Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 4

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда её производная может быть выражена в виде некоторой функции $g(x)$:

$$f'(x) = g(x)$$

Если функция $g(x)$ тоже дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то можно найти её производную $g'(x)$, которая называется **второй производной** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производные высших порядков

Аналогично, функция $f''(x)$ может оказаться дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, тогда

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$$

есть **третья производная** функции $f(x)$.

Продолжая, получим, что если на отрезке $[a, b]$, $(n-1)$-я производная функции $f(x)$ является дифференцируемой функцией, то

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

называется **производной *n*–го порядка** или ***n*–й производной** функции $f(x)$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производные высших порядков

Обозначения n–й производной функции $f(x)$:

$$f^{(n)}_{\underbrace{xx\ldots x}_{n}}(x); \quad f^{(n)}_{x^n}(x); \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Функции $f(x)$ является $\boldsymbol{n}$ **раз дифференцируемой** в точке x_0, если в этой точке у неё существуют все производные до n–го порядка включительно.

Если при этом все n производных являются на некотором отрезке $[a, b]$ непрерывными функциями, то функция $f(x)$ называется $\boldsymbol{n}$ **раз непрерывно дифференцируемой** функцией.

Функция $f(x)$, имеющая производную любого порядка, называется **бесконечно дифференцируемой** функцией.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция, а её дифференциал

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

Дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом) функции $f(x)$ называется дифференциал от её дифференциала, обозначаемый

$$d^2 f = d(df)$$

Дифференциалом 3–го порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от её дифференциала 2–го порядка, обозначаемый

$$d^3 f = d(d^2 f)$$

Аналогично получаем, что **дифференциалом *n*–го порядка** функции $f(x)$ является

$$d^{(n)} f = d(d^{(n-1)} f)$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Дифференциал 2–го порядка

По определению имеем:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx$$

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$d^2 f = df'(x)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

Если x – независимая переменная, то dx не зависит от x, и, следовательно,

$$(dx)' = (dx)'' = \dots = (dx)^{(n)} = 0$$

Тогда $d^2 f = f''(x)dx^2.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Дифференциалы высших порядков

Если x – независимая переменная, то дифференциал 3–го порядка имеет вид:

$$d^3 f = f'''(x)dx^3$$

Для дифференциала n–го порядка имеем:

$$d^{(n)} f = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Если x – зависимая переменная, то дифференциал 2–го порядка следует находить по общей формуле:

$$d^2 f = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

где $x = \varphi(t)$.

Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org