

Лекция 4

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда её производная может быть выражена в виде некоторой функции $g(x)$:

$$f'(x) = g(x)$$

Если функция $g(x)$ тоже дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то можно найти её производную $g'(x)$, которая называется **второй производной** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Производные высших порядков

Аналогично, функция $f''(x)$ может оказаться дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, тогда

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

есть **третья производная** функции $f(x)$.

Продолжая, получим, что если на отрезке $[a, b]$, $(n-1)$ -я производная функции $f(x)$ является дифференцируемой функцией, то

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

называется **производной n -го порядка** или **n -й производной** функции $f(x)$.

Производные высших порядков

Обозначения n -й производной функции $f(x)$:

$$f_{\underbrace{xxx \dots x}_n}^{(n)}(x); \quad f_{x^n}^{(n)}(x); \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Функция $f(x)$ является **n раз дифференцируемой** в точке x_0 , если в этой точке у неё существуют все производные до n -го порядка включительно.

Если при этом все n производных являются на некотором отрезке $[a, b]$ непрерывными функциями, то функция $f(x)$ называется **n раз непрерывно дифференцируемой** функцией.

Функция $f(x)$, имеющая производную любого порядка, называется **бесконечно дифференцируемой** функцией.

Дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция, а её дифференциал

$$df(x) = f'(x) dx$$

Дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом) функции $f(x)$ называется дифференциал от её дифференциала, обозначаемый

$$d^2 f = d(df)$$

Дифференциалом 3–го порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от её дифференциала 2–го порядка, обозначаемый

$$d^3 f = d(d^2 f)$$

Аналогично получаем, что **дифференциалом n –го порядка** функции $f(x)$ является

$$d^{(n)} f = d(d^{(n-1)} f)$$

Дифференциал 2–го порядка

По определению имеем:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx$$

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$d^2 f = df'(x)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

Если x – независимая переменная, то dx не зависит от x , и, следовательно,

$$(dx)' = (dx)'' = \dots = (dx)^{(n)} = 0$$

Тогда $d^2 f = f''(x)dx^2$.

Дифференциалы высших порядков

Если x – независимая переменная, то дифференциал 3–го порядка имеет вид:

$$d^3 f = f'''(x)dx^3$$

Для дифференциала n –го порядка имеем:

$$d^{(n)} f = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Если x – зависимая переменная, то дифференциал 2–го порядка следует находить по общей формуле:

$$d^2 f = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

где $x = \varphi(t)$.

Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

math.mmts-it.org