

Тема 3

**Теорема Остроградского –
Гаусса дискретного и
непрерывного
распределения зарядов и ее
применение**

Оглавление

3.1. Основные определения.

3.2. Теорема Остроградского – Гаусса для дискретного и непрерывного распределения зарядов.

3.3. Применение теоремы Остроградского – Гаусса для случаев:

3.3.1. Заряженная плоскость.

3.3.2. Две разноименно заряженные плоскости.

3.3.3. Заряженная нить.

3.3.4. Заряженная сфера.

3.3.5. Заряженный шар.

3.4. Аналогия между электростатическим и гравитационным полями.

3.1. Основные определения

1. Линейная плотность заряда τ — это физическая величина, численно равная заряду, приходящемуся на единицу длины.



Рис.3.1. Линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad q = \int_{l_1}^{l_2} \tau \, dl, \quad (3.1)$$

если $\tau = const$, то $\tau = \frac{q}{l}; \quad q = \tau l \quad (3.2)$

2. Поверхностная плотность заряда σ – это физическая величина, численно равная заряду, приходящемуся на единицу площади.

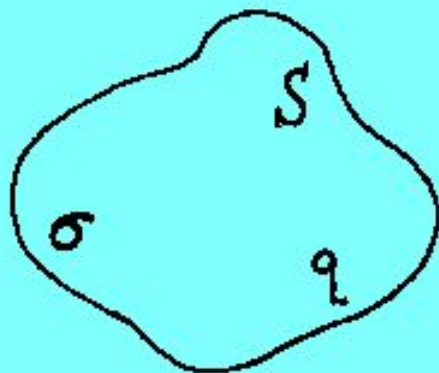


Рис.3.2. Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS}; \Rightarrow q = \int_{S_1}^{S_2} \sigma dS, \quad (3.3)$$

если $\sigma = const$ то $\sigma = \frac{q}{S}; q = \sigma S \quad (3.4)$

3. Объемная плотность заряда ρ – это физическая величина, численно равная заряду, заключенному в единице объема



Рис.3.3. Объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV}; \Rightarrow q = \int_{V_1}^{V_2} \rho dV, \quad (3.5)$$

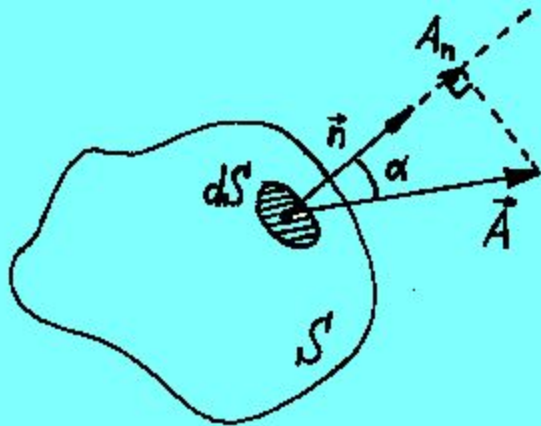
если | $\rho = \text{const}$ то $\rho = \frac{q}{V}; \Rightarrow q = \rho V$ (3.6)

$\vec{A} = A(x, y, z, t), A \neq f(t)$ — стационарное поле

$$\vec{A} = A(x, y, z) \quad (3.7)$$

$$\vec{N} = \int_{S} \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S A_n dS \quad (3.8)$$

где \vec{n} — единичная нормаль к поверхности S.



$$\vec{N} = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_S A_n dS - \quad (3.9)$$

поток через замкнутую поверхность

Рис.3.4.

3.2. Теорема Остроградского-Гаусса

Пусть имеется уединенный точечный заряд. Рассчитаем поток вектора этого заряда через замкнутую поверхность, окружающую этот заряд.

1. Сфера.

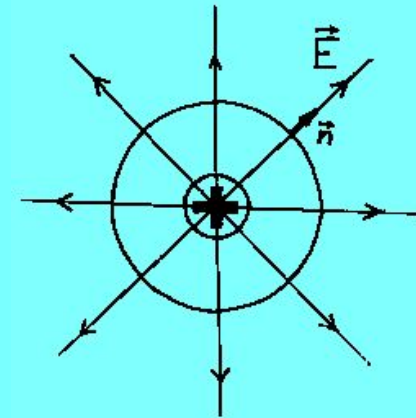


Рис.3.5.Сфера

$$N = \oint_S E_n dS = E \oint_S dS = ES$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \Rightarrow ES = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0};$$

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(3.10)

Поток вектора напряженности равен величине заряда, деленной на ϵ_0

Окружим заряд замкнутой поверхностью произвольной формы. Возможно два случая: выпуклая поверхность и поверхность с “морщинами”.

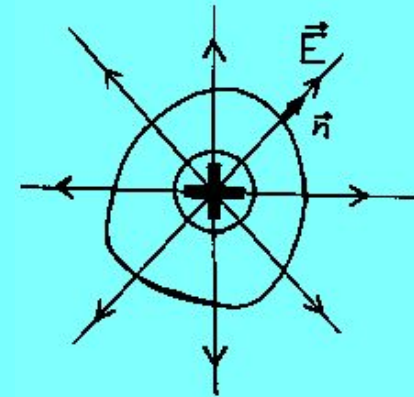


Рис.3.6. Выпуклая поверхность

В случае с выпуклой поверхностью результат такой же, как и для сферической, а во втором случае можно показать, что суммарный поток, создаваемый при пересечении линиями напряженности “морщин”, будет равен 0, т.к. при расчете скалярного произведения косинус угла между векторами E и n один раз будет

положительным, а в другой – отрицательным (знаки косинусов указаны на рис. 3.7).

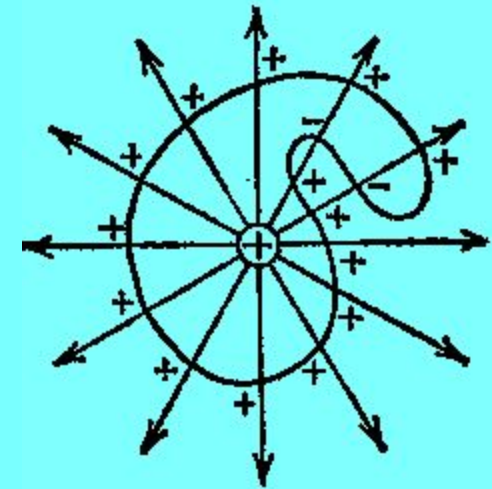


Рис.3.7. Поверхность с “морщинами”.

Поэтому можно сказать, что поток вектора напряженности поля точечного заряда через произвольно замкнутую поверхность, окружающую этот заряд, равен величине этого заряда, деленной на ε_0

Пусть имеется система k точечных уединенных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n

Воспользуемся принципом суперпозиции.

$$\vec{E}_{рез} = \sum_{i=1}^k \vec{E}_i,$$

$$N = \oint_S \vec{E}_{рез} \cdot \vec{n} dS = \oint_S \sum_{i=1}^k \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^k \oint_S \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} (q_1 + q_2 + \dots + q_k) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i \quad (3.11)$$

Поток вектора напряженности системы к точечным неподвижным зарядов в вакууме равен алгебраической сумме этих зарядов деленной на ϵ_0

В случаях, если имеется непрерывное распределение зарядов в некоторых телах, необходимо от операции суммирования перейти к операции интегрирования. Тогда получим:

$$N = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \int_l \tau \cdot dl & \text{— заряженная линия} \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \sigma \cdot dS & \text{— заряженная плоскость} \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV & \text{— Заряженное тело} \end{cases} \quad (3.12.)$$

Теорема Остроградского-Гаусса в интегральной форме

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV \quad (3.13)$$

[К оглавлению](#)

3.3. Применение теоремы Остроградского – Гаусса

3.3.1. Поле заряженной плоскости

1. Линии напряженности перпендикулярны плоскости.
2. Их густота одинакова

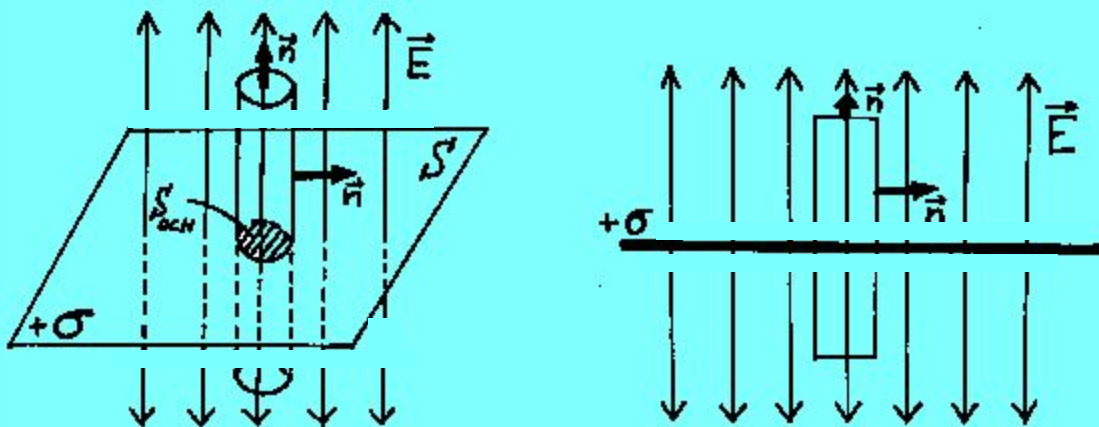


Рис.3.8. Поле заряженной плоскости

Так как плоскость бесконечна, то исходя из соображений симметрии значение модуля \vec{E} в каждой точке одинаково.

$$N = \oint_S E_n dS = \oint_{S_{\text{бок}}} E_n dS + 2 \oint_{S_{\text{оч}}} E_n dS$$

т.к. проекция вектора на нормаль к боковой поверхности равна нулю, то

$$\oint E_n dS = 0, .$$

$$2ES_{\text{оч}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma S_{\text{оч}} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \text{const} \quad (3.14)$$



[К оглавлению](#)

3.3.2. Поле разноименных плоскостей

Применим принцип суперпозиции: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (3.15)

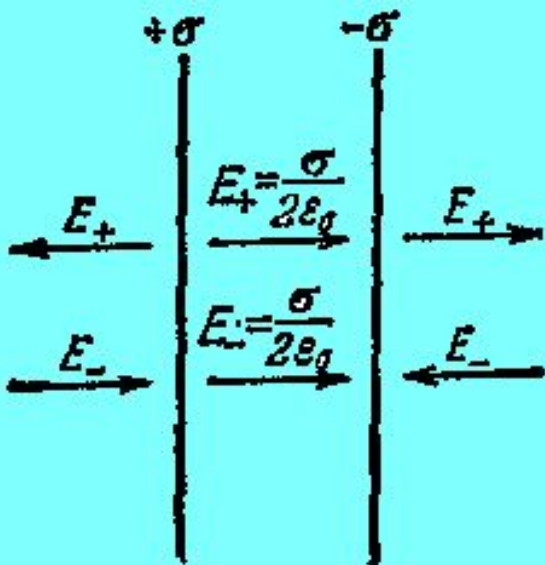


Рис.3.9. Поле разноименных плоскостей



Рис.3.10.

3.3.3. Поле заряженной нити.

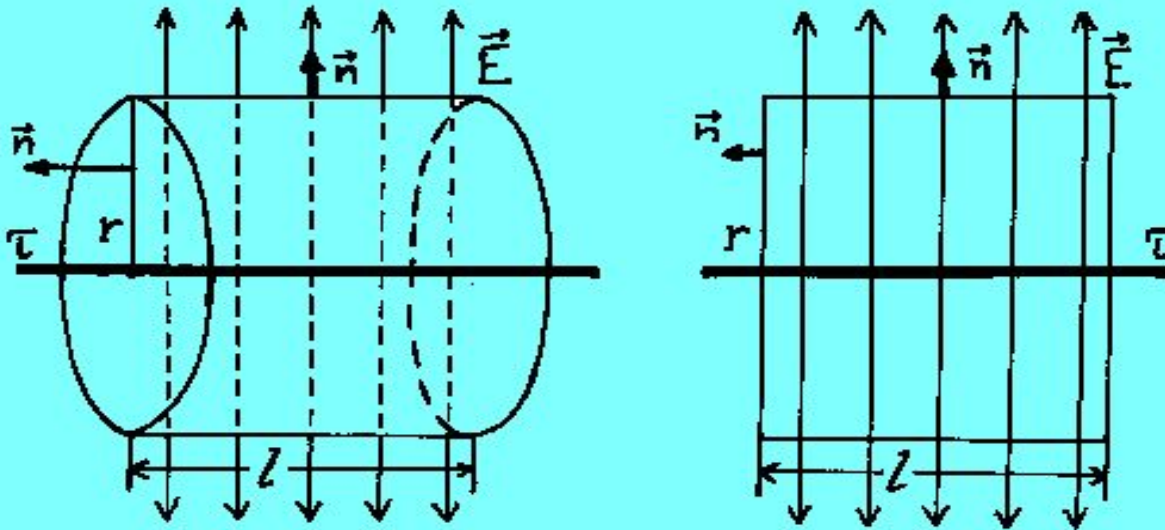


Рис.3.11. Поле заряженной нити

$$\oint E_n dS = E(r) \cdot 2\pi r l$$

$$E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \tau l$$

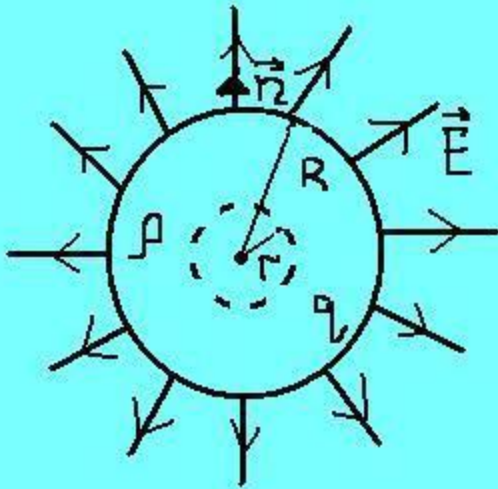
$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(3.16)

[К оглавлению](#)

3.3.4. Поле заряженной сферы.

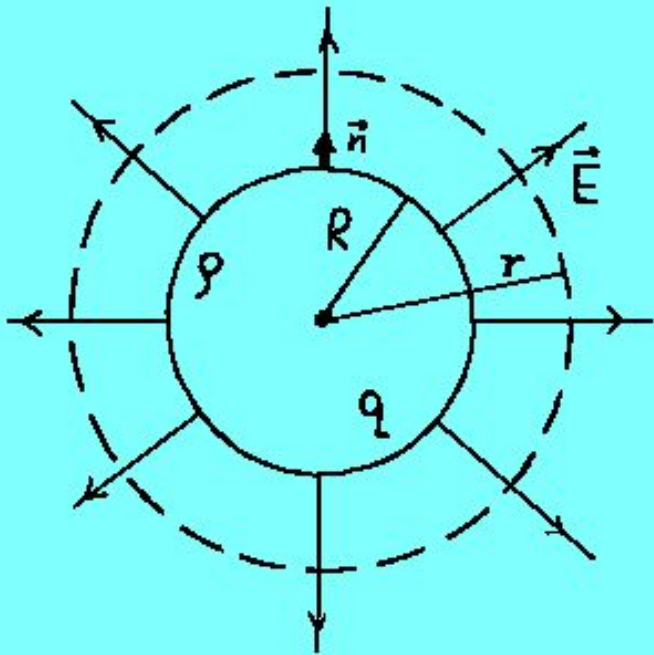
Поле внутри сферы.



$$\oint E_n dS = E \cdot 4\pi r^2$$
$$E \cdot 4\pi r^2 = 0$$
$$E = 0 \quad (3.17)$$

Рис.3.12. Поле внутри сферы.

Поле вне сферы



$$\oint E_n dS = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \cdot 4\pi R^2$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (3.18)$$

Т. к. $\sigma \cdot 4\pi R^2 = q$, то

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (3.19)$$

Если $r \cong R \Rightarrow E(R) \cong \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. (3.20)

3.3.5. Поле заряженного шара

Поле внутри шара.

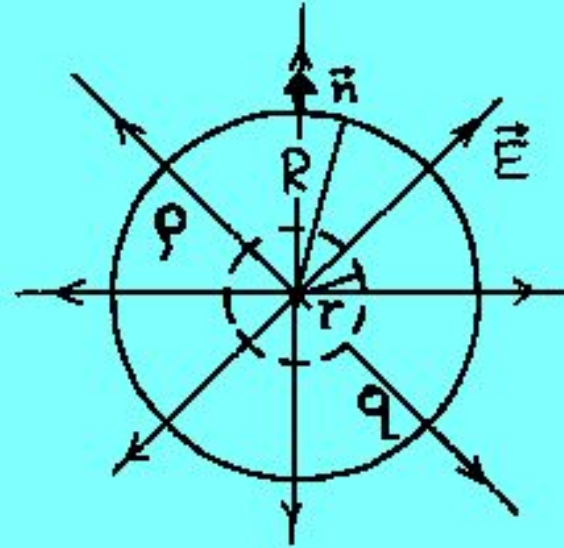


Рис.3.14. Поле внутри шара.

$$\oint E_n dS = E \cdot 4\pi r^2;$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot r = k_1 r$$

(3.21)

Поле вне шара.

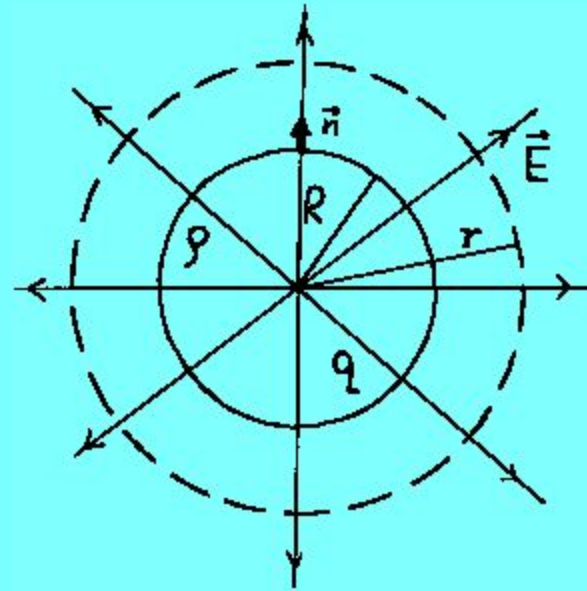


Рис.3.15. Поле вне шара

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} = k_2 \frac{1}{r^2} \quad \text{- обратно квадратичная зависимость. (3.22)}$$

3.4. Аналогия и различия между электростатическим и гравитационным полями

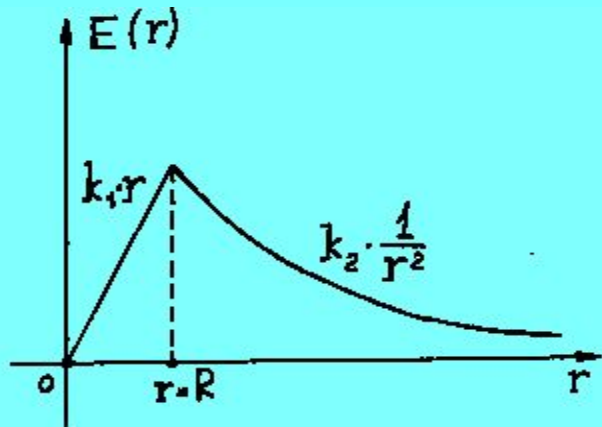


Рис.3.16.

На рисунке 3.16 изображен график зависимости напряженности электростатического поля от расстояния.

Аналогично выглядит график зависимости ускорения свободного падения от расстояния (рис.3.18).

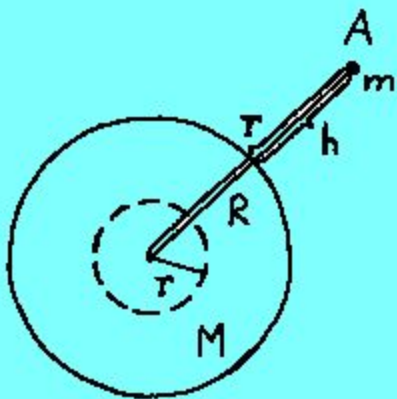


Рис.3.17.

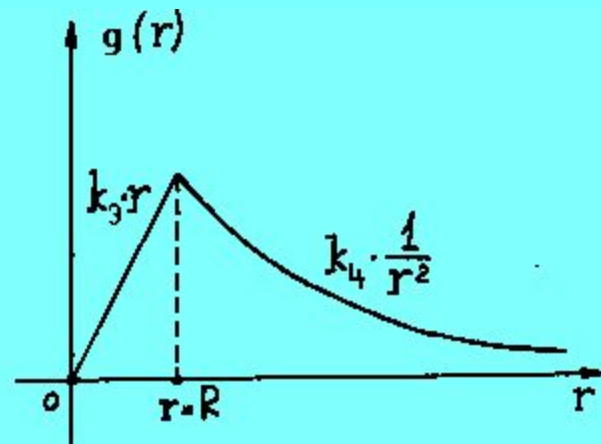


Рис.3.18.

$$F_{\text{гп}} = mg(r)$$

$$F_{\text{гп}} = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g(r) = \frac{\gamma \rho \cdot 4 \pi r^3}{3 \cdot r^2} = k_3 r \quad (3.23)$$

$$g(r) = \frac{\gamma M}{r^2} = k_4 \cdot \frac{1}{r^2} \quad (3.24)$$

Как вы считаете: случайно ли это совпадение?