (рис.15). Звенья с линейными статическими характеристиками называются *линейными*. Статические характеристики реальных звеньев, как правило, нелинейны. Такие звенья называются *нелинейными*. Для них характерна зависимость коэффициента передачи от величины входного сигнала:

$$K = y/u \text{ const.}$$

## 2.2. Статические характеристики

Например, статическая характеристика насыщенного генератора постоянного тока представлена на рис.16. Обычно нелинейная характеристика не может быть выражена какой-либо математической зависимостью и ее приходится задавать таблично или графически.

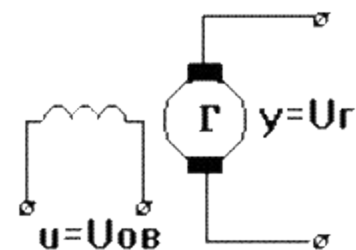
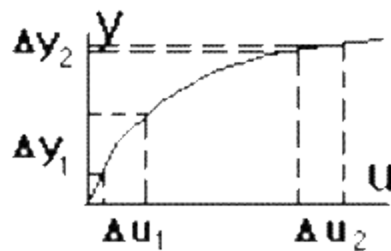


Рис. 16



$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= \Delta u_2 \\ \Delta y_1 &\neq \Delta y_2 \\ K_1 &\neq K_2\end{aligned}$$

## 2.2. Статические характеристики

Зная статические характеристики отдельных звеньев, можно построить статическую характеристику САУ (рис.17, 18). Если все звенья САУ линейные, то САУ имеет линейную статическую характеристику и называется *линейной*. Если хотя бы одно звено нелинейное, то САУ *нелинейная*.

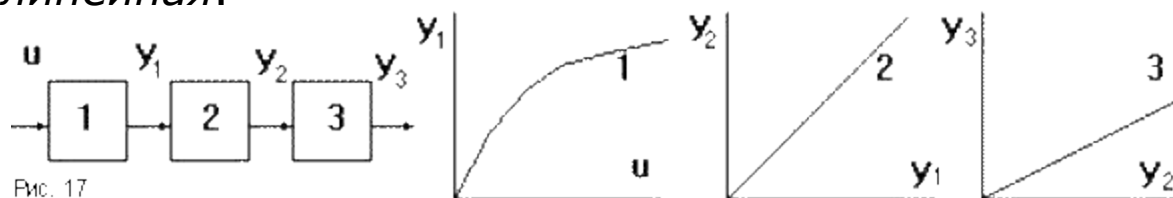


Рис. 17

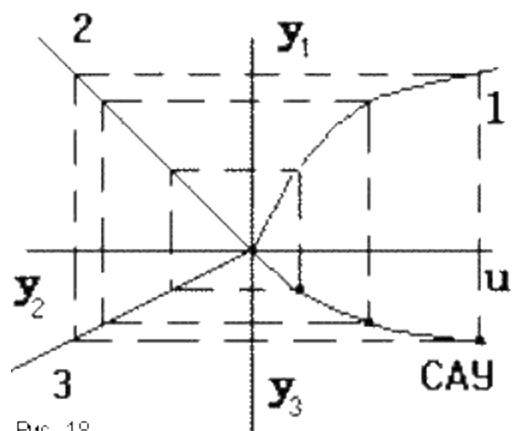


Рис. 18

## 2.2. Статические характеристики

Звенья, для которых можно задать статическую характеристику в виде жесткой функциональной зависимости выходной величины от входной, называются *статическими*. Если такая связь отсутствует и каждому значению входной величины соответствует множество значений выходной величины, то такое звено называется *астатическим*.

Изображать его статическую характеристику бессмысленно. Примером астатического звена может служить двигатель, входной величиной которого является

$$\alpha = k \int_0^t U dt$$

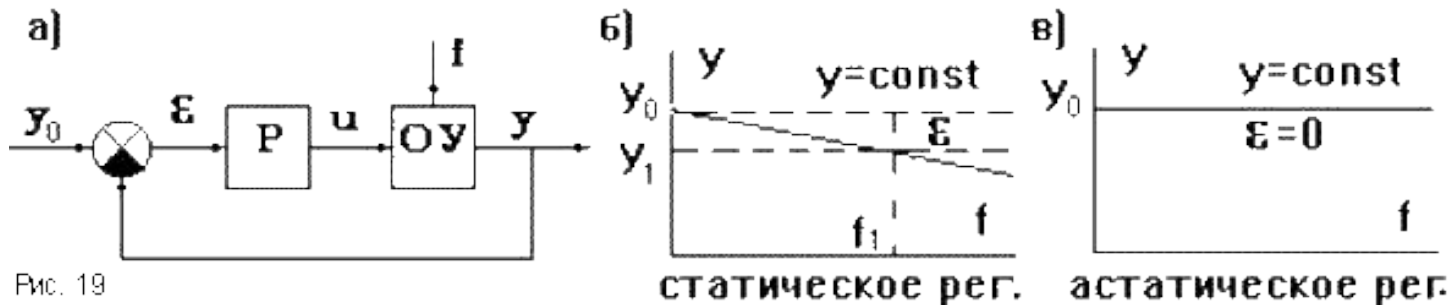
напряжение **U**, а выходной - угол поворота вала ,

величина которого при **U = const** может принимать любые значения. Выходная величина астатического звена даже в установившемся режиме является функцией времени.



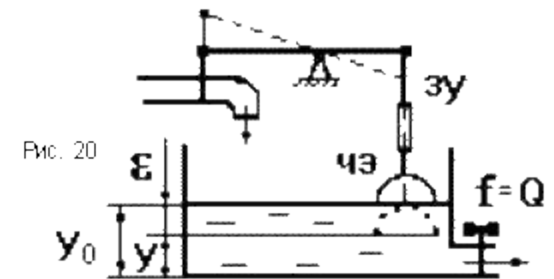
## 2.3. Статическое и астатическое регулирование

Если на управляемый процесс действует возмущение  $f$ , то важное значение имеет статическая характеристика САУ в форме  $y = F(f)$  при  $y_0 = \text{const}$ . Возможны два характерных вида этих характеристик (рис.19). В соответствии с тем, какая из двух характеристик свойственна для данной САУ, различают *статическое* и *астатическое регулирование*.



## 2.3. Статическое и астатическое регулирование

Рассмотрим систему регулирования уровня воды в баке (рис.20). Возмущающим фактором является поток  $Q$  воды из бака. Пусть при  $Q = 0$  имеем  $y = y_0$ ,  $e = 0$ . ЗУ системы настраивается так, чтобы вода при этом не поступала. При  $Q_0$ , уровень воды понижается ( $e_0$ ), поплавок опускается и открывает заслонку, в бак начинает поступать вода. Новое состояние равновесия достигается при равенстве входящего и выходящего потоков воды. Но в любом случае при  $Q_0$  заслонка должна быть обязательно открыта, что возможно только при  $e_0$ . Причем, чем больше  $Q$ , тем при больших значениях  $e$ , устанавливается новое равновесное состояние. Статическая характеристика САУ имеет характерный наклон (рис.19б). Это есть пример *статического регулирования*. Для получения статического регулирования все звенья САУ



## 2.3. Статическое и астатическое регулирование

Статические регуляторы работают при обязательном отклонении  $e$  регулируемой величины от требуемого значения. Это отклонение тем больше, чем больше возмущение  $f$ . Это заложено в принципе действия регулятора и не является его погрешностью, поэтому данное отклонение называется *статической ошибкой регулятора*. Из рис.21 видно, что, чем больше коэффициент передачи регулятора  $K_p$ , тем на большую величину откроется заслонка при одних и тех же значениях  $e$ , обеспечив в установившемся режиме большую величину потока  $Q$ . Это значит, что на статической характеристике одинаковым значениям  $e$  при больших  $K_p$  будут соответствовать большие значения возмущения  $Q$ , статическая характеристика САУ пойдет более полого. Поэтому, чтобы уменьшить статическую ошибку надо увеличивать коэффициент передачи регулятора. Того же результата можно добиться, увеличивая коэффициент передачи объекта управления, но это дело конструкторов, проектирующих данный объект, а не специалистов по автоматике.



Рис. 21

## 2.3. Статическое и астатическое регулирование

Статизм  $d$ , САР, характеризует насколько сильно значение регулируемой величины отклоняется от требуемого значения при действии возмущений, и равна тангенсу угла наклона статической характеристики, построенной в относительных единицах:

$$d = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta y / y_n}{\Delta f / f_n} \quad (\text{рис.22}),$$

где  $y = y_n$ ,  $f = f_n$  - точка номинального режима САУ. При достаточно больших значениях  $K_p$

имеем  $d \approx 1/K_p$ . В некоторых случаях статическая ошибка недопустима, тогда переходят к *астатическому* регулированию, при котором регулируемая величина в установившемся режиме принимает точно требуемое значение независимо от величины возмущающего фактора. Статическая характеристика астатической САУ не имеет наклона (рис.19в). Возможные неточности относятся к погрешностям конкретной системы и не являются закономерными

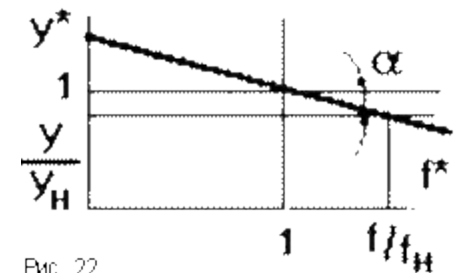


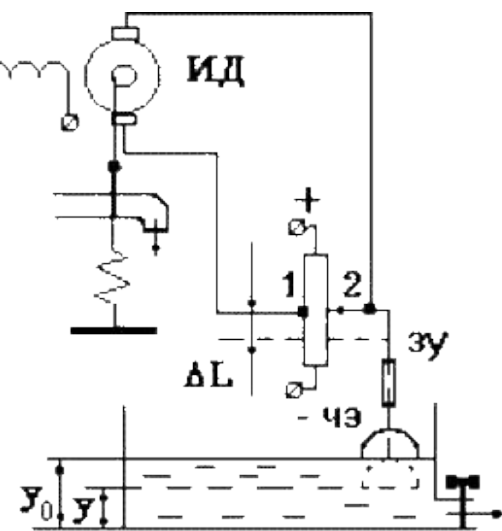
Рис. 22

## 2.3. Статическое и астатическое регулирование

Для того, чтобы получить астатическое регулирование, необходимо в регулятор включить астатическое звено, например ИД, между ЧЭ и УО (рис.23).

Если уровень воды понизится, то поплавок переместит движок потенциометра на величину  $L$ , за счет этого появится разность потенциалов  $0$  и ИД начнет поднимать заслонку до тех пор, пока не уменьшится до нуля, а это возможно только при  $y = y_0$ . При поднятии уровня воды разность потенциалов сменит знак, и двигатель будет вращаться в противоположную сторону, опуская заслонку.

*Достоинства и недостатки статического и астатического регулирования:* статические регуляторы обладают статической ошибкой; астатические регуляторы статической ошибки не имеют, но они более инерционны, сложны конструктивно и более дороги.



## 3.1. Динамический режим САУ. Управление динамики

Установившийся режим не является характерным для САУ. Обычно на управляемый процесс действуют различные возмущения, отклоняющие управляемый параметр от заданной величины. Процесс установления требуемого значения управляемой величины называется *регулированием*.

Ввиду инерционности звеньев

регулирование не может

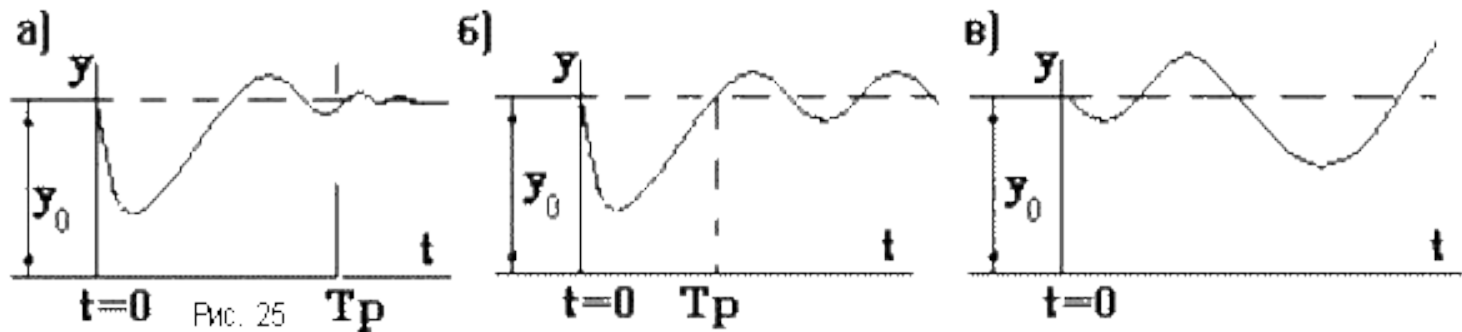
осуществляться мгновенно.

Рассмотрим САУ, находящуюся в установившемся режиме, характеризующемся значением выходной величины  $y = y_0$ . Пусть в момент  $t = 0$  на объект воздействовал какой-либо возмущающий фактор, отклонив значение регулируемой величины. Через некоторое время регулятор вернет САУ к первоначальному состоянию (с учетом статической точности) (рис.24). Если регулируемая величина изменяется во времени по апериодическому закону, то процесс регулирования называется *апериодическим*.



Рис. 24

## 3.1. Динамический режим САУ. Управление динамики



При резких возмущениях возможен *колебательный затухающий* процесс (рис.25а). Существует и такая вероятность, что после некоторого времени  $T_p$  в системе установятся незатухающие колебания регулируемой величины - *незатухающий колебательный* процесс (рис.25б). Последний вид - *расходящийся колебательный* процесс (рис.25в).



## 3.1. Динамический режим САУ. Управление динамики

Таким образом, основным режимом работы САУ считается *динамический режим*, характеризующийся протеканием в ней *переходных процессов*. Поэтому *второй основной задачей при разработке САУ является анализ динамических режимов работы САУ*.

Поведение САУ или любого ее звена в динамических режимах описывается *уравнением динамики*  $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{t})$ , описывающее изменение величин во времени. Как правило, это дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений. Поэтому *основным методом исследования САУ в динамических режимах является метод решения дифференциальных уравнений*. Порядок дифференциальных уравнений может быть довольно высоким, то есть зависимостью связаны как сами входные и выходные величины  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ , так и скорости их изменения, ускорения и т.д. Поэтому уравнение динамики в общем виде можно записать так:  
 $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \dots, \mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \dots, \mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \dots, \mathbf{f}^{(k)}) = \mathbf{0}$ .





## 3.2. Линеаризация уравнения динамики

В общем случае уравнение динамики оказывается нелинейным, так как реальные звенья САУ обычно нелинейны. В целях упрощения теории нелинейные уравнения заменяют линейными, которые приблизительно описывают динамические процессы в САУ. Получаемая при этом точность уравнений оказывается достаточной для технических задач. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называется *линеаризацией уравнений динамики*. Рассмотрим сначала геометрическое обоснование линеаризации.

## 3.2. Линеаризация уравнения динамики

В нормально функционирующей САУ значение регулируемой и всех промежуточных величин незначительно отличается от требуемых. В пределах малых отклонений все нелинейные зависимости между величинами, входящими в уравнение динамики, могут быть приближенно представлены отрезками прямых линий. Например, нелинейная статическая характеристика звена на участке АВ (рис.26) может быть представлена отрезком касательной в точке номинального режима  $A''B''$ . Начало координат переносится в точку  $O'$ , и в уравнениях записываются не абсолютные значения величин  $y, u, f$ , а их отклонения от номинальных значений:  $y = y - y_n$ ,  $u = u - u_n$ ,  $f = f - f_n$ . Это позволяет получить нулевые начальные условия, если считать, что при  $t \leq 0$  система находилась в номинальном режиме в

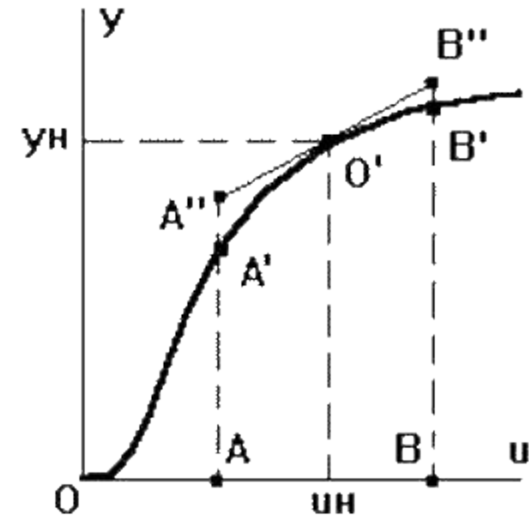


Рис. 26

## 3.2. Линеаризация уравнения динамики

Математическое обоснование линеаризации состоит в том, что если известно значение  $\mathbf{f}(\mathbf{a})$  какой-либо функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  в любой точке  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ , а также значения производных от этой функции в данной точке  $\mathbf{f}'(\mathbf{a}), \mathbf{f}''(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{a})$ , то в любой другой достаточно близкой точке  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$  значение функции можно определить, разложив ее в окрестности точки  $\mathbf{a}$  в ряд Тейлора:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})|_{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \frac{\Delta \mathbf{x}}{1!} \mathbf{f}'(\mathbf{a}) + \frac{\Delta \mathbf{x}^2}{2!} \mathbf{f}''(\mathbf{a}) + \frac{\Delta \mathbf{x}^3}{3!} \mathbf{f}'''(\mathbf{a}) + \dots$$

Аналогично можно разложить и функцию нескольких переменных. Для простоты возьмем упрощенный, но наиболее характерный вариант уравнения динамики САУ:  $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{u}, \mathbf{u}') = \mathbf{f}$ . Здесь производные по времени  $\mathbf{u}', \mathbf{y}', \mathbf{y}''$  также являются переменными. В точке, близкой к номинальному режиму:  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \Delta \mathbf{f}$  и  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \Delta \mathbf{F}$ . Разложим функцию  $\mathbf{F}$  в ряд Тейлора в окрестности точки номинального режима, отбрасывая члены ряда высоких порядков малости:

$$\mathbf{F}_n + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_n \Delta \mathbf{y} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}'} \right)_n \Delta \mathbf{y}' + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}''} \right)_n \Delta \mathbf{y}'' + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right)_n \Delta \mathbf{u} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}'} \right)_n \Delta \mathbf{u}' = \mathbf{f}_n + \Delta \mathbf{f}$$

## 3.2. Линеаризация уравнения динамики

В номинальном режиме, когда все отклонения и их производные по времени равны нулю, получаем частное решение уравнения:  $\mathbf{F}_H = \mathbf{f}_H$ .  
Учитывая это и вводя обозначения получим:

$$\mathbf{a}_0 \Delta \mathbf{y}'' + \mathbf{a}_1 \Delta \mathbf{y}' + \mathbf{a}_2 \Delta \mathbf{y} = \mathbf{b}_0 \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{b}_1 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}_0 \Delta \mathbf{f}$$

Отбрасывая все знаки  $\Delta$ , получим:

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{y}'' + \mathbf{a}_1 \mathbf{y}' + \mathbf{a}_2 \mathbf{y} = \mathbf{b}_0 \mathbf{u}' + \mathbf{b}_1 \mathbf{u} + \mathbf{c}_0 \mathbf{f}.$$

В более общем случае:

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{y}^{(n)} + \mathbf{a}_1 \mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{y}' + \mathbf{a}_n \mathbf{y} = \mathbf{b}_0 \mathbf{u}^{(m)} + \dots + \mathbf{b}_{m-1} \mathbf{u}' + \mathbf{b}_m \mathbf{u} + \mathbf{c}_0 \mathbf{f}.$$

При этом всегда нужно помнить, что в данном уравнении используются не абсолютные значения величин  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$  и их производных по времени, а отклонения этих величин от номинальных значений. Поэтому полученное уравнение будем называть *уравнением в отклонениях*.

## 3.2. Линеаризация уравнения динамики

К линеаризованной САУ можно применить *принцип суперпозиции*: реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Это позволяет звено с двумя входами  $u$  и  $f$  разложить на два звена, каждое из которых имеет один вход и один выход (рис.27).

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением поведения систем и звеньев с одним входом, уравнение динамики которых имеет вид:

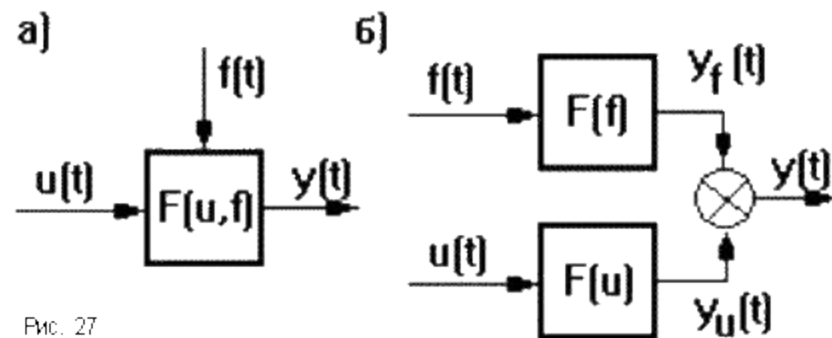


Рис. 27

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b_0 u^{(m)} + \dots + b_m - 1 u' + b_m u.$$



## 3.2. Линеаризация уравнения динамики

Это уравнение описывает САУ в динамическом режиме лишь приближенно с той точностью, которую дает линеаризация. Однако следует помнить, что линеаризация возможна только при достаточно малых отклонениях величин и при отсутствии разрывов в функции **F** в окрестностях интересующей нас точки, которые могут быть созданы различными выключателями, реле и т.п. Обычно  $n \geq m$ , так как при  $n < m$  САУ технически нереализуемы.

## 3.3. Передаточная функция

В ТАУ часто используют операторную форму записи дифференциальных уравнений. При этом вводится понятие дифференциального оператора  $\mathbf{p} = \mathbf{d}/\mathbf{dt}$  так, что,  $\mathbf{dy}/\mathbf{dt} = \mathbf{py}$ , а  $\mathbf{p}^n = \mathbf{d}^n/\mathbf{dt}^n$ . Это лишь другое обозначение операции дифференцирования. Обратная дифференцированию операция интегрирования записывается как  $\mathbf{1}/\mathbf{p}$ . В операторной форме исходное дифференциальное уравнение записывается как алгебраическое:  $(\mathbf{a}_0\mathbf{p}^m + \mathbf{a}_1\mathbf{p}^{(m-1)} + \dots + \mathbf{a}_n)\mathbf{y} = (\mathbf{b}_0\mathbf{p}^m + \mathbf{b}_1\mathbf{p}^{(m-1)} + \dots + \mathbf{b}_m)\mathbf{u}$

Не надо путать эту форму записи с операционным исчислением хотя бы потому, что здесь используются непосредственно функции времени  $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  (оригиналы), а не их изображения  $\mathbf{Y}(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ , получаемые из оригиналов по формуле преобразования Лапласа. Вместе с тем при нулевых начальных условиях с точностью до обозначений записи действительно очень похожи. Это сходство лежит в природе дифференциальных уравнений. Поэтому некоторые правила операционного исчисления применимы к операторной форме записи уравнения динамики. Так оператор  $\mathbf{p}$  можно рассматривать в качестве множителя без права перестановки, то есть  $\mathbf{py} = \mathbf{yp}$ . Его можно

## 3.3. Передаточная функция

Поэтому уравнение динамики можно записать также в виде:

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u = \frac{K(p)}{D(p)} u = W(p) \cdot u$$

Дифференциальный оператор **W(p)** называют *передаточной функцией*. Она определяет отношение выходной величины звена к входной в каждый момент времени: **W(p) = y(t)/u(t)**, поэтому ее еще называют *динамическим коэффициентом усиления*. В установившемся режиме **d/dt = 0**, то есть **p = 0**, поэтому передаточная функция превращается в коэффициент передачи звена **K = b\_0/a\_0**. Знаменатель передаточной функции **D(p) = a\_0 p^n + a\_1 p^{n-1} + a\_2 p^{n-2} + \dots + a\_n** называют *характеристическим полиномом*. Его корни, то есть значения **p**, при которых знаменатель **D(p)** обращается в ноль, а **W(p)** стремится к бесконечности, называются *полюсами передаточной функции*.

Числитель **K(p) = b\_0 p^m + b\_1 p^{m-1} + \dots + b\_m** называют *операторным коэффициентом передачи*. Его корни, при которых **K(p) = 0** и **W(p) = 0**, называются *нулями передаточной функции*.





## 3.3. Передаточная функция

Звено САУ с известной передаточной функцией называется *динамическим звеном*. Оно изображается прямоугольником, внутри которого записывается выражение передаточной функции. То есть это обычное функциональное звено, функция которого задана математической зависимостью выходной величины от входной в динамическом режиме. Для звена с двумя входами и одним выходом должны быть записаны две передаточные функции по каждому из входов. Передаточная функция является основной характеристикой звена в динамическом режиме, из которой можно получить все остальные характеристики. Она определяется только параметрами системы и не зависит от входных и выходных величин. Например, одним из динамических звеньев является интегратор. Его передаточная функция  $W_n(p) = 1/p$ . Схема САУ, составленная из динамических звеньев, называется *структурной*.

## 3.4. Элементарные динамические звенья

Динамика большинства функциональных элементов САУ независимо от исполнения может быть описана одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями не более второго порядка. Такие элементы называют *элементарными динамическими звеньями*.

Передаточная функция элементарного звена в общем виде задается отношением двух полиномов не более чем второй степени:

$$W_3(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$$

Известно также, что любой полином произвольного порядка можно разложить на простые сомножители не более, чем второго порядка. Так по теореме Виета можно записать

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - корни полинома  $D(p)$ .

Аналогично

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m = b_0 (p - p^{\sim}_1)(p - p^{\sim}_2) \dots (p - p^{\sim}_m),$$

где  $p^{\sim}_1, p^{\sim}_2, \dots, p^{\sim}_m$  - корни полинома  $K(p)$ .

## 3.4. Элементарные динамические звенья

То есть

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}{a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Корни любого полинома могут быть либо вещественными  $p_i = a_i$ , либо комплексными попарно сопряженными  $p_i = \alpha_i \pm j \omega_i$ . Любому вещественному корню при разложении полинома соответствует сомножитель  $(p - a_i)$ . Любая пара комплексно сопряженных корней соответствует полиному второй степени, так как  $(p - a_i + j\omega_i)(p - a_i - j\omega_i) = (p - d_i)^2 + \omega_i^2 = p^2 - 2pa_i + (a_i^2 + \omega_i^2)$

То есть

$$W = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 (p - \alpha_1)(p^2 - 2p\alpha_2 + (\alpha_2^2 + \omega_2^2)) \dots}{a_0 (p - \alpha_1)(p^2 - 2p\alpha_2 + (\alpha_2^2 + \omega_2^2)) \dots} = W_0 W_1 W_2 \dots$$

## 3.4. Элементарные динамические звенья

Поэтому любую сложную передаточную функцию линеаризованной САУ можно представить как произведение передаточных функций элементарных звеньев. Каждому такому звену в реальной САУ, как правило, соответствует какой-то отдельный узел. Зная свойства отдельных звеньев можно судить о динамике САУ в целом.

В теории удобно ограничиться рассмотрением *типовых звеньев*, передаточные функции которых имеют числитель или знаменатель, равный единице, то есть  $W(p) = \frac{1}{p}, W(p) = p, W(p) = Tp + 1, W(p) = k$ .

Из них могут быть образованы все остальные звенья. Звенья, у которых порядок полинома числителя больше порядка полинома знаменателя, технически нереализуемы.

# 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

Структурная схема САУ в простейшем случае строится из элементарных динамических звеньев. Но несколько элементарных звеньев могут быть заменены одним звеном со сложной передаточной функцией. Для этого существуют правила эквивалентного преобразования структурных схем. Рассмотрим возможные способы преобразований.



1. *Последовательное соединение* (рис.28) - выходная величина предшествующего звена подается на вход последующего. При этом можно записать:

$$y_1 = W_1 \cdot y_0; y_2 = W_2 \cdot y_1; \dots; y_n = W_n \cdot y_{n-1} \Rightarrow y_n = W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_n \cdot y_0 = W_{\text{экв}} \cdot y_0$$

где  $W_{\text{экв}} = \prod_{i=1}^n W_i$

То есть цепочка последовательно соединенных звеньев преобразуется в эквивалентное звено с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций отдельных звеньев.

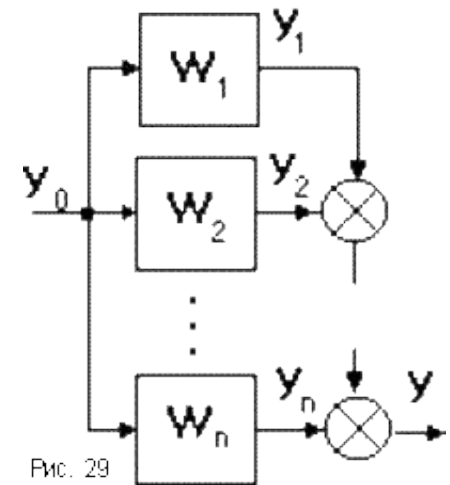
## 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

2. Параллельно - согласное соединение (рис.29) - на вход каждого звена подается один и тот же сигнал, а выходные сигналы складываются. Тогда:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n = (W_1 + W_2 + \dots + W_n)y_0 = W_{\text{экв}} \cdot y_0$$

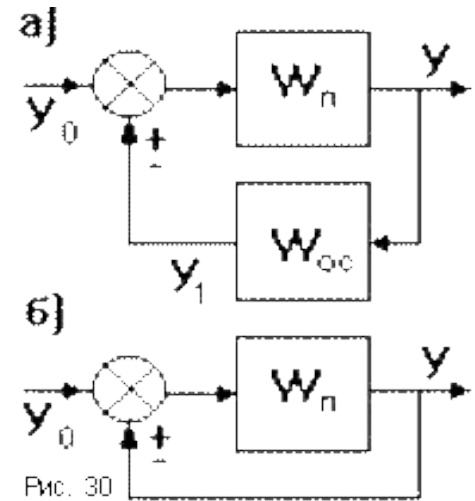
$$\text{где } W_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n W_i$$

То есть цепочка звеньев, соединенных параллельно - согласно, преобразуется в звено с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций отдельных звеньев.



# 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

3. *Параллельно - встречное соединение* (рис. 30а) - звено охвачено положительной или отрицательной обратной связью. Участок цепи, по которому сигнал идет в противоположном направлении по отношению к системе в целом (то есть с выхода на вход) называется *цепью обратной связи* с передаточной функцией  $W_{oc}$ . При этом для отрицательной ОС:  $y_1 = W_{oc} y$ ;  $u = y_0 - y_1$ , следовательно



$$y = W_n y_0 - W_n y_1 = W_n y_0 - W_n W_{oc} y \Rightarrow y(1 + W_n W_{oc}) = W_n y_0 \Rightarrow y = W_{экр} y_0$$

где  $W_{экр} = \frac{W_n}{1 + W_n W_{oc}}$       Аналогичн  $W_{экр} = \frac{W_n}{1 - W_n W_{oc}}$  - для положительной ОС.

Если  $W_{oc} = 1$ , то обратная связь называется *единичной* (рис.30б), тогда

$$W_{экр} = W_n / (1 \pm W_n).$$

# 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

Замкнутую систему называют *одноконтурной*, если при ее размыкании в какой либо точке получают цепочку из последовательно соединенных элементов (рис.31а). Участок цепи, состоящий из последовательно соединенных звеньев, соединяющий точку приложения входного сигнала с точкой съема выходного сигнала называется *прямой* цепью (рис.31б, передаточная функция прямой цепи  $W_n = W_0 W_1 W_2$ ). Цепь из последовательно

соединенных звеньев, входящих в исходный контур называют *разомкнутой цепью* (рис.31в). Исходя из приведенных выше способов эквивалентного преобразования структурных схем, одноконтурная система может быть представлена одним звеном с передаточной функцией:  $W_{\text{экв}} = W_n / (1 \pm W_p)$  - передаточная функция одноконтурной замкнутой системы с отрицательной ОС равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс передаточная функция разомкнутой цепи.

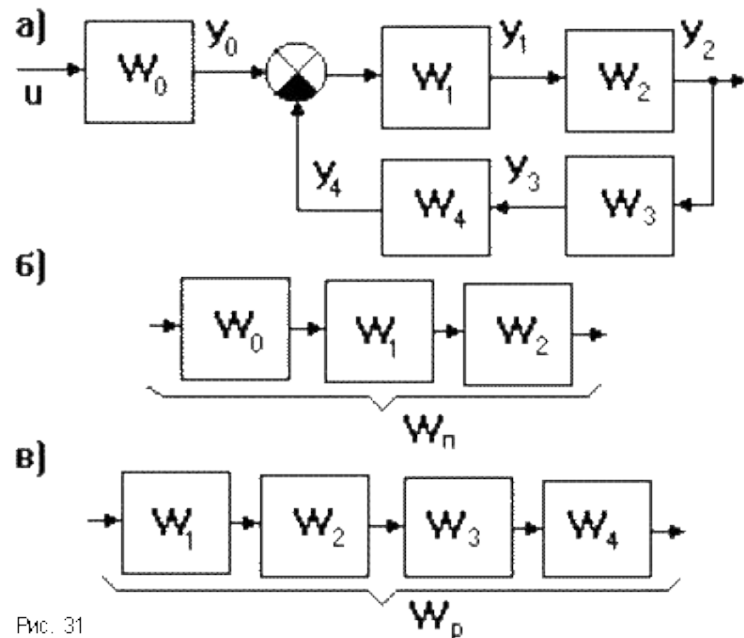


Рис. 31



## 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

Для положительной ОС в знаменателе знак минус. Если сменить точку снятия выходного сигнала, то меняется вид прямой цепи. Так, если считать выходным сигнал  $y_1$  на выходе звена  $W_1$ , то  $W_p = W_0 W_1$ . Выражение для передаточной функции разомкнутой цепи не зависит от точки снятия выходного сигнала.

Замкнутые системы бывают *одноконтурными* и *многоконтурной* (рис.32). Чтобы найти эквивалентную передаточную функцию для данной схемы нужно сначала осуществить преобразование отдельных участков

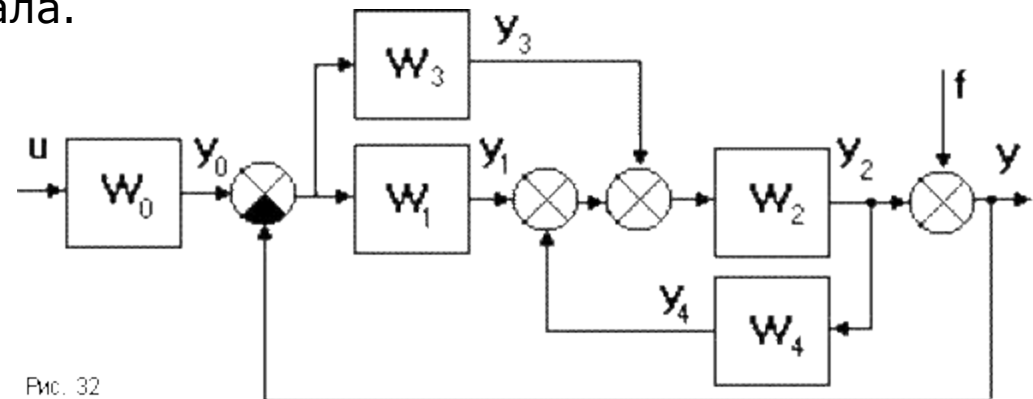


Рис. 32

# 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

Если многоконтурная система имеет *перекрещивающиеся связи* (рис.33), то для вычисления эквивалентной передаточной функции

нужны дополнительные правила: при переносе сумматора через звено по ходу сигнала необходимо добавить звено с передаточной функцией того звена, через которое переносится сумматор. Если сумматор переносится против хода сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, через которое переносим сумматор (рис.34).

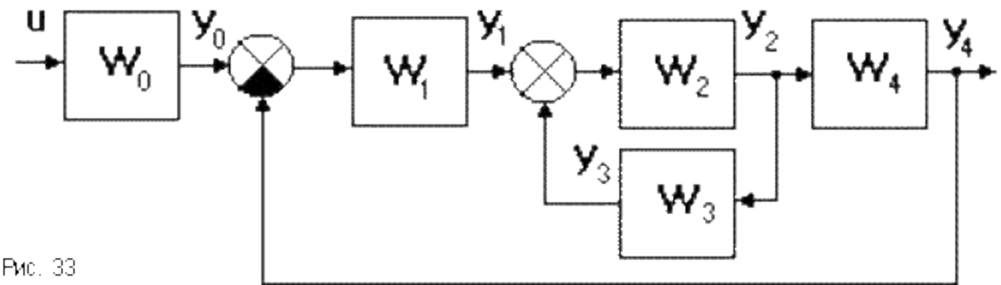


Рис. 33

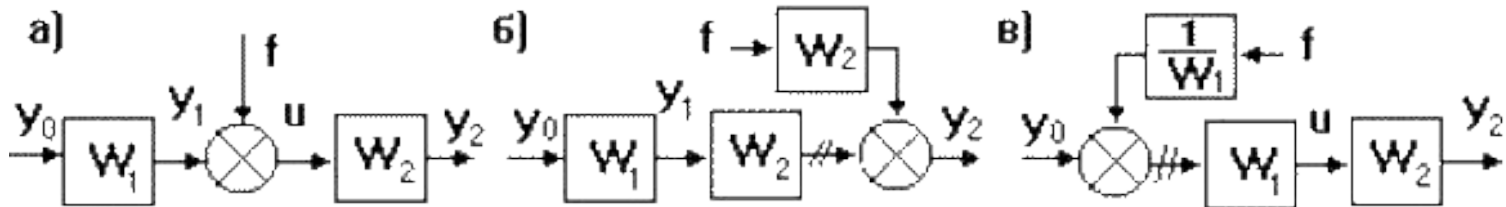


Рис. 34



## 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

Так с выхода системы на рис.34а снимается сигнал

$$y_2 = (f + y_0 W_1) W_2$$

Такой же сигнал должен сниматься с выходов систем на рис.34б:

$$y_2 = f W_2 + y_0 W_1 W_2 = (f + y_0 W_1) W_2$$

и на рис.34в:

$$y_2 \left( f \frac{1}{W_1} + y_0 \right) W_1 W_2 = (f + y_0 W_1) W_2$$

При подобных преобразованиях могут возникать неэквивалентные участки линии связи (на рисунках они заштрихованы).

# 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

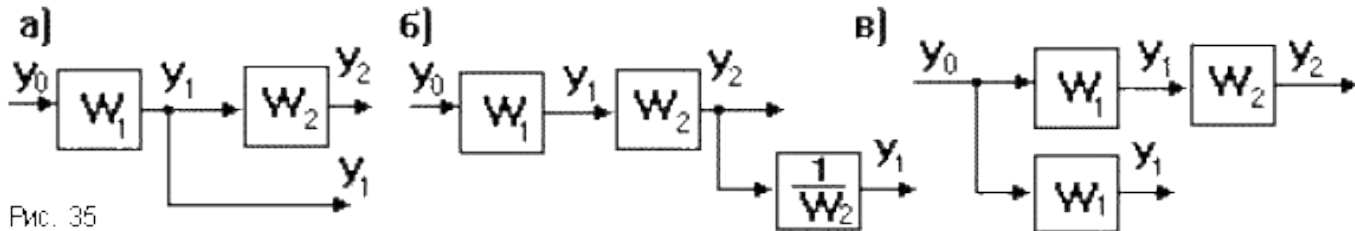


Рис. 35

5. При переносе узла через звено по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, через которое переносим узел. Если узел переносится против хода сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией звена, через которое переносится узел (рис.35). Так с выхода системы на рис.35а снимается сигнал  $y_2 = y_0 W_1 W_2$ . Такой же сигнал снимается с выходов рис.35б:

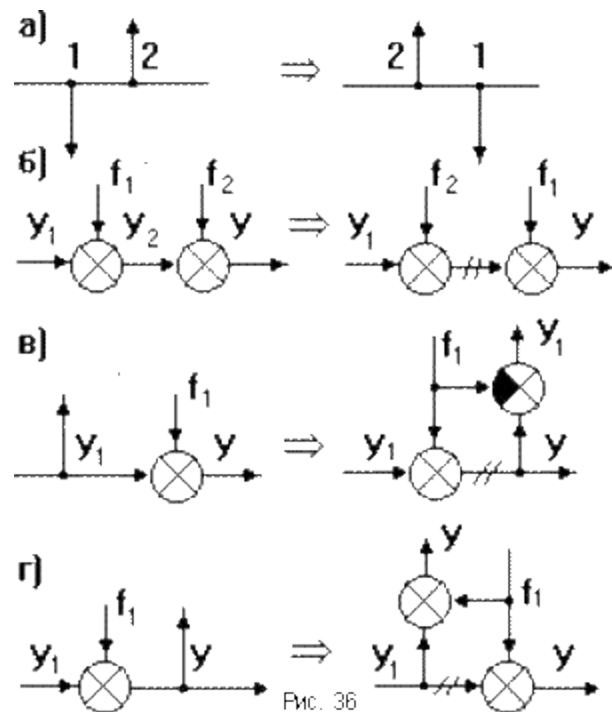
$$y_1 = \frac{y_0 W_1 W_2}{W_2} = y_0 W_1$$

и рис.35в:  $y_1 = y_0 W_1$

# 4.1. Эквивалентные преобразования структурных схем

б. Возможны взаимные перестановки узлов и сумматоров: узлы можно менять местами (рис. 36а); сумматоры тоже можно менять местами (рис.36б); при переносе узла через сумматор необходимо добавить сравнивающий элемент (рис.36в:  $y = y_1 + f_1 \Rightarrow y_1 = y - f_1$ ) или сумматор (рис.36г:  $y = y_1 + f_1$ ).

Во всех случаях переноса элементов структурной схемы возникают *неэквивалентные участки* линии связи, поэтому надо быть осторожным в местах съема выходного сигнала.



## 4.2. САР напряжения генератора постоянного тока

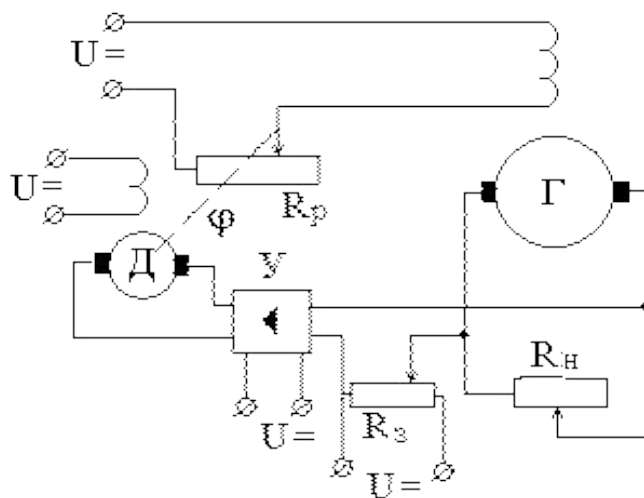


Рис. 37

Для примера рассмотрим схему САР напряжения генератора постоянного тока (рис.37).

Выведем дифференциальное уравнение исполнительного двигателя постоянного тока. Его схема замещения изображена на рис. 38.

Для якорной цепи справедливо уравнение:

$$U = r_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a$$

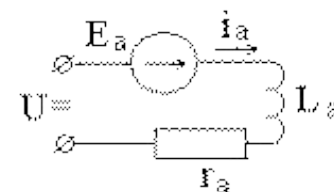


Рис.38

## 4.2. САР напряжения генератора постоянного тока

Если принять,  $\epsilon_a = C \frac{d\varphi}{dt}$ , где  $\varphi$  – угол поворота вала  
 что

$$\frac{L_a}{r_a} \frac{di_a}{dt} + i_a + \frac{C}{r_a} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r_a} U$$

то есть

$$T_a p i_a + i_a + K_1 p \varphi = (T_a p + 1) i_a + K_1 p \varphi = K_2 U$$

где  $T_a = \frac{L_a}{r_a}$  – постоянная времени якорной цепи;

$K_1 = \frac{C}{r_a}$   $K_2 = \frac{1}{r_a}$  – коэффициенты пропорциональности.

Если учесть, что  $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_c$ ,  $M = C i_a$ , где  $J$  – момент инерции якоря,  $M$  – электромагнитный момент,  $M_c$  – момент сторонних сил, то получим

$$i_a = \frac{J}{C} p^2 \varphi + \frac{1}{C} M_c$$

## 4.2. САР напряжения генератора постоянного тока

Следовательно  
но

$$(T_a p + 1) \left( \frac{J}{C} p^2 \Phi + \frac{1}{C} M_c \right) + K_1 p \Phi = K_2 U \quad = >$$

$$\frac{J \cdot T_a}{C} p^3 \Phi + \frac{J}{C} p^2 \Phi + \frac{T_a}{C} p M_c + \frac{1}{C} M_c + K_1 p \Phi = K_2 U \quad = >$$

$$\left( \frac{J \cdot T_a}{C} p^2 + \frac{J}{C} p + K_1 \right) p \Phi = K_2 U - \frac{1}{C} (T_a p + 1) M_c \quad = >$$

$$(T_a T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1) p \Phi = K_3 U - K_4 (T_a p + 1) M_c \quad = >$$

$$\Phi = \frac{K_3}{(T_a T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1) p} U - \frac{K_4 (T_a p + 1)}{(T_a T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1) p} M_c \quad = >$$

$$\Phi = W_U U - W_M M_c$$

Здесь  $T_{эм} = \frac{J \cdot r_a}{C^2}$  – электромеханическая постоянная времени;

$K_1 = \frac{C}{r_a}$   $K_2 = \frac{1}{r_a}$   $K_3 = \frac{1}{C}$   $K_4 = \frac{r_a}{C^2}$  – коэффициенты пропорциональности;



## 4.2. САР напряжения генератора постоянного тока

$$W_U = \frac{K_3}{(T_a T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)p} \quad W_M = \frac{K_4 (T_a p + 1)}{(T_a T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)p}$$

– передаточные функции по напряжению и моменту сторонних сил.

Структурная схема двигателя постоянного тока показана на рис.39.

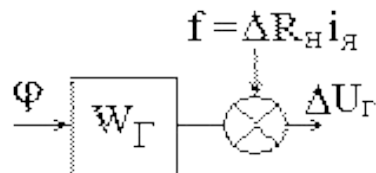


Рис.40

Аналогичным образом выводится передаточная функция генератора постоянного тока, которая с учетом пренебрежения индуктивностью обмотки якоря имеет вид, показанный

$$W_Г = \frac{K_Г}{T_Г p + 1}$$

Усилитель можно представить пропорциональным звеном с коэффициентом усиления  $K_y$ . В окончательном виде структурная схема САР напряжения генератора постоянного тока показана на рис.41.

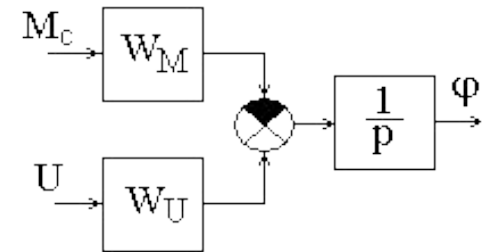


Рис.39

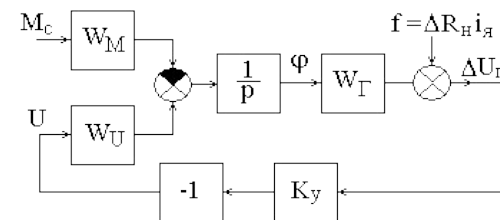


Рис.41



## 5.1. Понятие временных характеристик

Для оценки динамических свойств системы и отдельных звеньев принято исследовать их реакцию на *типовые входные воздействия*, которые наиболее полно отражают особенности реальных возмущений. Во - первых, это позволяет сравнивать отдельные элементы между собой с точки зрения их динамических свойств. Во - вторых, зная реакцию системы на типовые воздействия, можно судить о том, как она будет вести себя при сложных изменениях входной величины. Наиболее распространенными типовыми воздействиями являются: *ступенчатое, импульсное и гармоническое* воздействия. Любой сигнал  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ , имеющий сложную форму, можно разложить на сумму типовых воздействий  $\mathbf{u}_i(\mathbf{t})$  и исследовать реакцию системы на каждую из составляющих, а затем, пользуясь принципом суперпозиции, получить результирующее изменение выходной величины  $\mathbf{y}(\mathbf{t})$  суммируя полученные таким образом составляющие выходного сигнала  $\mathbf{y}_i(\mathbf{t})$ .

## 5.1. Понятие временных характеристик

Особенно важное значение в ТАУ придают ступенчатому воздействию

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Все остальные воздействия могут быть сведены к нему. Так, например, реальный импульсный сигнал может быть представлен двумя ступенчатыми сигналами одинаковой величины, но противоположными по знаку, поданными один за другим через интервал времени. Зависимость изменения выходной величины системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия при нулевых начальных условиях называется *переходной характеристикой* и обозначается  **$h(t)$** .

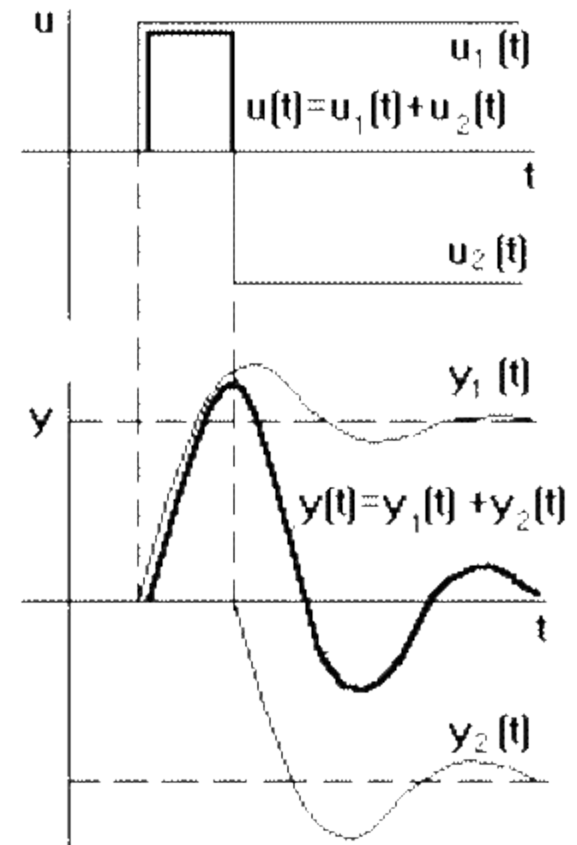


Рис. 42

## 5.1. Понятие временных характеристик

Не менее важное значение в ТАУ уделяется *импульсной переходной характеристике*, которая описывает реакцию системы на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях, обозначают **(t)**. Единичный импульс физически представляет из себя очень узкий импульс, ширина которого стремится к нулю, а высота - к бесконечности, ограничивающий единичную площадь. Математически он описывается дельта - функцией **d(t) = 1'(t)**.

Переходная и импульсная переходная характеристики называются *временными характеристиками*. Каждая из них является исчерпывающей характеристиками системы и любого ее звена при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при известной передаточной функции **w(p) = K(p)/D(p)**, выражение для производной входного воздействия.

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{K(p_k) \cdot e^{p_k t}}{p_k \cdot D'(p_k)}$$

функции можно найти из формулы Хевисайда:

где **p<sub>k</sub>** - корни характеристического уравнения **D(p) = 0**. Взяв производную от переходной функции можно получить выражение для импульсной переходной функции **(t) = h'(t)**.



## 5.2. Переходные характеристики элементарных звеньев

Здесь мы рассмотрим только самые основные звенья.

- 5.2.1. Безынерционное (пропорциональное, усилительное) звено
- 5.2.2. Интегрирующее (астатическое) звено
- 5.2.3. Инерционное звено первого порядка (апериодическое)
- 5.2.4. Инерционные звенья второго порядка
- 5.2.5. Дифференцирующее звено

# 5.2.1. Безынерционное (пропорциональное, усиленное) звено

Это звено, для которого в любой момент времени выходная величина пропорциональна входной.

Его уравнение:  $y(t) = k \cdot u(t)$

Передаточная функция:

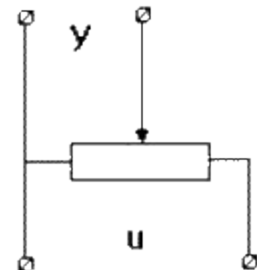
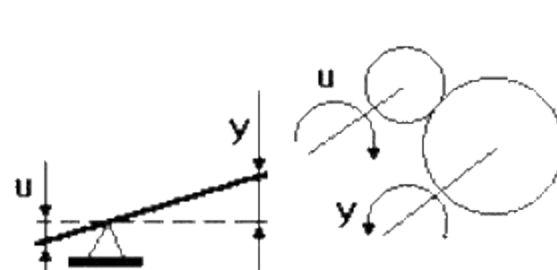
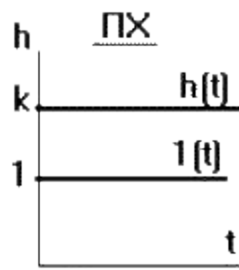
Переходная характеристика:  $W(p) = k$

В ответ на единичное ступенчатое воздействие сигнал на выходе мгновенно достигает величины в  $k$  раз большей, чем на входе и сразу же стабилизируется.

При  $k=1$  звено никак себя не проявляет, а при  $k=-1$  инвертирует сигнал.

В ответ на единичное ступенчатое воздействие сигнал на выходе мгновенно достигает величины в  $k$  раз большей, чем на входе и сразу же стабилизируется.

$$h(t) = k \cdot 1(t)$$



В определенной степени это звено обладает инерционностью, но с определенной точностью некоторые реальные звенья могут рассматриваться как безынерционные, например, жесткий механический рычаг, редуктор, потенциометр, электронный усилитель и т.п.

## 5.2.2. Интегрирующее (астатическое) звено

Его уравнение:  $y(t) = k \int_0^t u(t) dt$  или  $\frac{dy}{dt} = ku$

Передаточная функция:  $W(p) = \frac{k}{p}$

Переходная характеристика:  $h(t) = k \int_0^t 1(t) dt = k \cdot t$  (рис.44)

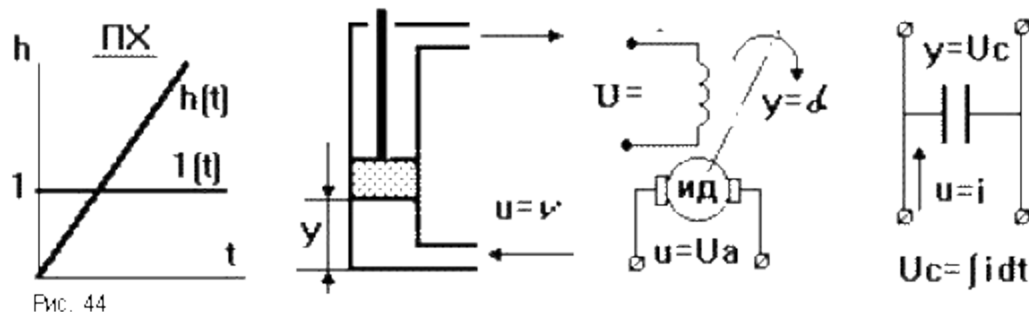


Рис. 44

При  $k = 1$  звено представляет собой "чистый" интегратор  $W(p) = 1/p$ . Интегрирующее звено неограниченно "накапливает" входное воздействие. Примеры интегрирующих звеньев: электродвигатель, поршневой гидравлический двигатель, емкость и т.п. Введение его в САУ превращает систему в астатическую, то есть ликвидирует

## 5.2.3. Инерционное звено первого порядка (апериодическое)

Уравнение динамики  $T \frac{dy}{dt} + y = ku$  ,  $Tpy + y = ku$   
или

Передаточная функция:  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$

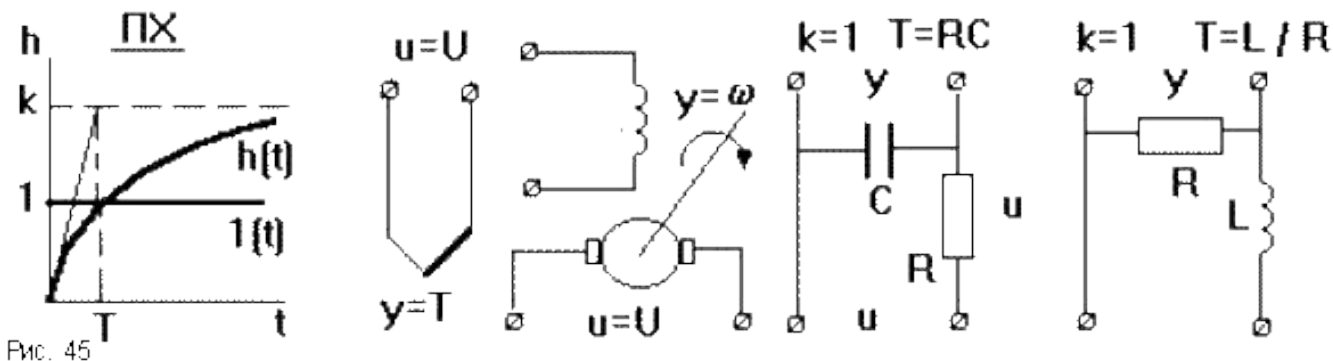
Переходная характеристика может быть получена с помощью формулы Хевисайда:

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \frac{K(p_1) \cdot e^{p_1 t}}{p_1 \cdot D'(p_1)} = \frac{k}{T \cdot 0 + 1} + \frac{k \cdot e^{-t/T}}{-(1/T) \cdot T} = k(1 - e^{-t/T})$$

где  $p_1 = -1/T$  - корень уравнения  $D(p) = Tp + 1 = 0$ ;  $D'(p_1) = T$ .



## 5.2.3. Инерционное звено первого порядка (апериодическое)



Переходная характеристика имеет вид экспоненты (рис.45), по которой можно определить передаточный коэффициент  $k$ , равный установившемуся значению  $h(t)$ , и постоянную времени  $T$  по времени  $t$ , соответствующему точке пересечения касательной к кривой в начале координат с ее асимптотой. При достаточно больших  $T$  звено на начальном участке может рассматриваться как интегрирующее, при малых  $T$  звено приближенно можно рассматривать как безынерционное. Примеры апериодического звена: термопара, электродвигатель, четырехполюсник из сопротивления и емкости или сопротивления и индуктивности.

## 5.2.4. Инерционные звенья второго порядка

Его уравнение  $T_1^2 p^2 y + T_2 p y + y = k u$

Передаточная функция  $W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$

Решение уравнения зависит от соотношения постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ ,

которое определяет коэффициент затухания  $r = \frac{T_2}{2T_1}$

Можно записать  $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2pT r + 1}$  где  $T = T_1$ .

Если  $r \geq 1$ , то знаменатель  $W(p)$  имеет два вещественных корня  $p_1$  и  $p_2$  и

раскладывается на два сомножителя:  $T^2 p^2 + 2rT p + 1 = T^2 \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2)$

## 5.2.4. Инерционные звенья второго порядка

Такое звено можно разложить на два апериодических звена первого порядка, поэтому оно не является элементарным.

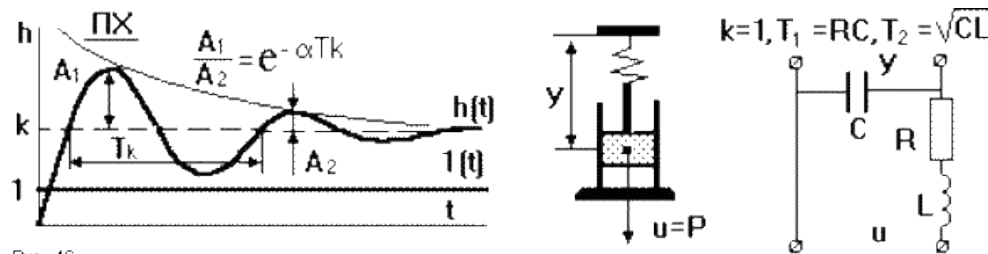


Рис. 46

При  $r < 1$  корни полинома знаменателя  $W(p)$  комплексно сопряженные:  $p_{1,2} = \alpha \pm \omega j$ . Переходная характеристика представляет собой выражение, характеризующее затухающий колебательный процесс с затуханием  $\alpha$  и частотой  $\omega$  (рис.46). Такое звено называется *колебательным*. При  $r = 0$  колебания носят незатухающий характер. Такое звено является частным случаем колебательного звена и называется *консервативным*. Примерами колебательного звена могут служить пружина, имеющая успокоительное устройство, электрический колебательный контур с активным сопротивлением и т.п. Зная характеристики реального устройства можно определить его параметры как колебательного звена. Передаточный коэффициент  $k$  равен установившемуся значению переходной функции.

## 5.2.5. Дифференцирующее звено

Различают идеальное и реальное дифференцирующие звенья. Уравнение динамики

идеального звена:  $y(t) = k \frac{du}{dt}$ , или  $\mathbf{y} = \mathbf{kpu}$ . Здесь выходная величина

пропорциональна скорости изменения входной величины. Передаточная функция:  $\mathbf{W(p)} = \mathbf{kp}$ . При  $\mathbf{k} = \mathbf{1}$  звено осуществляет чистое дифференцирование  $\mathbf{W(p)} = \mathbf{p}$ . Переходная характеристика:  $\mathbf{h(t)} = \mathbf{k1'(t) = d(t)}$ .

Идеальное дифференцирующее звено реализовать невозможно, так как величина всплеска выходной величины при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия всегда ограничена. На практике используют

реальные дифференцирующие звенья, осуществляющие приближенное дифференцирование входного сигнала.

Передаточная функция  $\mathbf{W(p)} = \frac{kTp}{Tp + 1}$

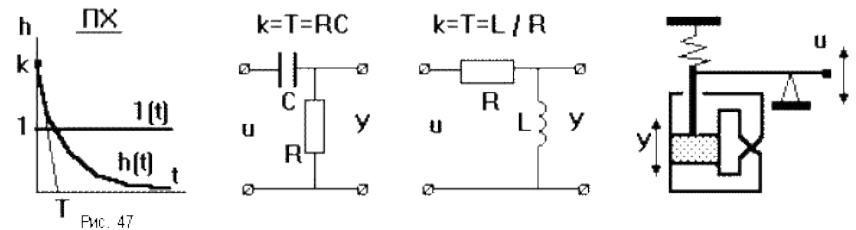
## 5.2.5. Дифференцирующее звено

При малых  $T$  звено можно рассматривать как идеальное дифференцирующее. Переходную характеристики можно вывести с помощью формулы Хевисайда:

$$h(t) = \frac{k(0)}{D(0)} + \frac{k(p_1) \cdot e^{p_1 t}}{p_1 \cdot D'(p_1)} = 0 + \frac{-(k/T) \cdot e^{-t/T}}{-(1/T) \cdot T} = k e^{-t/T}$$

здесь  $p_1 = -1/T$  - корень характеристического уравнения  $D(p) = Tp + 1 = 0$ ; кроме того,  $D'(p_1) = T$ .

При подаче на вход единичного ступенчатого воздействия выходная величина оказывается ограничена по величине и растянута во времени (рис.47).



По переходной характеристике, имеющей вид экспоненты, можно определить передаточный коэффициент  $k$  и постоянную времени  $T$ . Примерами таких звеньев могут являться четырехполюсник из сопротивления и емкости или сопротивления и индуктивности, демпфер и т.п. Дифференцирующие звенья являются главным средством, применяемым для улучшения динамических свойств САУ.

## 6.1. Понятие частотных характеристик

Если подать на вход системы с передаточной функцией  $W(p)$  гармонический сигнал

$$u(t) = U_m e^{j\omega t} = U_m (\cos \omega t + j \sin \omega t),$$

то после завершения переходного процесса на выходе установится гармонические колебания

$$y(t) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} = Y_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

с той же частотой  $\omega$ , но иными амплитудой и фазой, зависящими от частоты возмущающего воздействия. По ним можно судить о динамических свойствах системы. Зависимости, связывающие амплитуду и фазу выходного сигнала с частотой входного сигнала, называются *частотными характеристиками (ЧХ)*. Анализ ЧХ системы с целью исследования ее динамических свойств называется *частотным анализом*. Подставим выражения для  $u(t)$  и  $y(t)$  в уравнение динамики

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) u.$$

## 6.1. Понятие частотных характеристик

Учтем, что

$$p u = p U_m e^{j\omega t} = U_m j\omega e^{j\omega t} = j\omega u,$$

а значит

$$p^n u = p^n U_m e^{j\omega t} = U_m (j\omega)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n u.$$

Аналогичные соотношения можно записать и для левой части уравнения. Получим:

$$p^n u = p^n U_m e^{j\omega t} = U_m (j\omega)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n u.$$

По аналогии с передаточной функцией можно записать:

$$y = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} u = W(j\omega) \cdot u$$

$W(j\omega)$ , равная отношению выходного сигнала к входному при изменении входного сигнала по гармоническому закону, называется *частотной передаточной функцией*. Легко заметить, что она может быть получена путем простой замены  $p$  на  $j\omega$  в выражении  $W(p)$ .

# 6.1. Понятие частотных характеристик

$W(j\omega)$  есть комплексная функция, поэтому:

$$A(\omega) = \frac{U_m}{Y_m} = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} \quad W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega)$  - вещественная ЧХ (ВЧХ);  $Q(\omega)$  - мнимая ЧХ (МЧХ);  $A(\omega)$  - амплитудная ЧХ (АЧХ);  $\varphi(\omega)$  - фазовая ЧХ (ФЧХ). АЧХ дает отношение амплитуд выходного и входного сигналов, ФЧХ - сдвиг по фазе выходной величины относительно входной:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Если  $W(j\omega)$  изобразить вектором на комплексной плоскости, то при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  его конец будет вычерчивать кривую, называемую годографом вектора  $W(j\omega)$ , или амплитудно - фазовую частотную характеристику (АФЧХ) (рис.48).

Ветвь АФЧХ при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до 0 можно получить зеркальным отображением данной кривой относительно вещественной оси.

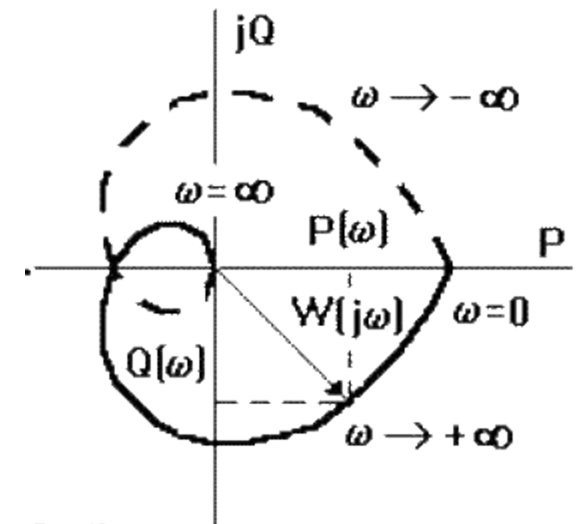


Рис. 48



# 6.1. Понятие частотных характеристик

В ТАУ широко используются *логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)* (рис.49): *логарифмическая амплитудная ЧХ (ЛАЧХ)*  $L(\omega)$  и *логарифмическая фазовая ЧХ (ЛФЧХ)*  $\varphi(\omega)$ . Они получаются путем логарифмирования передаточной функции:

$$\ln[W(j\omega)] = \ln[A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}] = \ln[A(\omega)] + \ln[e^{j\varphi(\omega)}] = \ln[A(\omega)] + j\varphi(\omega).$$

ЛАЧХ получают из первого слагаемого, которое из соображений масштабирования умножается на 20, и используют не натуральный логарифм, а десятичный, то есть  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ . Величина  $L(\omega)$  откладывается по оси ординат в *децибелах*. Изменение уровня сигнала на 10 дб соответствует изменению его мощности в 10 раз.

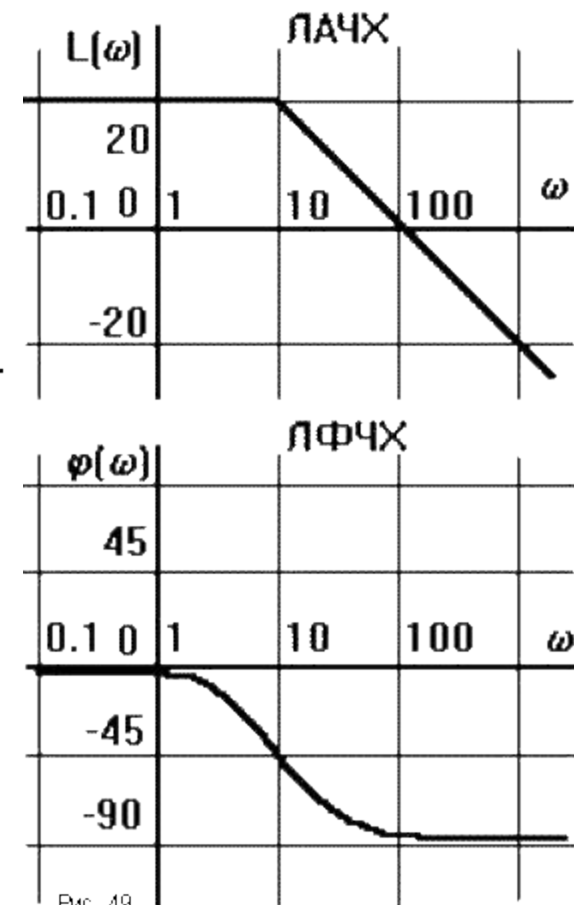


Рис. 49

## 6.1. Понятие частотных характеристик

Так как мощность гармонического сигнала  $P$  пропорциональна квадрату его амплитуды  $A$ , то изменению сигнала в 10 раз соответствует изменение его уровня на 20дб, так как

$$\lg(P_2/P_1) = \lg(A_2^2/A_1^2) = 20\lg(A_2/A_1).$$

По оси абсцисс откладывается частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе.

То есть единичным промежуткам по оси абсцисс соответствует изменение  $\omega$  в 10 раз. Такой интервал называется *декадой*. Так как  $\lg(0) = -\infty$ , то

для ФЧХ, получаемая из второго слагаемого, отличается от ФЧХ только

масштабом по оси  $\omega$ . Величина  $\phi(\omega)$  откладывается по оси ординат в градусах или радианах. Для элементарных звеньев она не выходит за пределы:  $-\pi < \phi(\omega) < +\pi$ .

ЧХ являются исчерпывающими характеристиками системы. Зная ЧХ системы можно восстановить ее передаточную функцию и определить параметры.



## 6.2. Частотные характеристики ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

- 6.2.1. Безынерционное звено
- 6.2.2. Интегрирующее звено
- 6.2.3. Аperiodическое звено
- 6.2.4. Инерционные звенья второго порядка
- 6.2.5. Правила построения ЧХ элементарных звеньев

## 6.2.1. Безынерционное звено

Передаточная  
функция:  $W(s) = k$ .

$$\text{АФЧХ: } W(j\omega) = k.$$

$$\text{ВЧХ: } P(\omega) = k.$$

$$\text{МЧХ: } Q(\omega) = 0.$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = k.$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = 0.$$

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega) = 20 \lg k.$$

Некоторые ЧХ показаны на рис.50. Звено пропускает все частоты одинаково с увеличением амплитуды в  $k$  раз и без сдвига по фазе.

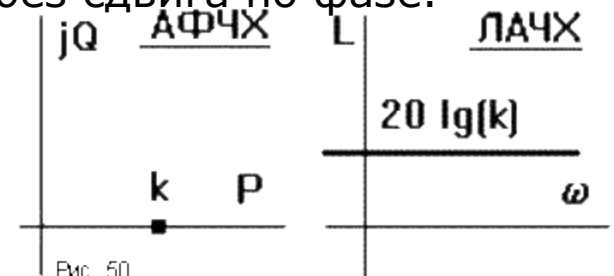


Рис. 50

## 6.2.2. Интегрирующее звено

Передаточная функция:

$$W(p) = k/p.$$

Рассмотрим частный случай, когда  $k = 1$ , то есть  $W(p) =$

$$1/p. \text{ АФЧХ: } W(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}$$

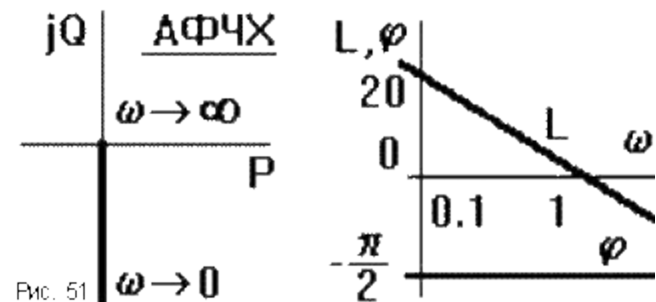
$$\text{ВЧХ: } P(\omega) = 0.$$

$$\text{МЧХ: } Q(\omega) = -1/\omega$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = 1/\omega$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\pi/2.$$

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega) = 20\lg(1/\omega) = -20\lg(\omega).$$



ЧХ показаны на рис.51. Все частоты звено пропускает с запаздыванием по фазе на  $90^\circ$ . Амплитуда выходного сигнала увеличивается при уменьшении частоты, и уменьшается до нуля при росте частоты (звено "заваливает" высокие частоты). ЛАЧХ представляет собой прямую, проходящую через точку  $L(\omega) = 0$  при  $\omega = 1$ . При увеличении частоты на декаду ордината уменьшается на  $20\lg 10 = 20$ дб, то есть наклон ЛАЧХ равен  $-20$  дб/дек (децибел на декаду).

## 6.2.3. Аперриодическое звено

При  $k = 1$  получаем следующие выражения ЧХ:

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T)^2}$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\text{arctg}(\omega T)$$

$$A(\omega) = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = -10\lg(1 + (\omega T)^2)$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  - амплитуды числителя и знаменателя ЛФЧХ;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - аргументы числителя и знаменателя. ЛФЧХ:

## 6.2.3. Аperiodическое звено

ЧХ показаны на рис.52. АФЧХ есть полуокружность радиусом  $1/2$  с центром в точке  $P = 1/2$ . При построении асимптотической ЛАЧХ считают, что при  $\omega < \omega_1 = 1/T$  можно пренебречь  $(\omega T)^2$  в выражении для  $L(\omega)$ , то есть  $L(\omega) \approx -10 \lg 1 = 0$ . При  $\omega > \omega_1$  пренебрегают единицей в выражении в скобках, то есть  $L(\omega) \approx -20 \lg(\omega T)$ .

ЛАЧХ проходит вдоль оси абсцисс до сопрягающей частоты, затем - под наклоном - 20 дб/дек. Частота  $\omega_1$  называется сопрягающей частотой. Максимальное отличие реальных ЛАЧХ от асимптотических не превышает 3 дб при  $\omega = \omega_1$ . АФЧХ асимптотически стремится к нулю при уменьшении  $\omega$  до нуля (чем меньше частота, тем меньше искажения сигнала по фазе) и к  $-\pi/2$  при возрастании до бесконечности. Пересечение в точке  $\omega = \omega_1$  при  $\varphi(\omega) = -\pi/4$ . ЛФЧХ всех аperiodических звеньев имеют одинаковую форму и могут быть построены по типовой кривой с параллельным сдвигом вдоль оси частот.

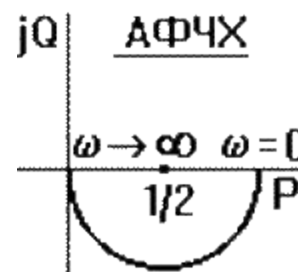
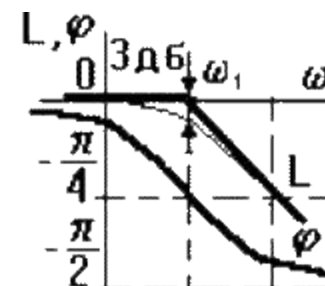


Рис. 52



## 6.2.4. Инерционные звенья второго порядка

При  $k = 1$  передаточная функция звена:  $W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2rTp + 1}$

В виду сложности вывода выражений для частотных характеристик рассмотрим их без доказательства, они показаны на рис.53.

Асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена до сопрягающей частоты  $\omega_1 = 1/T_1$  совпадает с асимптотической ЛАЧХ апериодического звена. Дальнейшее увеличение частоты "заваливает" сильнее, чем апериодическое звено.

Реальная ЛАЧХ при  $\omega \approx \omega_1$  значительно отличается от асимптотической. Это отличие тем существенней, чем меньше коэффициент демпфирования  $r$ .

То же относится к фазе, которая приводится в справочниках. В редких случаях при  $r = 0$  получаем консервативное звено, у которого при амплитуда выходных колебаний стремится к бесконечности (рис.54).

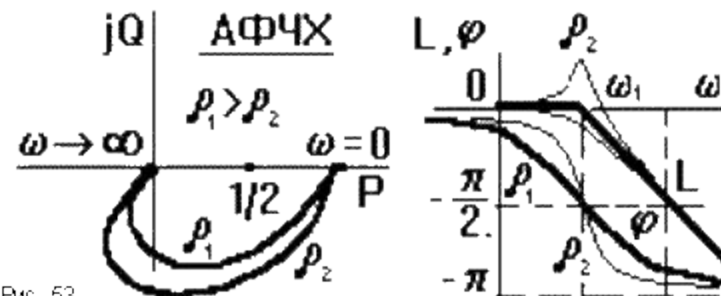


Рис. 53

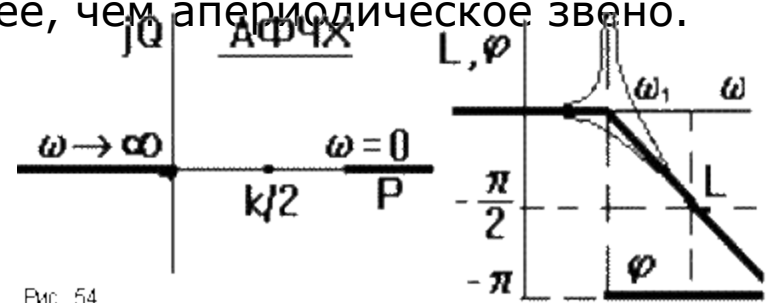


Рис. 54



## 6.2.5. Правила построения ЧХ элементарных звеньев

При построении ЧХ некоторых звеньев можно использовать "правило зеркала": при  $k = 1$  ЛАЧХ и ЛФЧХ звеньев с обратными передаточными функциями зеркальны относительно горизонтальной оси. На рис. 55 изображены ЧХ идеального дифференцирующего и идеального форсирующего звеньев.

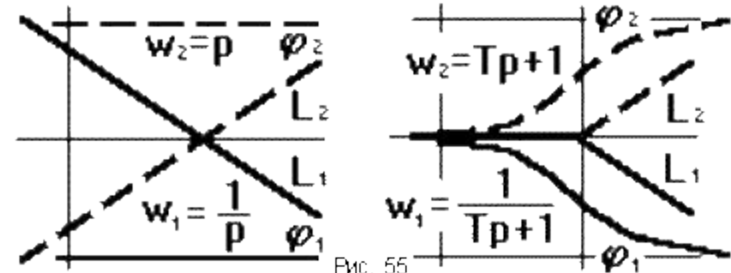


рис. 55

Если  $k \neq 1$ , то передаточную функцию звена можно рассматривать как произведение  $W = k \cdot W_1$ , где  $W_1$  - передаточная функция с  $k = 1$ . При этом амплитуда вектора АФЧХ  $W(j\omega)$  при всех значениях  $\omega$  должна быть увеличена в  $k$  раз, то есть  $A(\omega) = kA_1(\omega)$ . Поэтому, например, центр полуокружности АФЧХ апериодического звена будет находиться не в точке  $\omega = 1/2$ , а в точке  $k/2$ . ЛАЧХ также изменится:  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg kA_1(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg A_1(\omega)$ . Поэтому при  $k \neq 1$  ЛАЧХ звена нужно поднять по оси ординат не меняя ее формы на  $20 \lg k$ . На ЛФЧХ изменение  $k$  никак не отразится.

## 6.2.5. Правила построения ЧХ элементарных звеньев

Для примера на рис.56 приведены частотные характеристики апериодического звена при  $k = 10$  и  $T = 1$  с. При этом ЛАЧХ апериодического звена с  $k = 1$  поднята вверх на  $20\lg 10 = 20$ .

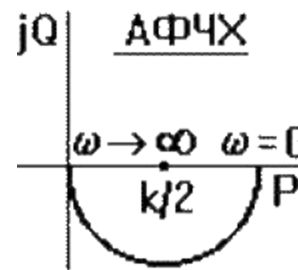


Рис. 56

