СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина – это числовая характеристика случайного события.

Например, выигрыш в лотерее – случайное событие.

размер выигрыша – случайная величина.

Случайные величины обозначаются греческими буквами:

ξ (кси), η (эта), θ (тета) и так далее,

а их возможные значения – латинскими буквами с индексами: x_i, y_i, z_i.

Например, случайная величина

ξ- «размер выигрыша в лотерее»

может иметь следующие возможные значения:

x_1 = 0 руб.;
x_2 = 10 руб.;
x_3 = 100 руб.;
x_4 = 1000 руб.

Случайные величины делятся на

- дискретные;
- непрерывные.

Случайную величину ξ называют **дискретной**, если множество ее возможных значений образует конечную последовательность чисел. (например, случайная величина ξ - «размер выигрыша в лотерее»)

Непрерывные случайные величины сплошь заполняют некоторый числовой интервал.

Например, время безотказной работы прибора теоретически $[0; ,+\infty)$

Дискретные случайные величины задаются

рядом распределения,

а непрерывные – функцией распределения

Ряд распределения

Ряд распределения ставит в соответствие каждому возможному значению случайной величины x_i соответствующую вероятность p_i.

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$p_i \geq 0$, $i=1, 2, \ldots$ $\sum_i p_i = 1$

Пример 1

Рассмотрим случайную величину ξ - «число гербов, выпавших при подбрасывании монеты **три** раза».

Она может принять четыре значения: **0,1,2,3**.

$P(A_0)=1/8$; $P(A_1)=1/8+1/8+1/8=3/8$;

$P(A_2)= 1/8+1/8+1/8=3/8$; $P(A_3)=1/8$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ

ξ	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Функцией распределения F(x) СВ ξ называется функция действительного аргумента x, определенная на всей числовой оси и равная вероятности того, что СВ ξ примет значение меньше или равное x:

$$F(x)=P\{\xi \le x\}.$$

Пример

Построить функцию распределения числа г
при трех подбрасываниях монеты

ξ	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Решение

$-\infty<x<0$: $F(X)=P(\xi<0)=0$

$0 \le x<1$: $F(X)=P(\xi<1)= P(\xi=0)=1/8$

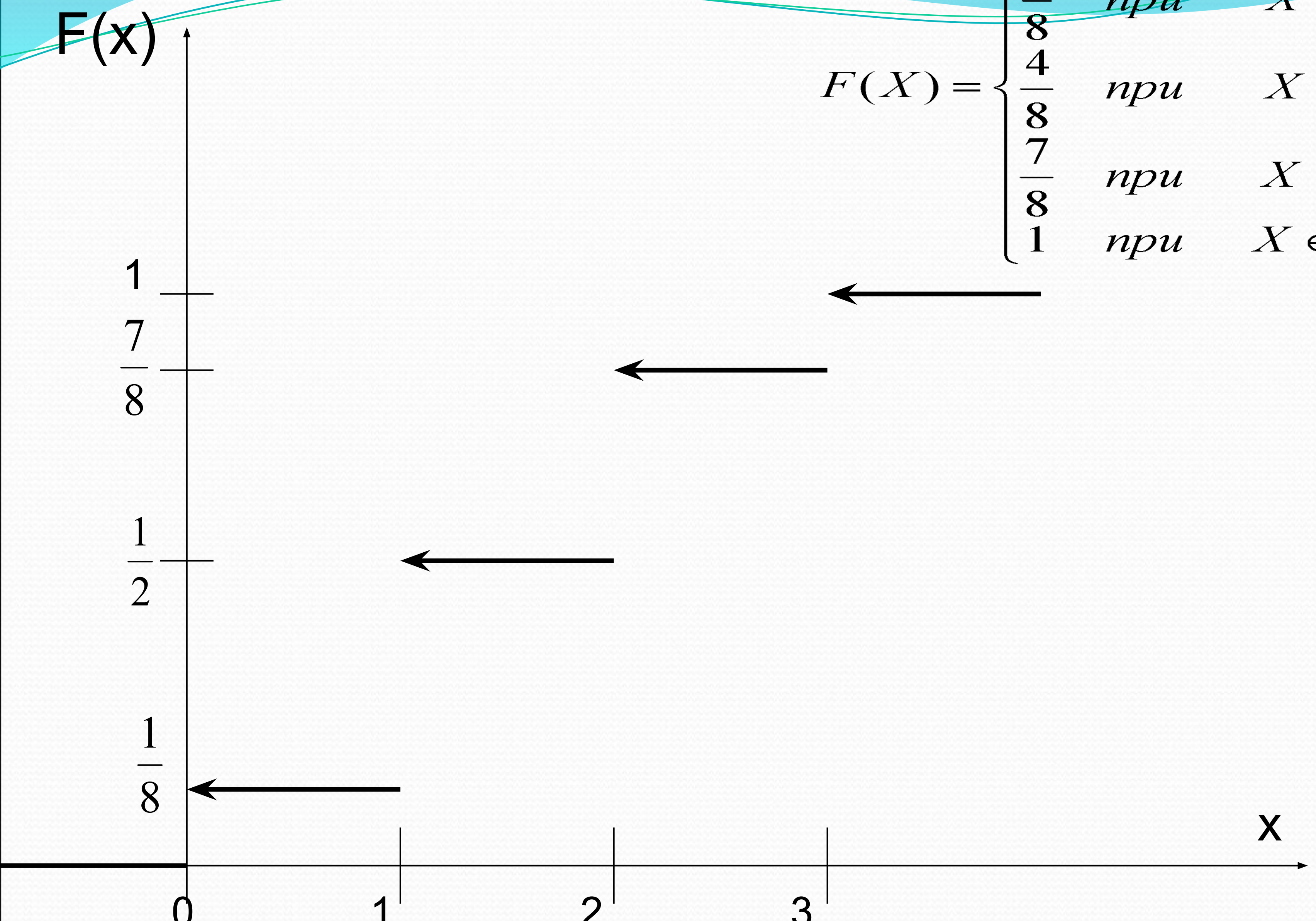
$1 \le x<2$: $F(X)=P(\xi<2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=1/8+3/8=4/8$

$2 \le x<3$: $F(X)=P(\xi<3)= P(\xi=0)+ P(\xi=1)+ P(\xi=2)=$

$=1/8+3/8+3/8=7/8$

График функции распределения F(X)

$$F(X)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad X\in(-\infty;0)\\ \frac{1}{8} & \text{при} \quad X\in[0;1)\\ \frac{4}{8} & \text{при} \quad X\in[1;2)\\ \frac{7}{8} & \text{при} \quad X\in[2;3)\\ 1 & \text{при} \quad X\in[3;\infty)\end{cases}$$



Свойства функции распределения

1) $$0 \le F(x) \le 1$$

2) $F(x)$–неубывающая: если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3) $$F(-\infty) = 0; \qquad F(+\infty) = 1$$

4) Вероятность попадания СВ в интервал $(a,b]$:

$$P\{a < \xi \le b\} = F(b) - F(a)$$

Пример

СВ задана функцией распределения

$$F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad X<0 \\ \dfrac{X}{4} & при \quad 0\le X<4 \\ 1 & при \quad X\ge 4 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате эксперимента случайная величина попадет в интервал (1;3].

$$P\{a<\xi\le b\}=F(b)-F(a)$$

$$P\{1<\xi\le 3\}=F(3)-F(1)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Самостоятельная работа

Задание. Случайная величина задана функцией распределения. Найти вероятность попадания в интервал (1;2].

Функция распределения	Вариант ответа			
	A	B	C	D
$$F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad X<0 \\ \dfrac{X}{2} & при \quad 0\le X<2 \\ 1 & при \quad X\ge 2 \end{cases}$$	1/9	1/3	1/2	1

Сверим ответы?

$$P\{a < \xi \le b\} = F(b) - F(a)$$

У нас a=1; b=2. Тогда

$$P\{1 < \xi \le 2\} = F(2) - F(1) = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad X < 0 \\ \dfrac{X}{2} & \textit{при} \quad 0 \le X < 2 \\ 1 & \textit{при} \quad X \ge 2 \end{cases}$$

Плотность распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x)$$

Справедливо и обратное соотношение:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Свойства плотности распределения вероятностей

1) Для всех x плотность распределения вероятностей неотрицательна

$$f(x) \geq 0$$

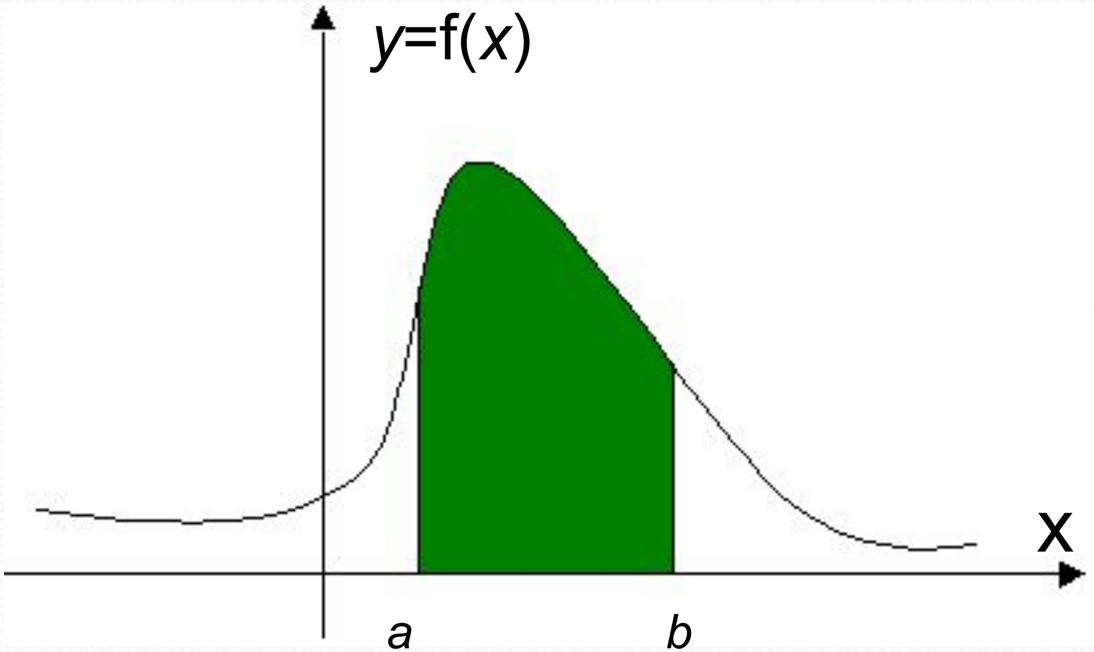
2) Свойство нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

.

3) Вероятность попадания случайной величины в интервал (a;b] равна

$$P\{a < \xi \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

График *y=f(x)* называют кривой распределения



$$P\{a<\xi\le b\}=\int_a^b f(x)dx$$

Пример

Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad X<1 \\ \frac{1}{5} & при \quad 1\le X<6 \\ 0 & при \quad X\ge 6 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате эксперимента случайная величина попадет в интервал (3;5].

$$P\{a<\xi\le b\}=\int_a^b f(x)dx$$

$$P\{3<\xi\le 5\}=\int_3^5\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}\int_3^5 dx=\frac{1}{5}x\Big|_3^5=\frac{1}{5}\cdot 5-\frac{1}{5}\cdot 3=\frac{2}{5}$$

Числовые характеристики СВ

Это числа, полученные по определенным правилам из законов распределения.

Наиболее часто используются:

- Математическое ожидание;
- Дисперсия;
- Среднеквадратическое (стандартное) отклонение.

Математическое ожидание СВ

Характеризует среднее значение СВ

Математическим ожиданием дискретной СВ ξ называется сумма произведений возможных значений x_i на их вероятности p_i

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n$$

Пример

Найти математическое ожидание числа очков при одном подбрасывании игрального кубика.

Решение

1. Строим ряд распределения

ξ	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2. Вычисляем математическое ожидание

$$M(\xi) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n$$

Математическим ожиданием $M(\xi)$ непрерывной случайной величины ξ с плотностью вероятности $f(x)$ называется интеграл

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

,

Пример

Найти математическое ожидание СВ, заданной плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad X < 1 \\ \dfrac{1}{5} & при \quad 1 \le X < 6 \\ 0 & при \quad X \ge 6 \end{cases}$$

Решение

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int_{1}^{6} x\cdot\frac{1}{5}dx+\int_{6}^{+\infty} x\cdot 0dx$$

$$M(\xi)=0+\frac{1}{5}\int_{1}^{6} xdx+0=\frac{1}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^6=\frac{1}{10}\cdot 36-\frac{1}{10\cdot 1}=\frac{36-1}{10}=\frac{35}{10}=3,5$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение определяют средную величину разброса значений СВ относительно математического ожидания

Дисперсией случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата СВ $\xi - M(\xi)$:

$D(\xi)=M[\xi- M(\xi)]^2$ или $D(\xi)=M[\xi- M(\xi)]^2$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$$

Для дискретной СВ дисперсия определяется по формуле

$$D(\xi)=\sum_{i=0}^{n}(x_i-M(\xi))^2 p_i$$ или $$D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\right)^2$$

Дисперсия непрерывной СВ определяется формулой

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_\xi)^2 f(x)dx$$

или

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(M(\xi)\right)^2$$

Пример

Найти дисперсию числа очков при одном подбрасывании кубика.

Решение

ξ	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$M(\xi)=3,5$

$$D(\xi)=\frac{1}{6}[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]-(3,5)^2=$$

$$=\frac{35}{12}=2,9166$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{2,9166}=1,708$$

Пример

Найти дисперсию случайной величины, заданной плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad X<1\\ \dfrac{1}{5} & при \quad 1\le X<6\\ 0 & при \quad X\ge 6\end{cases}$$

Решение

$$M(\xi)=3,5$$

$$\mathrm{D}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi) = \int_{-\infty}^{1} x^2\cdot 0dx+\int_{1}^{6} x^2\cdot\frac{1}{5}dx+\int_{6}^{+\infty} {}^2\cdot 0 \quad -3,5^2=$$

$$=\left.\frac{x^3}{15}\right|_1^6-12,25=\frac{215}{15}-12,25=2,05$$

Основные законы распределения СВ

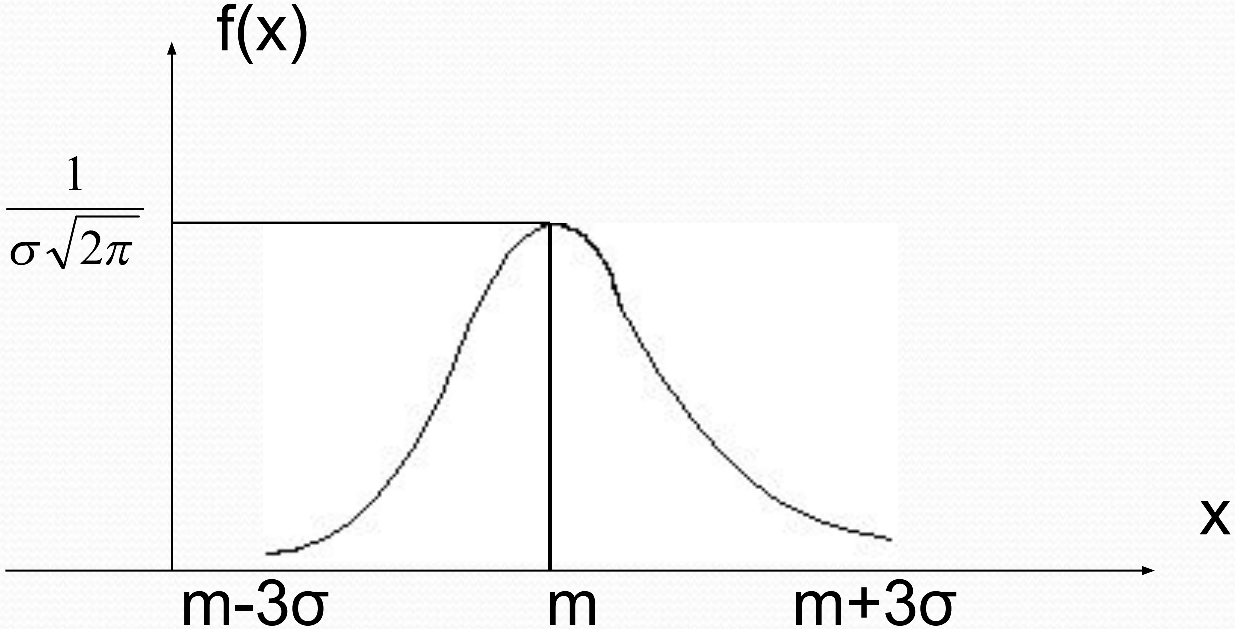
Нормальный закон распределения СВ

Нормальное распределение используется для описания случайных явлений, в которых на результат измерения влияет большое число независимых случайных факторов.

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение, если ее плотность распределения вероятностей при всех x задается равенством

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая вероятности распределения Гаусса (нормального распределения)



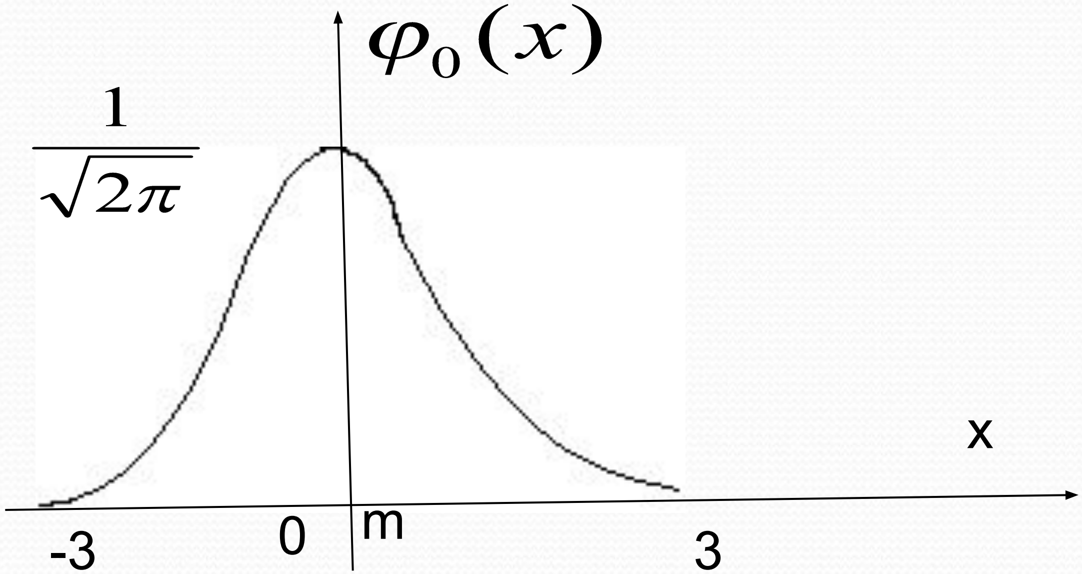
$$f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Затухание кривой происходит по правилу «трех сигм»

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $m=0$, $\sigma=1$.

Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Функцию распределения стандартного нормального закона

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

называют функцией Лапласа

Для функции распределения стандартного нормального закона имеются таблицы значений, которые широко используются в статистических исследованиях

Свойства нормального распределения

$$1.\ F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$2.\ \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$3.\ P\{a < \xi < b\} = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Пример

Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}}$$

Определить: математическое ожидание; дисперсию; стандартное отклонение; вероятность попадания значений случайной величины в интервал (-2;3].

Пример

Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Определить: математическое ожидание; дисперсию; стандартное отклонение; вероятность попадания значений случайной величины в интервал (-2;3].

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}} =$$

Пример

Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{32\pi}}\,e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Определить: математическое ожидание; дисперсию; стандартное отклонение; вероятность попадания значений случайной величины в интервал (-2;3].

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{32\pi}}\,e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}}=\frac{1}{\sqrt{16\cdot 2\pi}}\,e^{\frac{-(x^2-2x+1)}{16\cdot 2}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-(x-1)^2}{2\cdot 4^2}}$$

Пример

Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Определить: математическое ожидание; дисперсию; стандартное отклонение; вероятность попадания значений случайной величины в интервал (-2;3].

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{\frac{-x^2+2x-1}{32}} = \frac{1}{\sqrt{16\cdot 2\pi}} e^{\frac{-(x^2-2x+1)}{16\cdot 2}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{2\cdot 4^2}}$$

M(ξ)=1; σ(ξ)=4; D(ξ)= σ ^{2}=16

$$P\{a \le \xi \le b\} = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

a=-2; *b*=3

$$P\{-2 \le \xi \le 3\} = F(3) - F(-2) = \Phi\left(\frac{3-1}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-2-1}{4}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-3}{4}\right) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.75) = \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.75)$$

$$P\{-2 \le \xi \le 3\} = \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.75) =$$
$$= 0.6915 - 1 + 0.7734 = 0.4649$$

Таблица 3. **Значения нормальной стандартной функции распределения**

x	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)
0	0.5	0.3	0.6179	0.6	0.7257	0.9	0.8159
0.01	0.504	0.31	0.6217	0.61	0.7291	0.91	0.8186
0.02	0.508	0.32	0.6255	0.62	0.7324	0.92	0.8212
0.03	0.512	0.33	0.6293	0.63	0.7357	0.93	0.8238
0.04	0.516	0.34	0.6331	0.64	0.7389	0.94	0.8264
0.05	0.5199	0.35	0.6368	0.65	0.7422	0.95	0.8289
0.06	0.5239	0.36	0.6406	0.66	0.7454	0.96	0.8315
0.07	0.5279	0.37	0.6443	0.67	0.7486	0.97	0.834
0.08	0.5319	0.38	0.648	0.68	0.7517	0.98	0.8365
0.09	0.5359	0.39	0.6517	0.69	0.7549	0.99	0.8389
0.1	0.5398	0.4	0.6554	0.7	0.758	1	0.8413
0.11	0.5438	0.41	0.6591	0.71	0.7611	1.01	0.8438
0.12	0.5478	0.42	0.6628	0.72	0.7642	1.02	0.8461
0.13	0.5517	0.43	0.6664	0.73	0.7673	1.03	0.8485
0.14	0.5557	0.44	0.67	0.74	0.7704	1.04	0.8508
0.15	0.5596	0.45	0.6736	0.75	0.7734	1.05	0.8531
0.16	0.5636	0.46	0.6772	0.76	0.7764	1.06	0.8554
0.17	0.5675	0.47	0.6808	0.77	0.7794	1.07	0.8577
0.18	0.5714	0.48	0.6844	0.78	0.7823	1.08	0.8599
0.19	0.5753	0.49	0.6879	0.79	0.7852	1.09	0.8621
0.2	0.5793	0.5	0.6915	0.8	0.7881	1.1	0.8643
0.21	0.5832	0.51	0.695	0.81	0.791	1.11	0.8665
0.22	0.5871	0.52	0.6985	0.82	0.7939	1.12	0.8686
0.23	0.591	0.53	0.7019	0.83	0.7967	1.13	0.8708

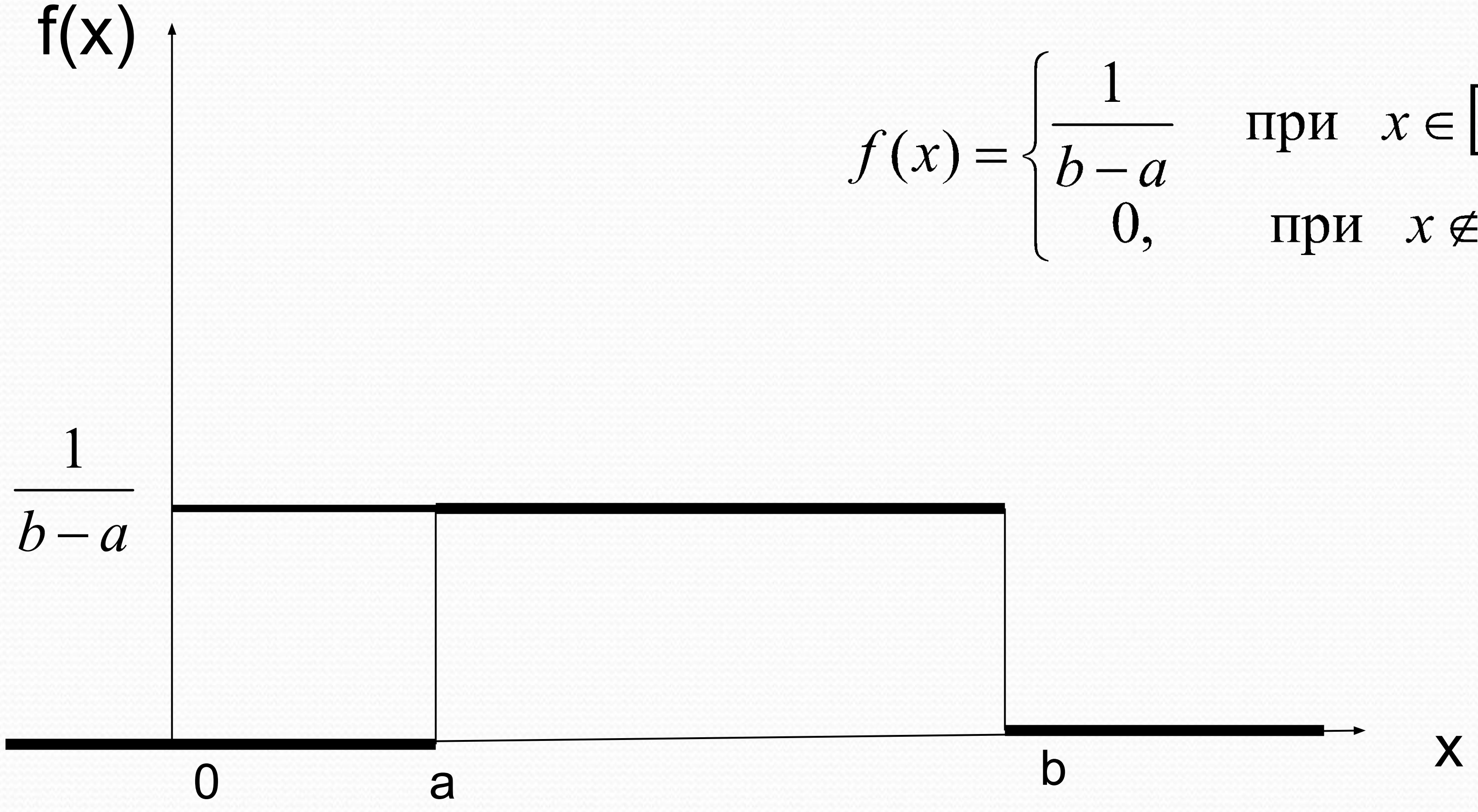
Равномерное распределение

Случайная величина ξ распределена равномерно на промежутке [a,b], если ее плотность распределения вероятностей задается равенством

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x\in[a,b]\\ 0, & \text{при} \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

График f(x)

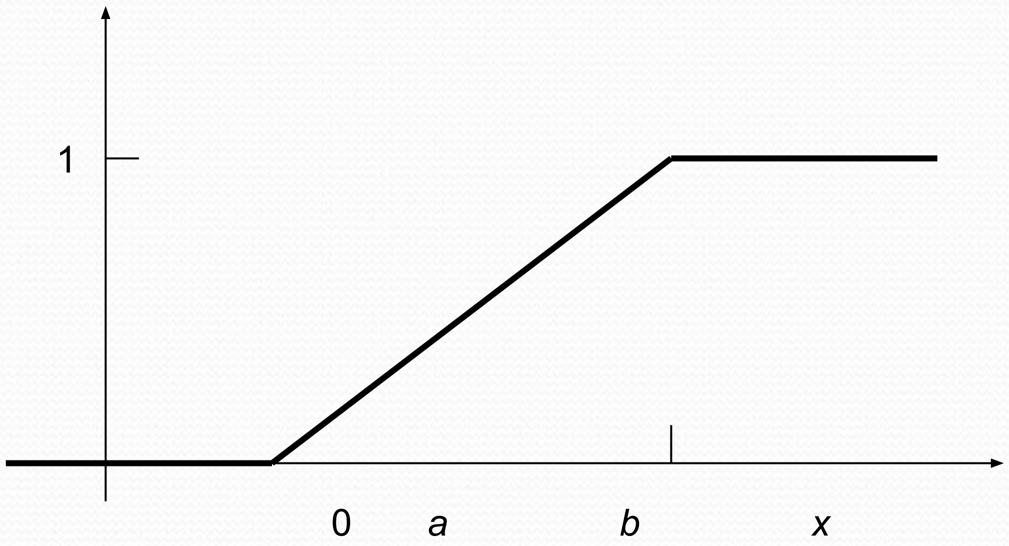
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x\in[a,b]\\ 0, & \text{при} \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$



Функция распределения равномерного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$

График равномерной функции распределения



$$M(\xi)=\frac{a+b}{2}$$

$$D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Биномиальное распределение

Вероятность того, что случайная величина η (число «успехов» при n независимых испытаниях) примет значение m, можно найти по формуле Бернулли

$$P\{\eta = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины η равны

$M(\eta)=n \cdot p$; $D(\eta)=n \cdot p \cdot q$

Пример

В коробку сложили 3 изделия. Вероятность, что изделие - бракованное, равна 0,1.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ - число бракованных изделий в коробке.

Решение

$n=3;\quad p=0,1;\quad q=0,9$

$$M(\eta)=n\cdot p=3\cdot 0,1=0,3$$

$$D(\eta)=n\cdot p\cdot q=3\cdot 0,1\cdot 0,9=0,27$$

$M(\eta)=n\cdot p;$ $\qquad D(\eta)=n\cdot p\cdot q$

Показательное распределение

Случайная величина ξ имеет ***показательное распределение с параметром*** $\lambda > 0,$

если ее плотность распределения вероятностей задается равенством

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0 \\ 0, \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Пример

Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}. \end{cases}$$

Математическое ожидание этой случайной величины равно 0,2, дисперсия равна 0,04.

Найти параметр λ .

Решение

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

Проверка

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} = 0{,}04 = \frac{1}{25} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$$