

## Лекция 7

# АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

## Асимптоты функции

---

Определение:

**Асимптотой** функции называется прямая линия, к которой приближается значение функции по мере удаления от начала координат.

## Асимптоты функции

---

Вертикальная асимптота:

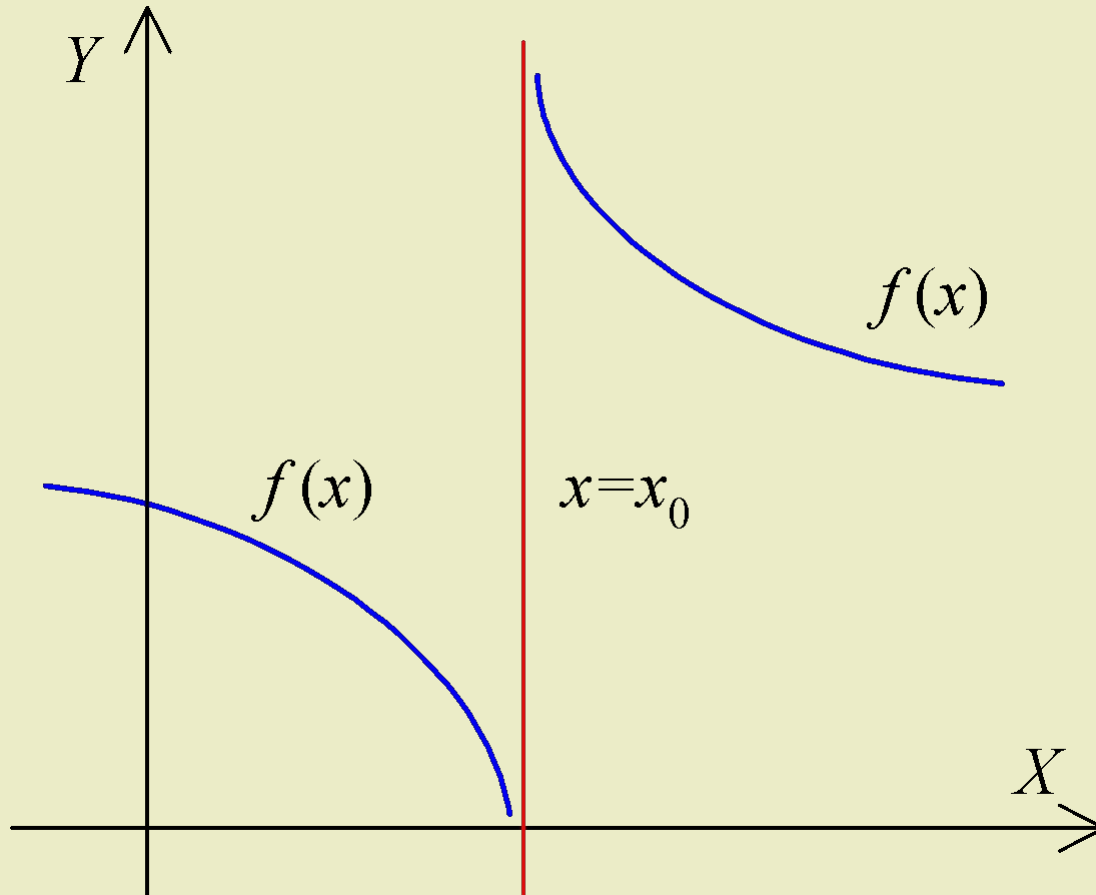
Прямая  $x = x_0$  называется **вертикальной асимптотой** графика функции  $f(x)$ , если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

равен бесконечности.

## Асимптоты функции

Пример:



## Асимптоты функции

---

Пример 1:

Найти вертикальные асимптоты функции  $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

Решение:

Ответ:  $x = -1$ ;  $x = 1$ .

## Асимптоты функции

---

Наклонная асимптота:

Прямая  $y = kx + b$  называется **наклонной асимптотой** графика функции  $f(x)$ , если при  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$  выполняется равенство

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

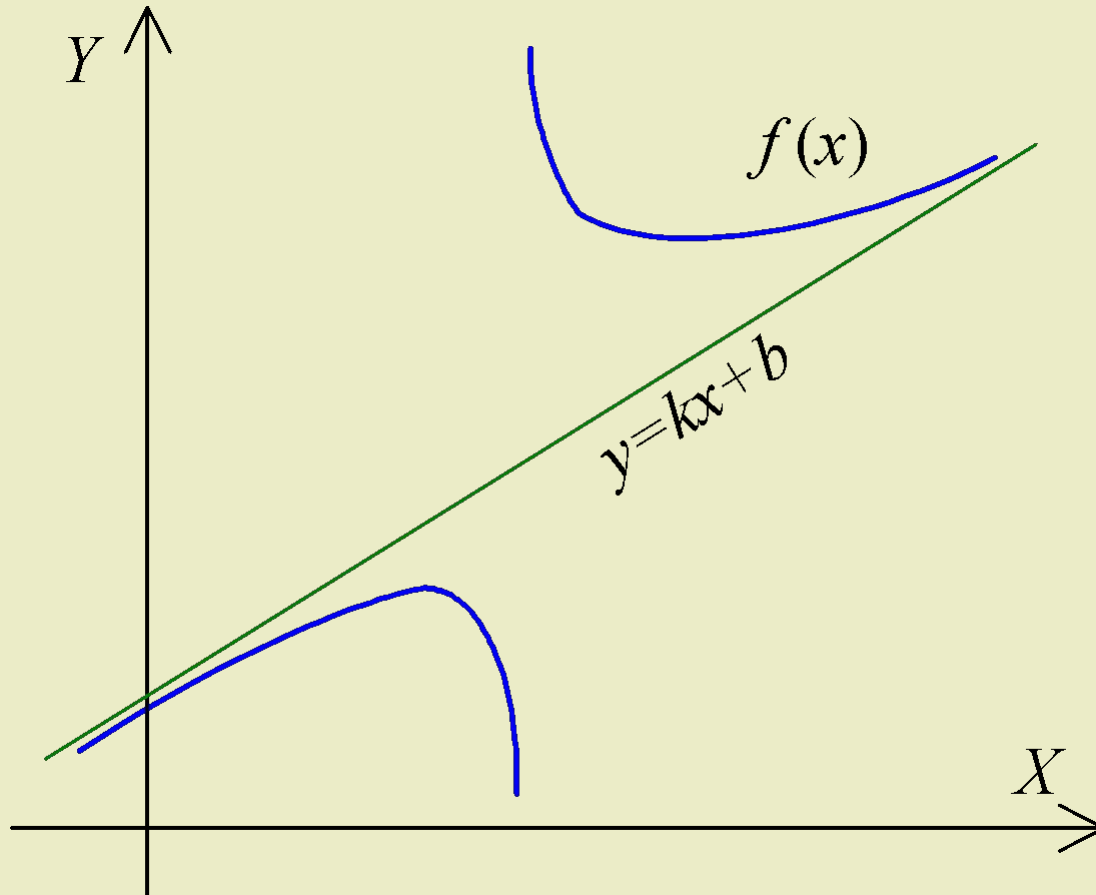
причём

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$$

соответственно.

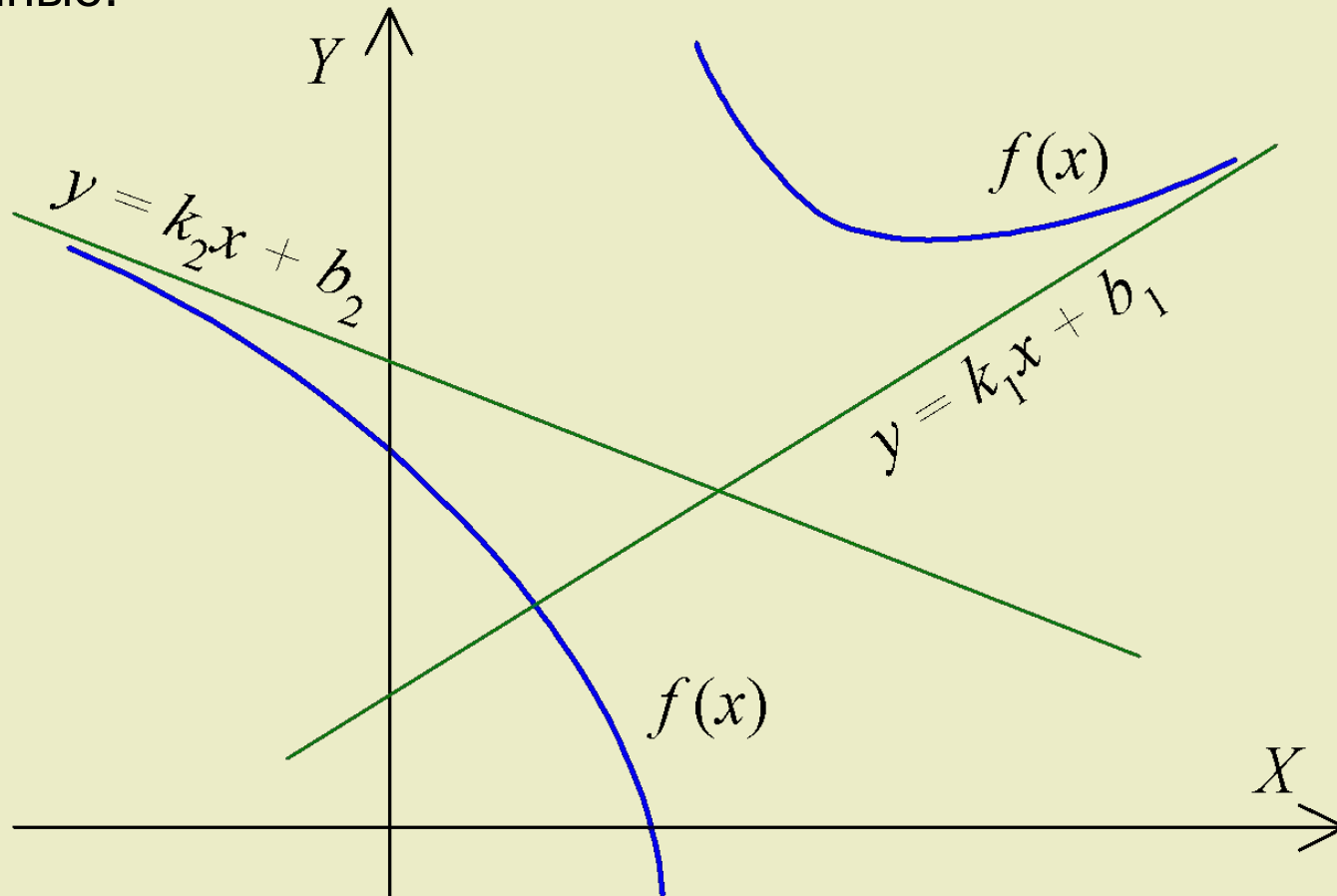
## Асимптоты функции

Наклонная:



## Асимптоты функции

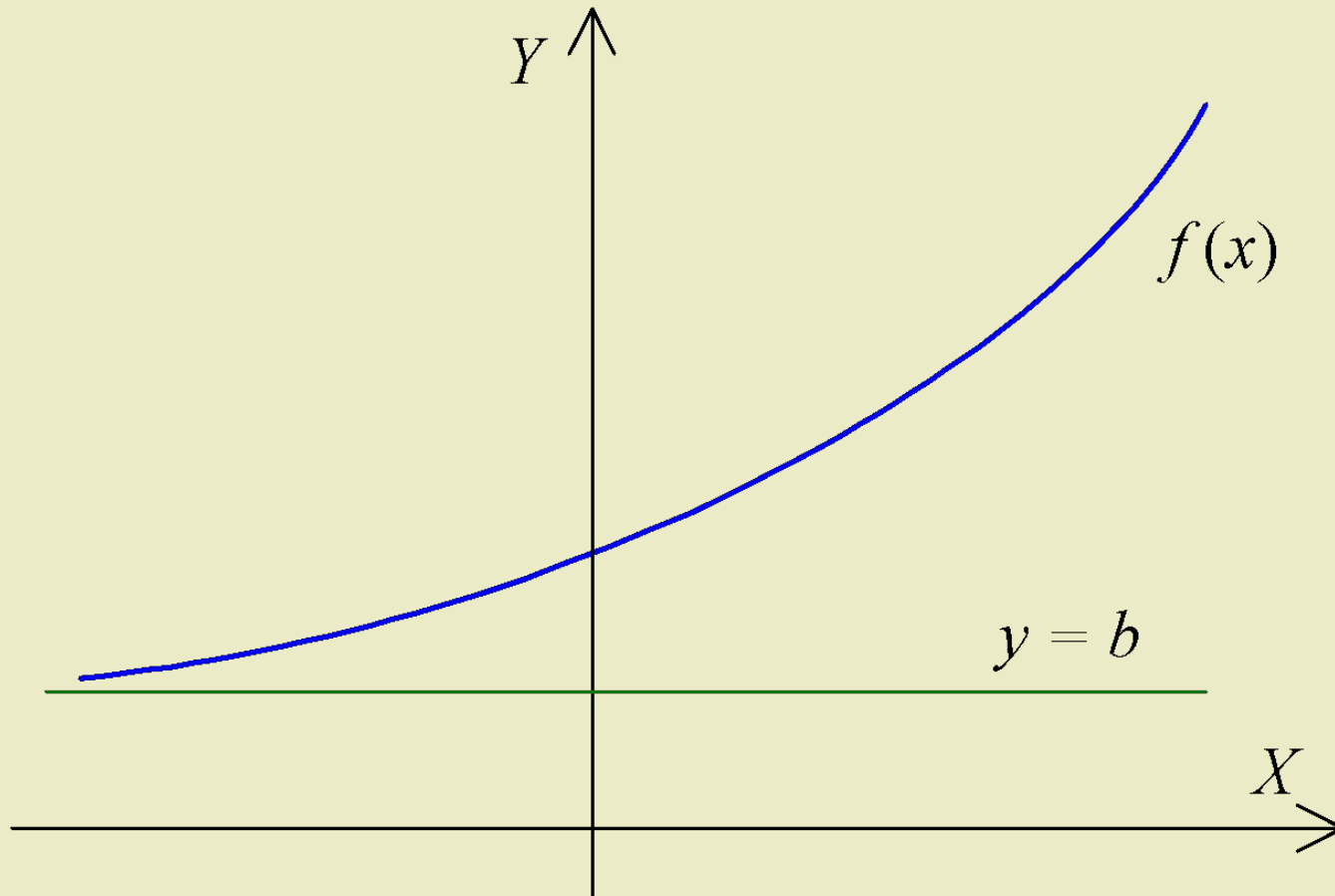
Наклонные:





## Асимптоты функции

Горизонтальная:



## Асимптоты функции

---

Теорема:

Для того чтобы прямая  $y = kx + b$  являлась наклонной асимптотой графика функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно существование следующих пределов:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) = b.$$

## Асимптоты функции

---

Пример 2:

Найти наклонные асимптоты функции  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

Решение:

Ответ:  $y = -x + 1$

## Лекция 7

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

## Непрерывность функции в точке

---

Определение 1:

Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке  $x_0$** , если она определена в этой точке и её предел в ней равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Запись через односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

## Непрерывность функции в точке

---

Определение 2:

Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке  $x_0$** , если она определена в некоторой её окрестности и

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x: |x - x_0| < \delta: \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

## Непрерывность функции в точке

---

Обозначения:

$\Delta x = x - x_0$  – приращение аргумента

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$  – приращение функции

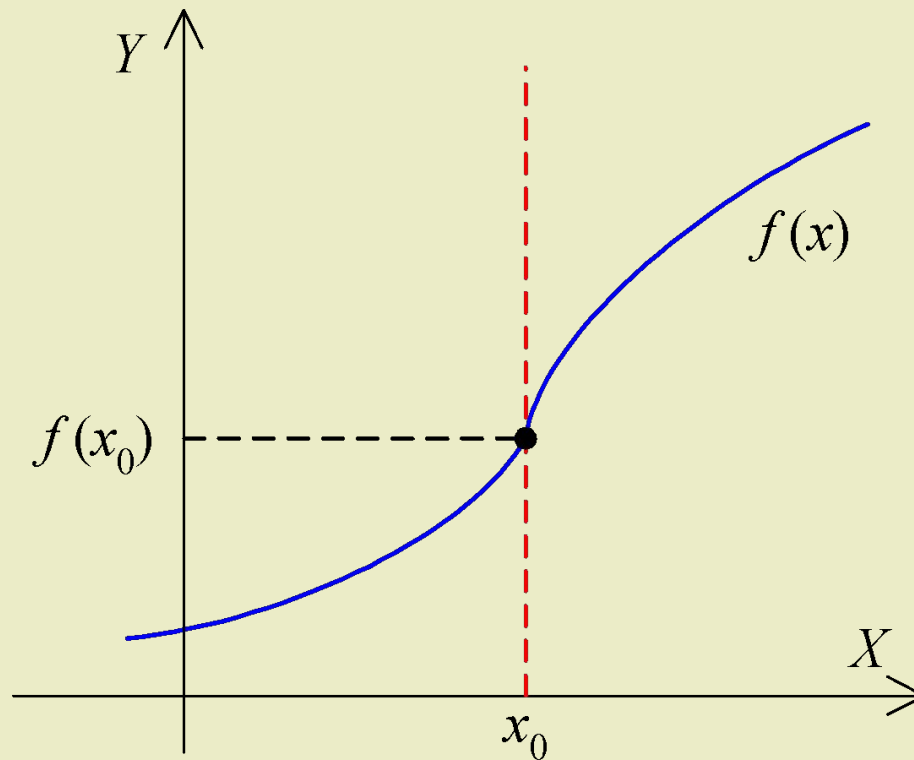
Определение 3:

Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке  $x_0$** , если её приращение в этой точке есть бесконечно малая функция при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

## Непрерывность функции в точке

---

Графическая интерпретация:





## Непрерывность функции в точке

---

Пример 3:

Установить непрерывность или разрывность функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -1; \\ x^2 + 2, & -1 < x \leq 1; \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

Решение:

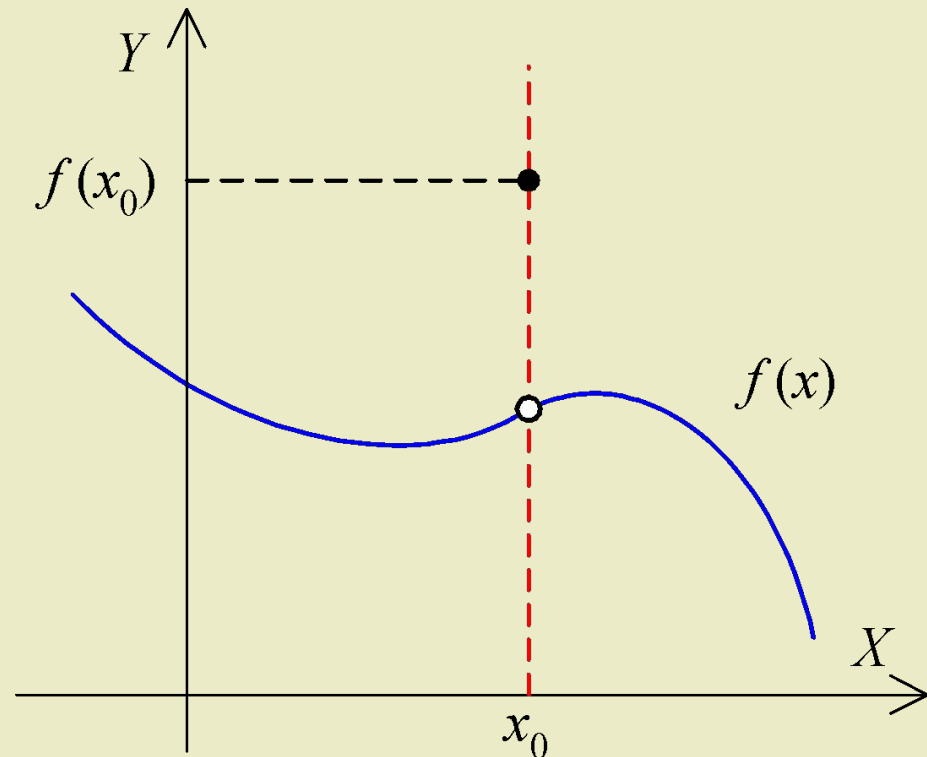
Ответ:

## Классификация точек разрыва

---

### 1. Устранимый разрыв

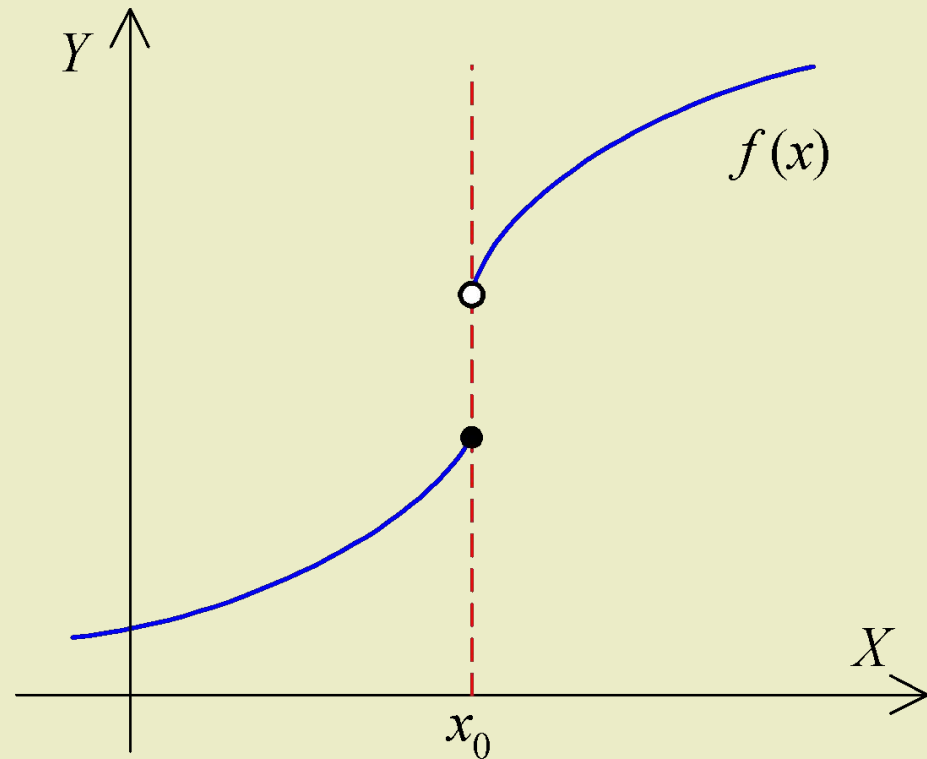
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$



## Классификация точек разрыва

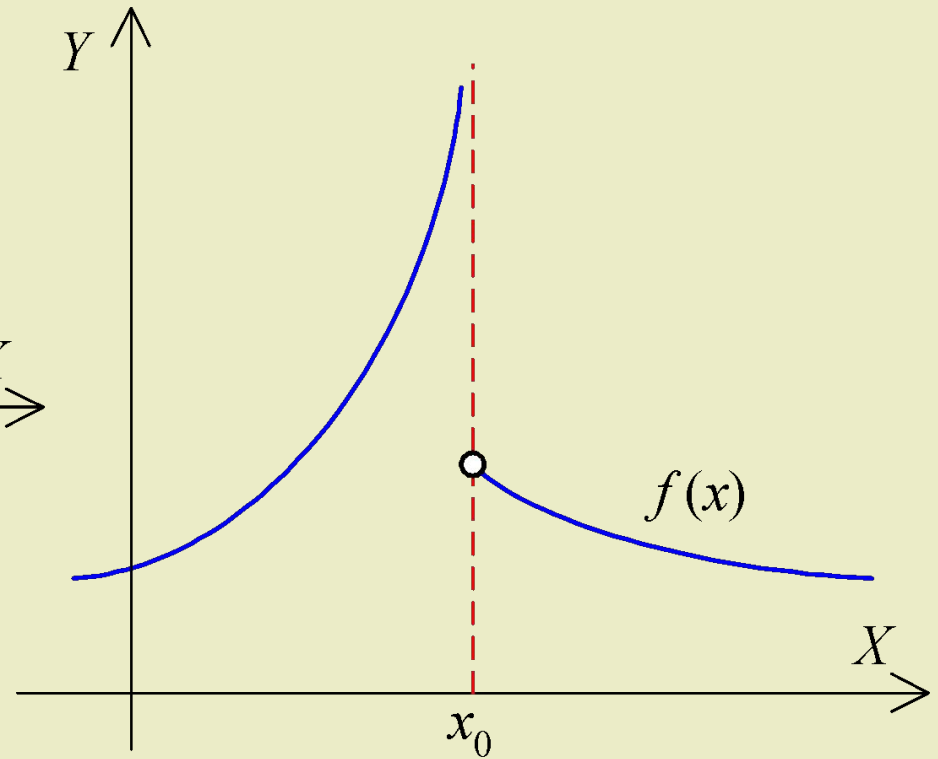
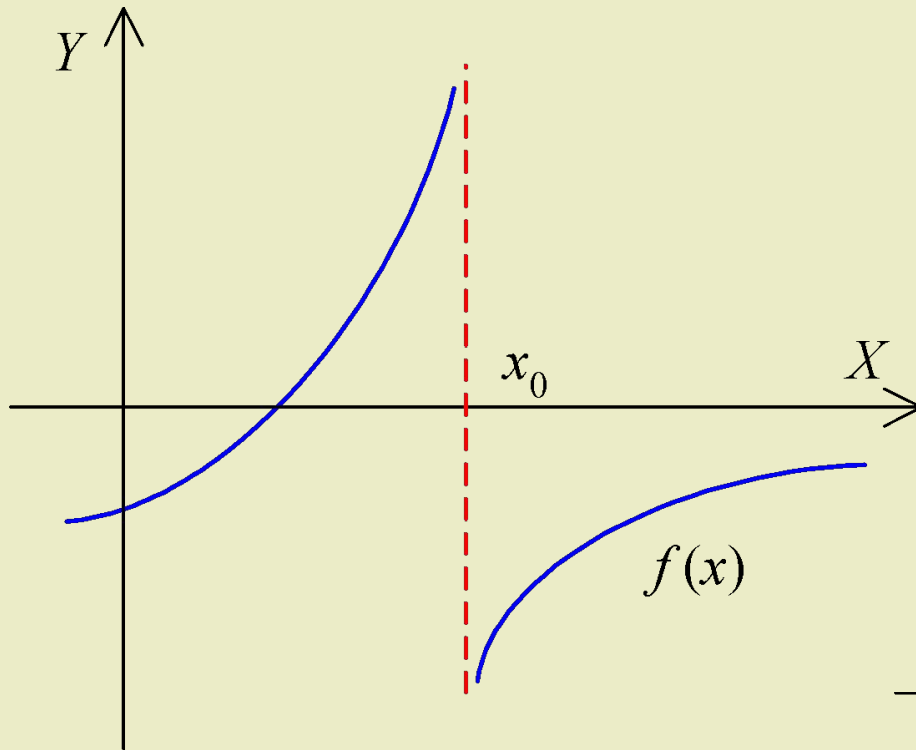
### 2. Разрыв 1-го рода

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \text{const}$$



## Классификация точек разрыва

### 3. Разрыв 2-го рода



## Непрерывность функции в точке

---

Пример 4:

Найти точки разрыва функции и установить их характер

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^3}$$

Решение:

Ответ:

[math.mmts-it.org](http://math.mmts-it.org)