

Абстрактная и компьютерная  
алгебра  
(курс лекций)

Оленев Александр Анатольевич  
olenevalexandr@gmail.com

**«Цель вычислений  
в проникновении в суть,  
а не в числах».**

(Ричард Хэмминг)

1. Введение в учебный курс «Абстрактная и компьютерная алгебра»
2. Основные системы компьютерной алгебры
3. Тенденции развития систем компьютерной аналитики

# ЧТО ТАКОЕ

- «АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА»?
- «КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА»?

# Лекция 1 (вводная)

## Общая характеристика учебного курса

# Содержание лекции

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

# Предмет дисциплины: предыстория Математика: от рассуждений ...

Евклид «Начала»,  
III век до н.э.



Давид Гильберт,  
рубеж XIX-XX вв.



Курт Гёдель,  
начало XX века



Математика – это игра, в которой из множества хорошо подобранных аксиом можно делать интересные выводы.

«Доигрались»- кризис оснований математики !  
Математика, оперирующая комбинаторными объектами (аксиомами, доказательствами, теоремами) способна описать результаты, но не процедуру их получения.

Необходимо формализовать математику !

Давид Гильберт,  
рубеж XIX-XX вв.

Всякая аксиоматическая достаточно «интересная» теория обязательно будет неполной (или противоречивой).

Формализовать математику нельзя ???

# Предмет дисциплины: предыстория

Математика: ...к вычислениям

Революция в математике (1936 г.) – переход от комбинаторики к алгоритмике !

Что такое «алгоритм»?

Алонзо Чёрч:  
λ - исчисление



Джон Маккарти:  
язык LISP

Алан Тьюринг:  
теоретическая машина



Джон фон Нейман:  
компьютер

А как же с формализацией математики ?

Никола Бурбаки: исчисление родов структур !

СГПИ кафедра  
математики и



Предмет дисциплины: ключевые слова

□ Алгебра ?

Это раздел математики.

□ Компьютерная алгебра ?

Это раздел информатики и  
вычислительной техники.

□ Системы компьютерной алгебры ?

Это аппаратные и/или  
программные  
инструментальные средства.

# Предмет дисциплины: терминология

## Термин «Алгебра»

Своим сочинением «Краткая книга об исчислении восстановления и противопоставления». Термином «восстановление» аль-Хорезми обозначает перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, а термином «противопоставление» – собирание неизвестных в одну сторону уравнения, а известных – в другую, например, выражение  $x^2 + 5 = 40x + 4x^2$  приводится к виду  $40x + 3x^2 = 5$ .

По-арабски название книги звучало «аль-китаб альмухтасар фи хисаб аль-джабр уа-ль-мукабаля», где слово «альджабр» по-арабски означает «восстановление», а слово «альмукабалы» – «противопоставление». При переводе названия книги незнакомое и почти магическое слово «аль-джабр» было просто переписано, трансформировавшись в более благозвучное для европейского уха слово «алгебра».



## Аль-Хорезми (786-850)

Полное имя ученого Абу Абдулла (или Абу Джафар) Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми. Имя аль-Хорезми указывает на его родину – среднеазиатское государство Хорезм<sup>19</sup>, а одно из прозвищ учёного – аль-Маджуси говорит о его происхождении из зороастрийских<sup>20</sup> жрецов – магов (по-арабски «маджус»). Сведений о его жизни сохранилось крайне мало.

Известно, что он был одним из главных ученых во «Дворце мудрости» в Багдаде, где на арабский язык были переведены основные греческие философские и научные труды. Им было написано первое руководство по арифметике, сохранились его трактаты об алгебре и о календаре. Трактат по алгебре также включает главу по геометрии, тригонометрические таблицы и таблицы широт и долгот городов.

- Термин «Абстрактная алгебра»
- **Определение: Общая алгебра** (также **абстрактная алгебра, высшая алгебра**) — раздел математики, изучающий алгебраические системы (также иногда называемые алгебраическими структурами), такие как группы, кольца, поля, частично упорядоченные множества, решётки, а также отображения между такими структурами.
- Примерами алгебраических структур с бинарной операцией являются:
- полугруппы, моноиды, группы, квазигруппы, полурешётки,
- две бинарные операции — в кольцах, почти-кольцах, полях, решётках.

Термин «компьютерная алгебра»  
появился в конце 70-х годов XX века.

Синонимы:

- Символьные вычисления.
- Аналитические вычисления.
- Формальные вычисления.

Предмет компьютерной алгебры –  
символьные представления  
и  
аналитические преобразования  
математических объектов  
в компьютерных системах  
обработки информации.

- **Компьютерная алгебра** (в отличие от численных методов) занимается разработкой и реализацией *аналитических* методов решения математических задач с использованием ПЭВМ и предполагает, что исходные данные, как и результаты решения, сформулированы в *аналитическом (символьном)* виде.

- *Компьютерная алгебра* — область математики, лежащая на стыке **алгебры и вычислительных методов.**



Предмет дисциплины: примеры задач

Типовая задача из алгебры.

Постановка задачи.

Разложить на простые дроби:

Способы решения задачи:

A. вручную (с карандашом и бумагой)

B. в системе компьютерной алгебры

C. в системе программирования

Результат решения задачи:

$$\frac{x^5 - 7x^4 + 2x - 8}{(x^3 - 4x^2 + 5x)(x - 3)^2}$$

$$-\frac{111x - 479}{10(x^2 - 4x + 5)} - \frac{8}{45x} + \frac{257}{18(x - 3)} - \frac{163}{3(x - 3)^2} + 1$$

# Предмет дисциплины: примеры задач

- Задача вычисления значения иррационального числа  $\pi$ .
- Постановка задачи.
- Вычислить значение числа  $\pi$  (отношение длины окружности к её диаметру) с точностью 1000 знаков после запятой
- Историческая справка:
- Результат решения задачи:  
1000-й знак = 9

Период времени, математик	Приближение по формуле	Значение числа $\pi$
Древний Египет,	256 / 81	3,160 ...
Древняя Индия	$\sqrt{10}$	3,162 ...
Конец XIX века, Вильям Шенкс	22 / 7 (Архимед) + 20 лет труда	707 знаков (ошибка в 520-м знаке – 1945 г.)
1949 г., Дж. фон Нейман	70 часов вычислений на ЭВМ ЭНИАК	2037 знаков
1989 г., Чудновские	неск. часов вычислений на ПЭВМ	> 1 млрд. знаков

# Предмет дисциплины: примеры задач

- Задача вычисления значения иррационального числа  $\pi$
- (система компьютерной алгебры «Maple»).
- Текст программы решения задачи –
- один (!) оператор:
- `> evalf(Pi, 1001); #` вычисление числа  $\pi$  с точностью 1000 знаков
- `# (1 «лишний» знак – это знак «3» (целая часть))`
- `> evalf(Pi, 1002); #` вычисление числа  $\pi$  с точностью 1001 знак

# Предмет дисциплины: примеры задач

- Задача вычисления значения иррационального числа  $\pi$
- (система компьютерной алгебры «Maple»).

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816  
40628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223  
17253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288  
10975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454  
32664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409  
17153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703  
65759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752  
72489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070  
21798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452  
63560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371  
05079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996  
05187072113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083  
02642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420  
61717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185  
7780532171226806613001927876611195909216420198 9 [4 ... ]

# Место дисциплины в учебном плане



## Математические вычисления на компьютере

Точные  
вычисления



Компьютерная  
алгебра

Приближённые  
вычисления



Вычислительная  
математика

# Место дисциплины в учебном плане

- «Компьютерная алгебра рассматривает такие объекты, которые имеют слишком вычислительный характер, чтобы встречаться в книгах по алгебре, и слишком алгебраический характер, чтобы быть представленными в учебниках по информатике»

# Место дисциплины в учебном плане

- Особенности преподавания курса (1):  
Своевременность пополнения и систематизации знаний:
- понимание сути всех аспектов компьютерной алгебры – магистерская программа обучения (5-й и/или 6-й годы университетского образования);
- знание основного набора существующих методов и алгоритмов решения задач компьютерной алгебры в научных, исследовательских и инженерных целях – бакалаврская программа обучения (3-й и/или 4-й годы университетского образования);
- знание общих принципов организации аналитических вычислений, а также способов и средств их реализации для решения задач в ограниченной (общеобразовательной или профессиональной – начального уровня подготовки) предметной области – любой этап университетского (и даже школьного) образования.

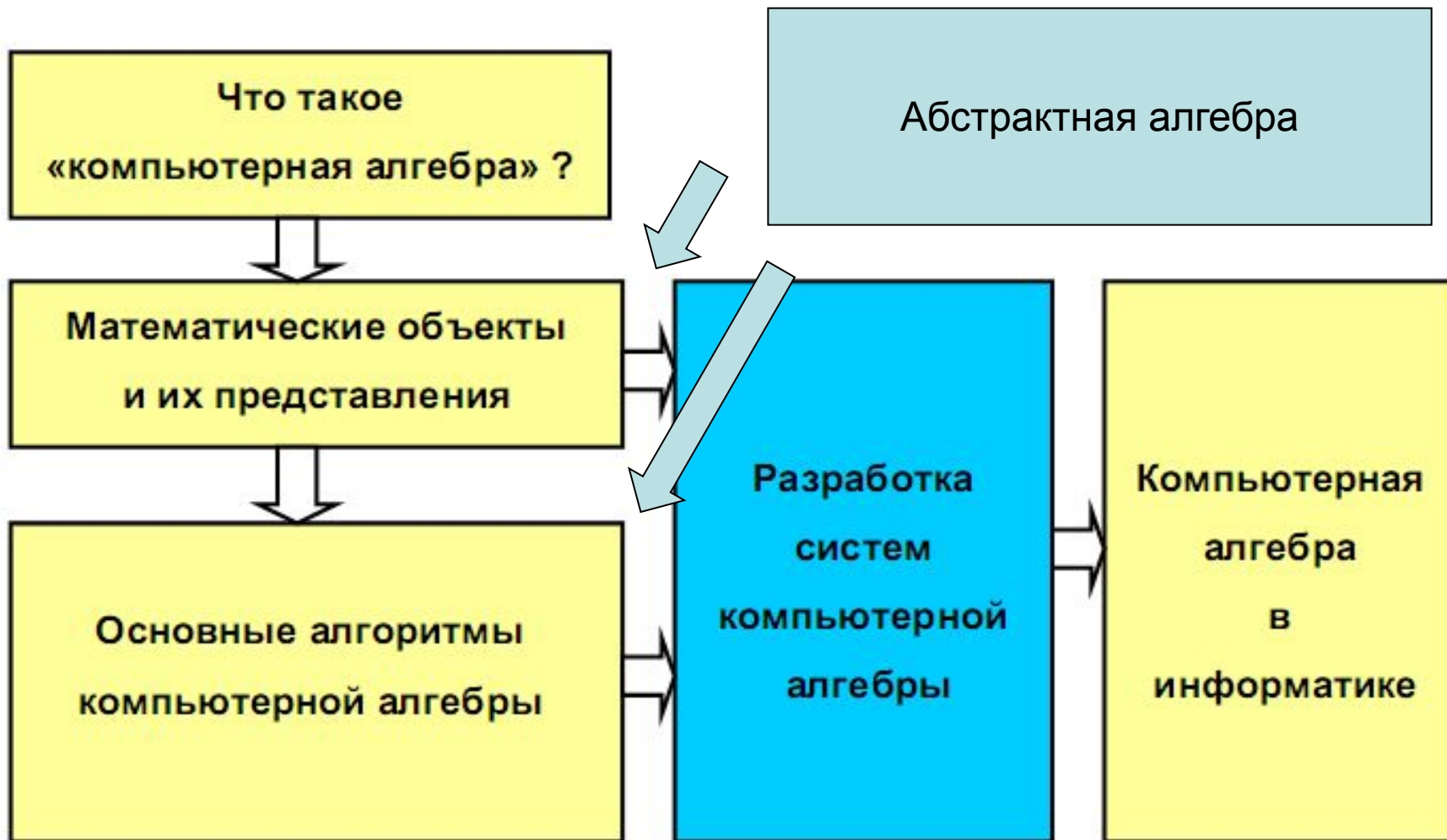
# Место дисциплины в учебном плане

Профессиональная ориентация слушателей (студентов):

- математика (теоретическая и прикладная);
- физика (механика, оптика, электромагнетизм, квантовая физика);
- информатика и управление;
- вычислительная техника и программирование;
- другие профили (химия, генетика, лингвистика и т.п.).



# Структура разделов дисциплины



# Базовый уровень подготовки студентов

(I) Что нужно знать (теория):

- Алгебру и начала анализа

(в объёме общеобразовательной школы);

- Дискретную математику (в объёме односеместрового вузовского курса);
- Высшую математику (в объёме односеместрового вузовского курса).

# Базовый уровень подготовки студентов

- (II) Что нужно уметь (практика):
- Решать вручную задачи из школьного и вузовских математических курсов;
- Быть пользователем одной из операционных систем общего назначения;
- Программировать на одном из алгоритмических языков;
- Использовать печатные и электронные (Интернет) публикации для самостоятельного профессионального обучения.

# Виды учебных занятий и аттестаций

Вид учебной работы	Всего часов
Аудиторные занятия (всего)	72
В том числе:	
Лекции (Л)	18
Лабораторные работы (ЛР)	54

СГПИ кафедра  
математики и

# Виды учебных занятий и аттестаций

- Расчётные задания (1):
- (решение одной тематической задачи)  
(с помощью различных программных систем)
- Система компьютерной алгебры «Maxima»;
- Система программирования Eclipse  
(язык Common LISP);
- Система компьютерной алгебры «Maple»;
- Система программирования MS Visual Studio  
(язык C++).

# Виды учебных занятий и аттестаций

- Расчётные задания (2):
  - Типовые – для реализации в системах компьютерной алгебры;
  - Индивидуальные – для реализации в системах программирования.

- Использовать фантастический способ аттестации ?

Высокочастотный измеритель таланта

(С. Снегов «Тяжёлая капля тщеславия»)

- z Дурак элементарный
- z Дурак самодовольный
- z Бездарь ординарная
- z Бездарь агрессивная
- z Середняк рядовой смирный
- z Способность векториальная
- z Способность общая
- z Дарование
- z Талант
- z Гений

# Виды учебных занятий и аттестаций

- Аттестационная шкала – 1..100 баллов
- Допуск к зачету – 50 баллов.
- Зачет:
  - «3» – 55 ... 69 баллов;
  - «4» – 70 ... 84 баллов;
  - «5» – 85 ... 100 баллов.



# Виды учебных занятий и аттестаций

Вид работы учебной работы	Баллы за ед.	Кол-во ед.	Сумма баллов
Посещение /пропуск лекций	Мах 2 балла 2/9	Переменное	<b>+2</b>
Посещение /пропуск лабораторных занятий	Мах 6 баллов 5/27	Переменное	<b>+6</b>
Ведение конспекта лекций	Мах 3	Переменное	<b>+3</b>
Внутрисеместровая аттестация:	Мах 3 балло в	1	<b>+5</b>
Выполнение и защита ЛР	1/2	27/54	<b>+54</b>
Уровень выполняемых заданий	+30 в зависим ости от уровня	2 уровня 1- +15 2- + 15	<b>+30</b>
Внеаудиторная (самостоятельная работа) (реферат, инд. задание и т.д.)	+15	Переменное	<b>+15</b>
Итого			+65+ 5 <b>+30</b> =+100

СГПИ кафедра  
математики и

# Результаты изучения дисциплины

- Знания математических основ и базовых алгоритмов целочисленной и полиномиальной арифметик, а также функциональных возможностей их применения при решении избранных прикладных задач информатики.
  - Умения выполнять полный цикл алгоритмического анализа и синтеза решения вычислительной задачи в общем (символьном) виде: от ее формальной постановки с помощью математических объектов до выбора структур данных и операторов языка программирования.
  - Навыки использования существующих и перспективных систем компьютерной алгебры общего и специального назначения.

# Источники учебных материалов

Учебные материалы для лекций:

- (1) Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями (1994)
- (2) Панкратьев Е.В. Элементы компьютерной алгебры (2007)
- (3) Тан К.Ш. и др. Символьный C++: введение в компьютерную алгебру (2001)
- (4) Дэвенпорт Дж. и др. Компьютерная алгебра (1991)
- (5) Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б. Бухбергера и др. (1986)
- (6) Ноден П. и др. Алгоритмическая алгоритмика (с упражнениями и решениями) (1999)

# Источники учебных материалов

Учебные материалы для практических занятий (1):

Система «Maple»:

- Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Maple – система аналитических вычислений для математического моделирования :

[http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/MME/courses/maple\\_c/](http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/MME/courses/maple_c/)

- Прохоров Г., Колбеев В., Желнов К., Леденев М. Математический пакет Maple V Release 4: Руководство пользователя :

[http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/soft/Maple/kaluga/1.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Maple/kaluga/1.asp.htm)

- Манзон Б.М. Maple V Power Edition :

[http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/soft/Maple/manson/poweredition/0.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Maple/manson/poweredition/0.asp.htm)

# Контактная информация

- Оперативная связь с преподавателем  
(E-mail): [olenevalexandr@gmail.com](mailto:olenevalexandr@gmail.com)

# Спасибо за внимание !

- Вопросы ?