Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 7

АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Определение:

Асимптотой функции называется прямая линия, к которой приближается значение функции по мере удаления от начала координат.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Вертикальная асимптота:

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов

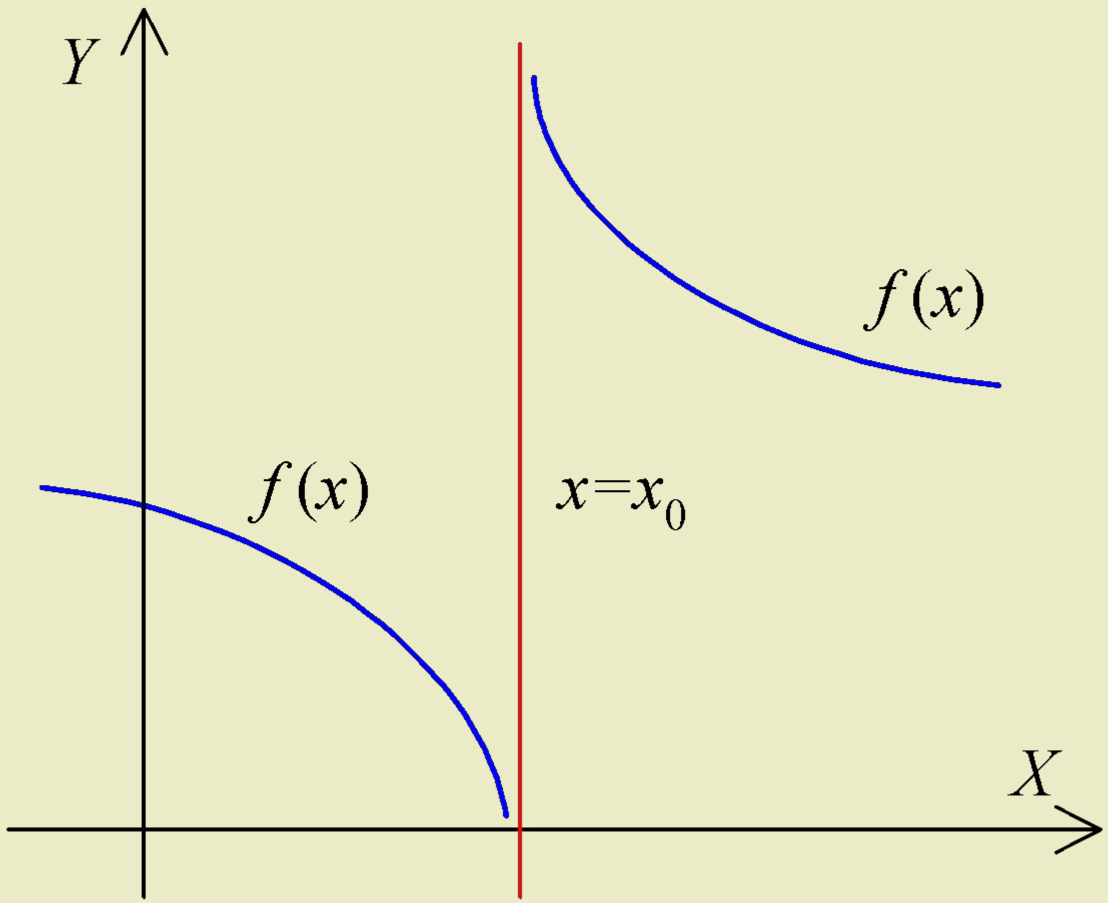
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

равен бесконечности.

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Пример:



Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Пример 1:

Найти вертикальные асимптоты функции $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

Решение:

Ответ: $x = -1; \quad x = 1.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Наклонная асимптота:

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$, если при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ выполняется равенство

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

причём

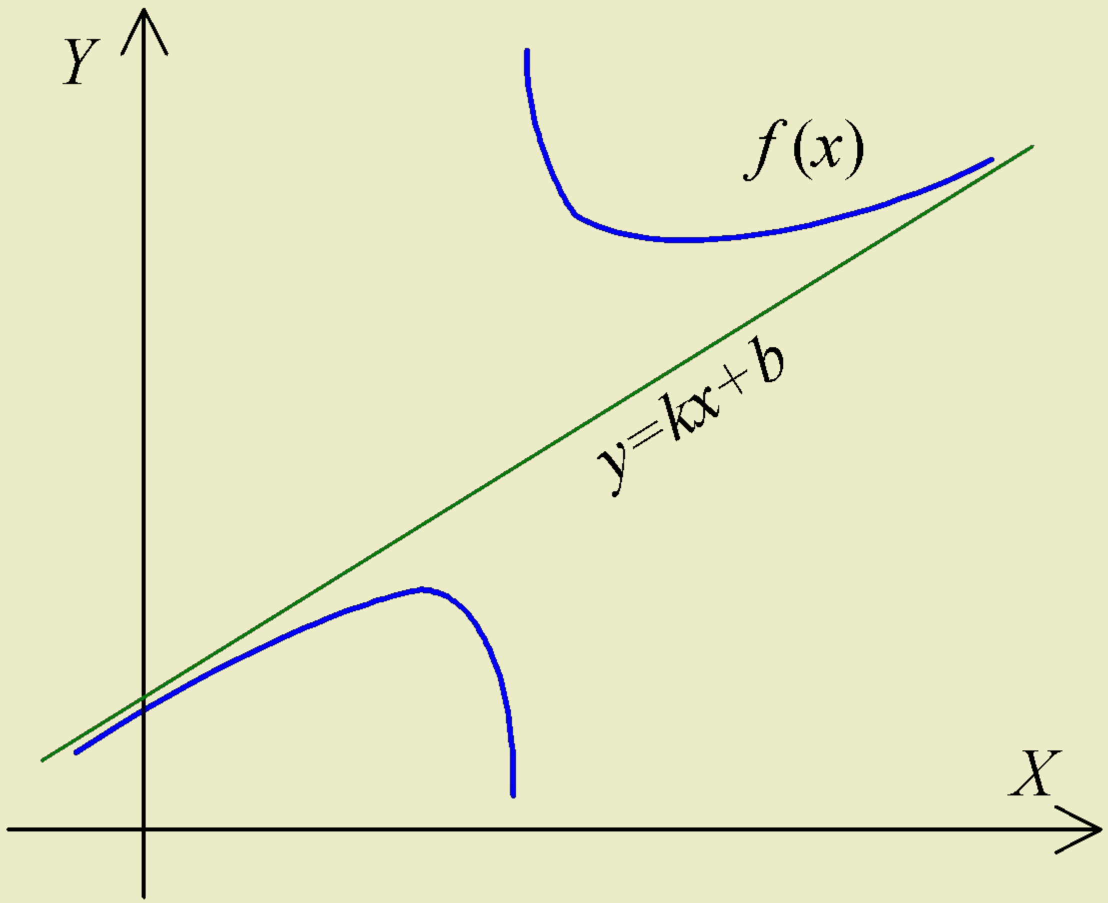
$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0$$

соответственно.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

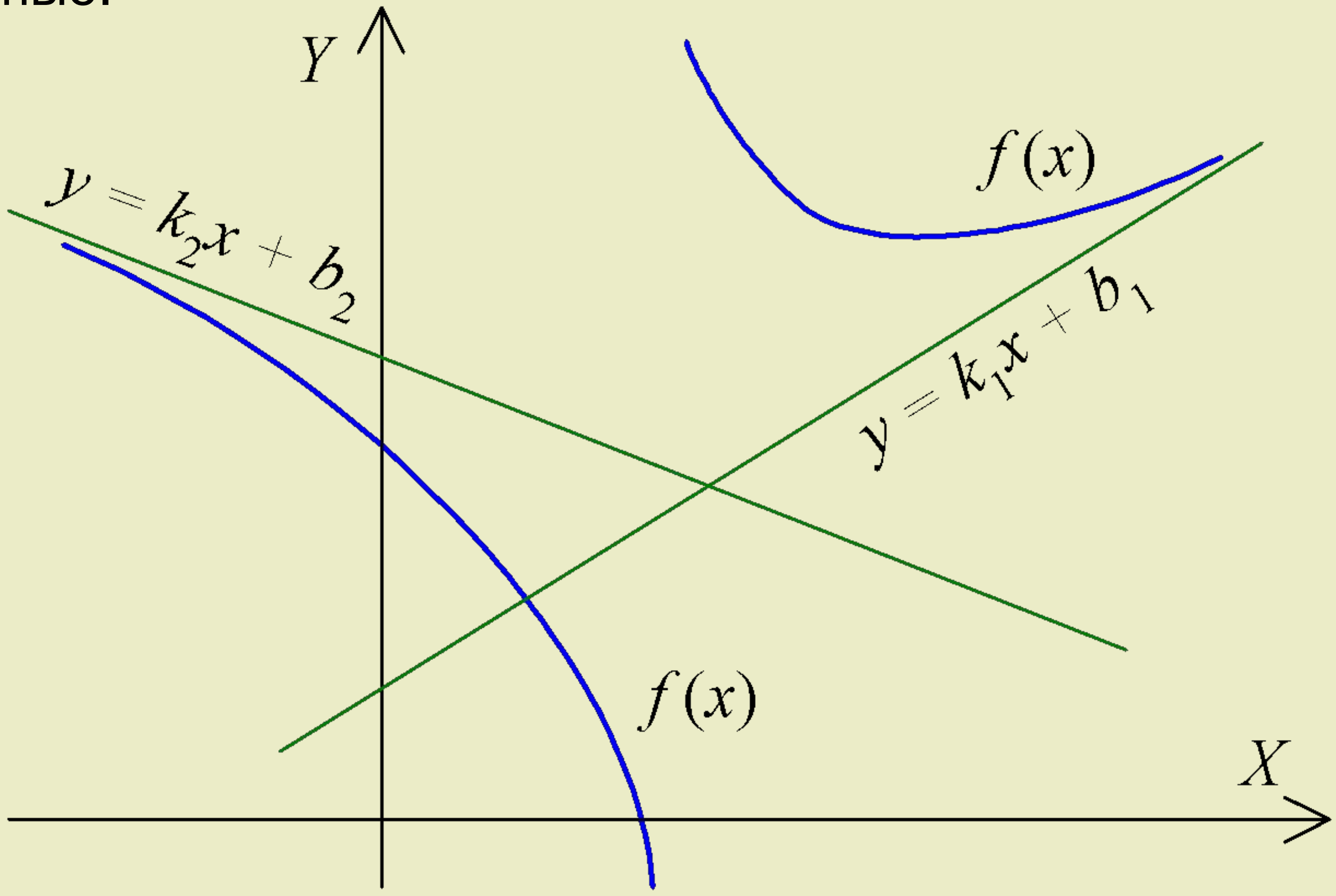
Наклонная:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

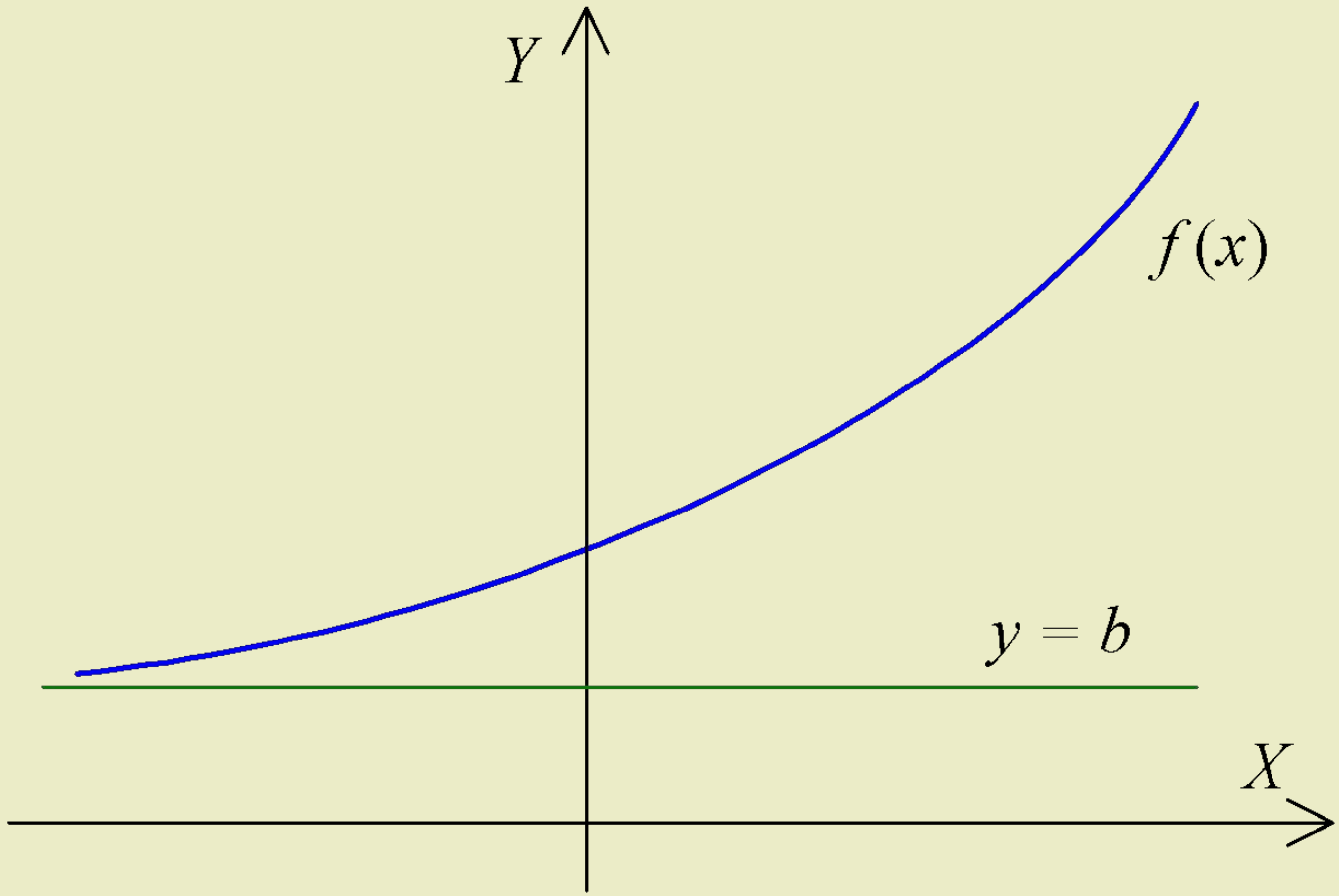
Наклонные:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Горизонтальная:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Теорема:

Для того чтобы прямая $y = kx + b$ являлась наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, необходимо и достаточно существование следующих пределов:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k; \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \bigl(f(x) - kx\bigr) = b.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Асимптоты функции

Пример 2:

Найти наклонные асимптоты функции $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

Решение:

Ответ: $y = -x + 1$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 7

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Определение 1:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если она определена в этой точке и её предел в ней равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Запись через односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Определение 2:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если она определена в некоторой её окрестности и

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x : |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Обозначения:

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции

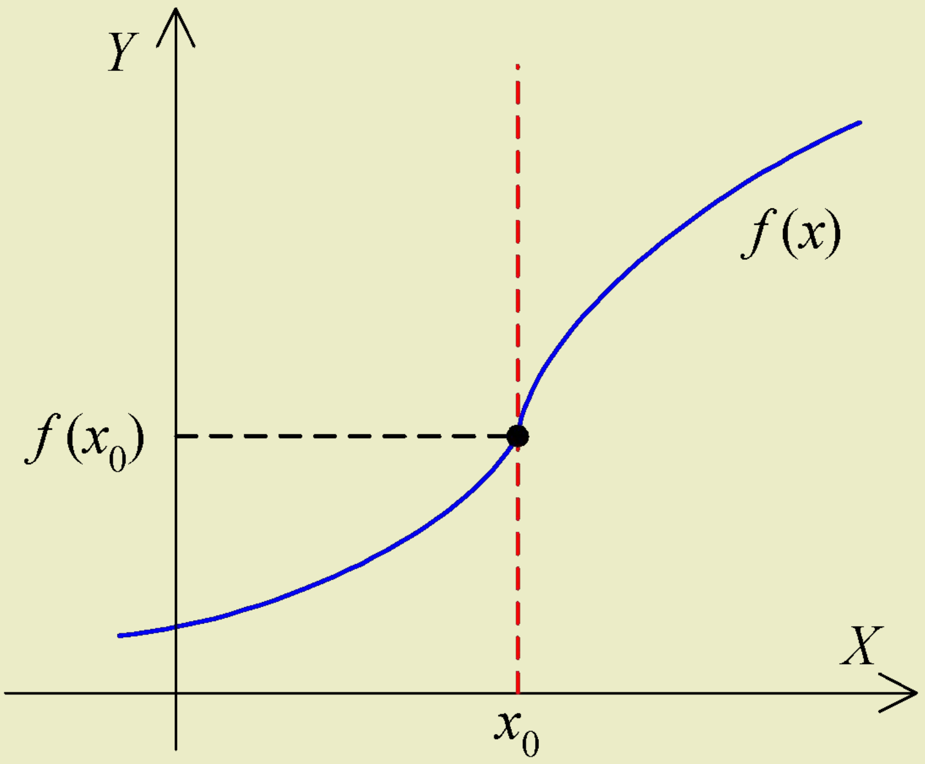
Определение 3:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если её приращение в этой точке есть бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Графическая интерпретация:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Пример 3:

Установить непрерывность или разрывность функции

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -1; \\ x^2+2, & -1<x\le 1; \\ 2x, & x>1. \end{cases}$$

Решение:

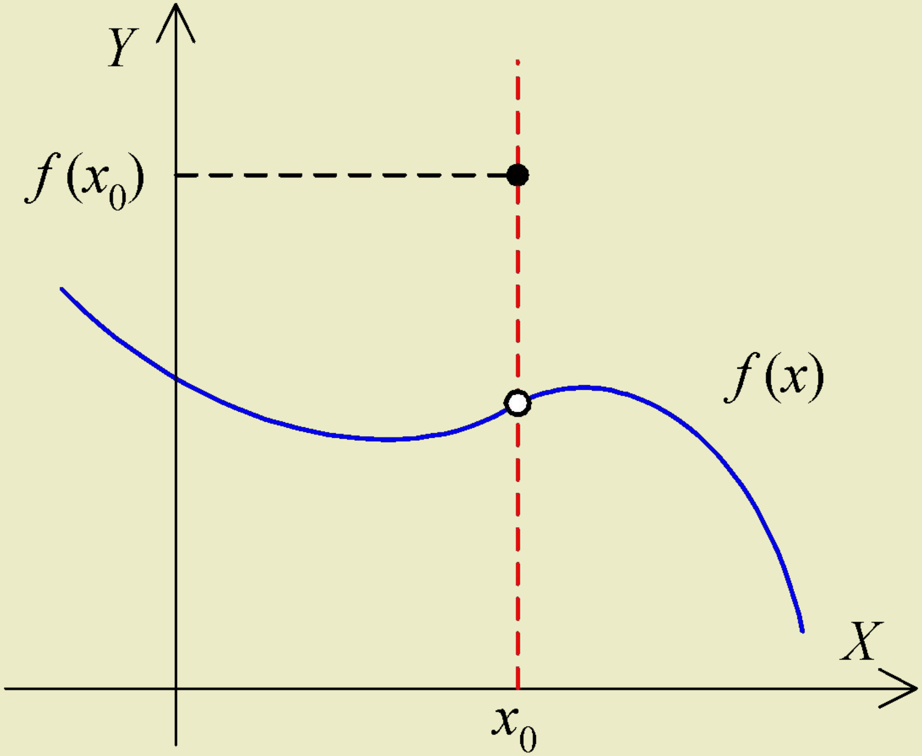
Ответ:

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Классификация точек разрыва

1. Устранимый разрыв

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

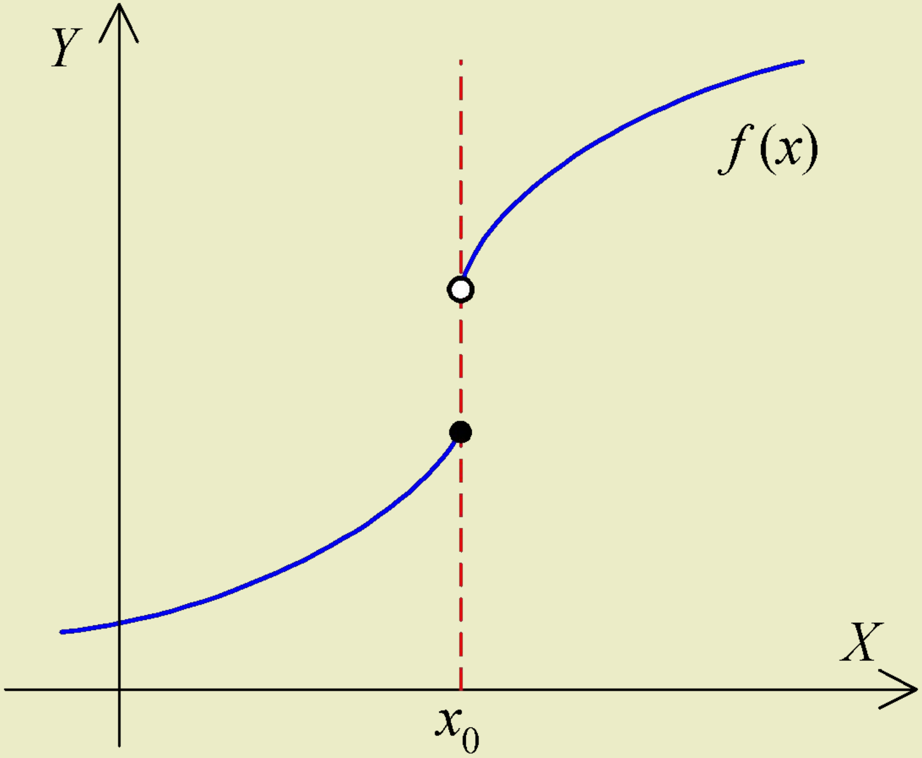


Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Классификация точек разрыва

2. Разрыв 1-го рода

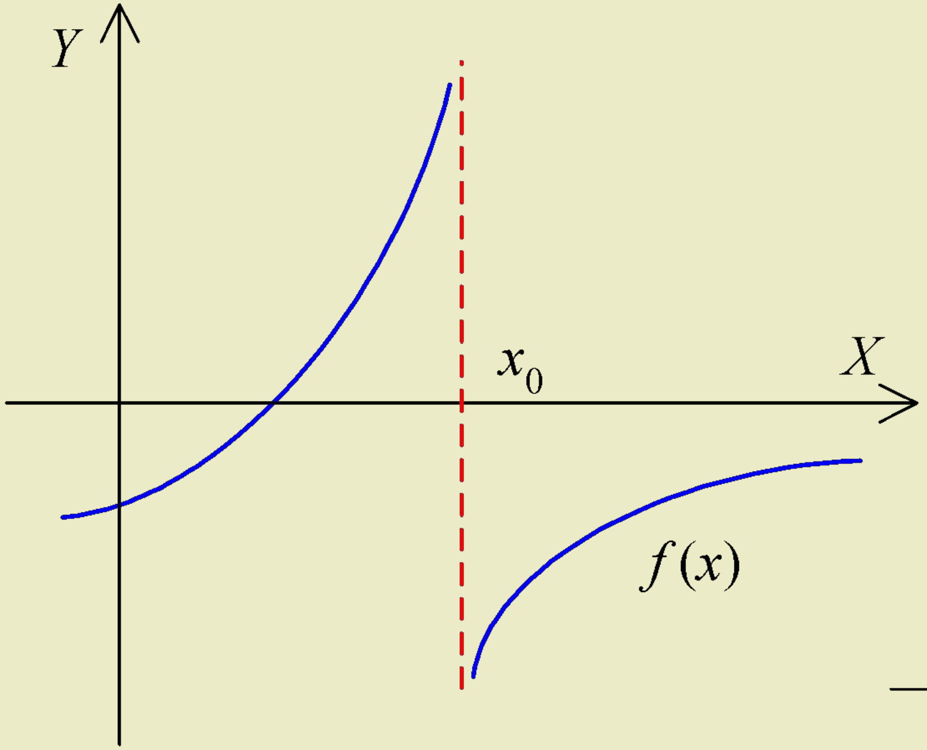
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \text{const}$$

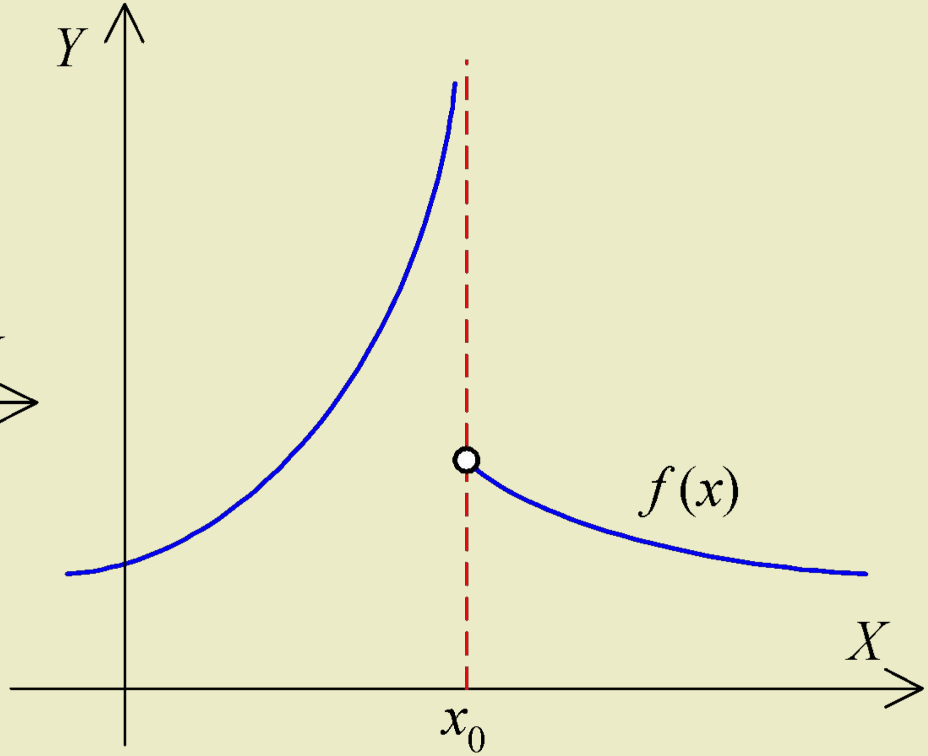


Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Классификация точек разрыва

3. Разрыв 2-го рода





Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Пример 4:

Найти точки разрыва функции и установить их характер

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^3}$$

Решение:

Ответ:

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org