

**О сохранении и нарушении
равносильности**

**при решении уравнений и
неравенств**

Равносильны ли уравнения:

а) $x^2 \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}$ и $x^2 = 1$

Деление не нарушило равносильность

б) $x^2 \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2}$ и $x^2 = 1$

Деление привело к **потере** корня 2 и приобретению **посторонних** корней ± 1

в) $x^2 \sqrt{x+4} = 9\sqrt{x+4}$ и $x^2 = 9$

Деление привело к **потере** корня -4

г) $x^2 \sqrt{x-2} = 4\sqrt{x-2}$ и $x^2 = 4$

Деление привело к приобретению **постороннего** корня -2

Равносильны ли уравнения:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6} = \frac{2x-1}{x-3} \quad \text{и} \quad x^2-x-6 = x-3$$

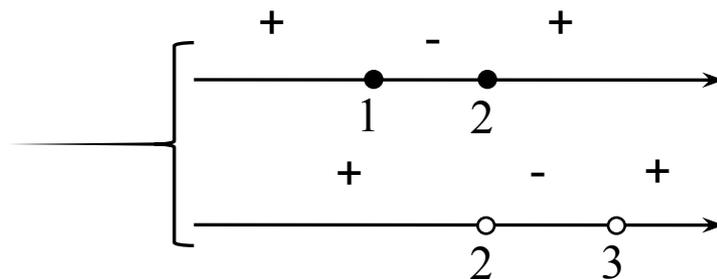
Отбрасывание числителей и уравнивание знаменателей привело к **потере**

корня $\frac{1}{2}$ и приобретению **постороннего** корня 3.

Найдите ошибки в решении неравенства

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases}$$



Ответ: $(2; 3)$.

Найдите ошибки, сделанные в решении уравнения

$$\sqrt{x^4(x-1)} + 2x^2 = 0$$

$$x^2 \sqrt{x-1} + 2x^2 = 0$$

$$x^2 (\sqrt{x-1} + 2) = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Ответ: $x = 0$

Равносильны ли

$$\text{а) } x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2x \quad \text{и} \quad x^2 + 2x = 0$$

$$\text{б) } \frac{1}{x} > 3 \quad \text{и} \quad 1 > 3x$$

$$\text{в) } \frac{1}{x} < 3 \quad \text{и} \quad 1 < 3x$$

$$\text{г) } \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x-3)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} \geq 0$$

$$\text{д) } \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x-3)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} \geq 0$$

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} = \sqrt[3]{2x-1}$$

$$\left(\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$8x + 2 + 3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}\right)} = 2x - 1$$

$$8x + 2 + 3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} = 2x - 1$$

$$3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} = -6x - 3$$

$$\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} = -(2x+1)$$

$$(2x+1) \cdot (6x+1) \cdot (2x-1) = -(2x+1)^3$$

$$(2x+1) \cdot \left((6x+1) \cdot (2x-1) + (2x+1)^2 \right) = 0$$

$$(2x+1) \cdot 16x^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x = 0$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 = 8 \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + 1 = \frac{8}{\operatorname{tg} x}$$

или

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 8 \cdot (1 + \operatorname{tg} x) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) + 1 = 8 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = 8 + 8 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} - \pi k\right) + 1 = 8 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$

$$6 \cdot \operatorname{tg} x = -8$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 8 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$$

$$-1 + 1 = 8 \cdot 0$$

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действия	Используемые математические объекты или процедурные действия	Характер возможного нарушения равносильности
<p>Использование тождеств с разной областью определения левой и правой части.</p>	$(\sqrt{x})^2 = x; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$ $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b;$ $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;$ $\log_c a^b = b \cdot \log_c a; \quad a^{\log_c b} = b;$ $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}; \quad \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$ $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{tg}x = \frac{1}{\operatorname{ctgx}};$ $\operatorname{ctgx} = \frac{1}{\operatorname{tg}x};$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$ $\sin(\arcsin a) = a;$ $\cos(\arccos a) = a.$	<p>В случае расширения ОДЗ возможно приобретение постороннего корня. Достаточна проверка на ОДЗ.</p> <p>В случае сужения ОДЗ возможна потеря корня. Недопустимое действие! Необходим разбор случая тех значений переменной, которые «уходят» из ОДЗ.</p>
<p>Умножение или деление на выражение, содержащее переменную.</p>	<p>Отбрасывание одинаковых знаменателей равных дробей.</p> <p>Отбрасывание одинаковых числителей равных дробей.</p> <p>Сокращение уравнения на один и тот же множитель.</p>	<p>При умножении возможно приобретение постороннего корня. Требуется непосредственная подстановка найденных корней в первоначальное уравнение.</p> <p>При делении возможна потеря корня. Поэтому прежде, чем делить, проверить, не являются ли корнями исходного уравнения числа, обращающие в нуль, удаляемый множитель.</p>

Действия	Используемые математические объекты или процедурные действия	Характер возможного нарушения равносильности
Сокращение дроби		При расширении ОДЗ возможно приобретение постороннего корня. Достаточна проверка на вхождение корня в ОДЗ.
Приведение подобных слагаемых		
Использование функций с ограниченной областью определения	Логарифмирование (функция $y = \log_a x$)	Возможна потеря корня за счёт сужения ОДЗ. Требуется обоснование возможности логарифмирования.
	Потенцирование	Возможно приобретение постороннего корня. Достаточна проверка на вхождение корня в ОДЗ.
	Извлечение корня чётной степени (функции $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[n]{x}$).	Возможна потеря корня за счёт сужения ОДЗ. Требуется обоснование возможности извлечения корня чётной степени.
Использование немонотонных функций	$y = x^2$, $y = x^{2n}$ $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$	Необходима проверка на вхождение корней уравнения в один и тот же промежуток монотонности функции.
Переход к дизъюнкции	Переход от уравнения вида $f(x) \cdot g(x) = 0$ к совокупности $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$	Возможно приобретение посторонних корней. Требуется при найденных корнях существование другого сомножителя. Достаточна проверка на вхождение корня в ОДЗ.
«Обращение себе»	Подстановка в преобразованное уравнение исходного уравнения.	Возможно приобретение посторонних корней. Требуется непосредственная подстановка найденных корней в первоначальное уравнение.

Тождество	Область определения		Замечания
	Левой части	Правой части	
$(\sqrt{a})^2 = a$	$a \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$	
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$ab \geq 0$	$a \geq 0$ и $b \geq 0$	В левой части при $a = 0$ множитель b может быть любым, в то время как в правой части при $a = 0$ он неотрицателен.
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{a}{b} \geq 0$	$a \geq 0$ и $b > 0$	В левой части при $a = 0$ множитель b лишь не равен нулю, в то время как в правой части при $a = 0$ он положителен.
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$	$ab > 0, c > 0, c \neq 1$	$a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$	Левая часть допускает одновременно отрицательные a и b , правая – нет. Существование левой части и одного из логарифмов, стоящих в правой части, гарантирует существование второго логарифма, стоящего в правой части.
$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$	$\frac{a}{b} > 0, c > 0, c \neq 1$	$a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$	
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	$a > 0, b > 0, b \neq 1$	$a > 0, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$	
$\log_c a^b = b \cdot \log_c a$	$a^b > 0, c > 0, c \neq 1$	$a > 0, c > 0, c \neq 1$	Применяя тождество слева направо, необходимо помнить об ограничениях при определении степени.
$a^{\log_a b} = b$	$a > 0, b > 0, a \neq 1$	$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	Применение тождества справа налево позволяет представлять положительное число в виде степени с наперёд заданным положительным основанием.

Тождество	Область определения		Замечания
	Левой части	Правой части	
$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sin \alpha \neq 0$	$\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0$	
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\cos \alpha \neq 0$	$\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0$	
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	$\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$	$\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0,$ $\cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0$	Существование левой части и одного из тангенсов, стоящих в правой части, не гарантирует существование второго тангенса в правой части.
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\cos 2\alpha \neq 0$	$\cos 2\alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0$	При решении задач следует рассмотреть отдельно случай $\cos \alpha = 0$.
$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\cos \alpha \neq 0$	
$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\cos \alpha \neq 0$	
$\sin(\arcsin a) = a$	$a \in [-1; 1]$	$a \in \mathbb{R}$	При решении задач часто используется с полным определением аркфункции: полезно вспомнить, что $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\arccos a \in [0; \pi]$.
$\cos(\arccos a) = a$	$a \in [-1; 1]$	$a \in \mathbb{R}$	