

МБОУ «Лицей» г. Арзамас
МКУ ГИМК

Теория и практика решения задания 18 ЕГЭ по информатике

Автор:

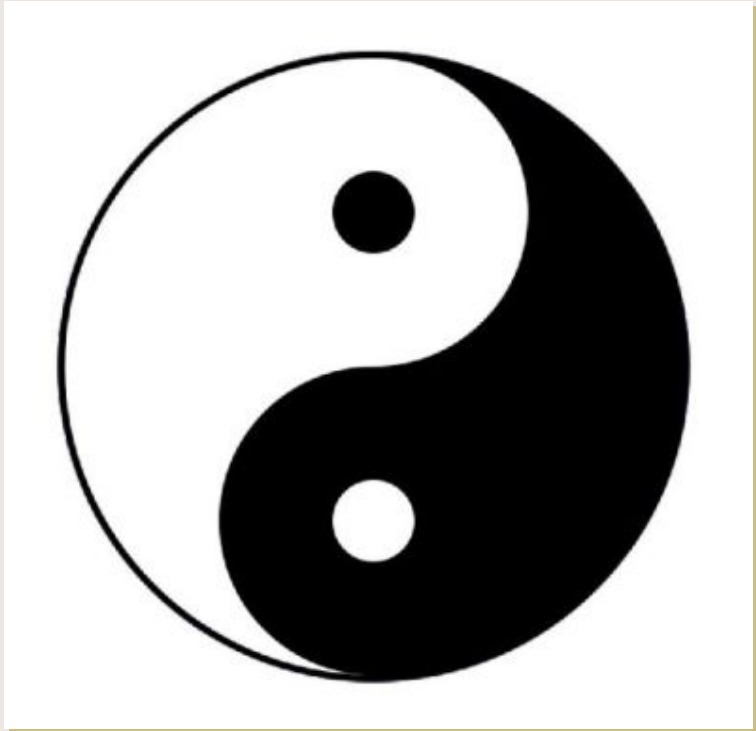
учитель информатики МБОУ «Лицей»
первой квалификационной категории
Мурзина Ольга Ивановна

Арзамас, 2017

Мнемоническое правило

Соционика – это
информационная психология

Один из ее главных принципов –
дополнение до целого
(дополнение противоположностью)



Решающая формула

В алгебре логики есть формула дополнения до целого:

$$A \vee \neg A = 1$$

В некоторых задачах мы будем использовать вместо этой формулы умножение противоположностей:

$$A \wedge \neg A = 0$$

Типы задания 18

1. Задания на отрезки
2. Задания на множества
3. Задания на поразрядную
конъюнкцию
4. Задания на условие делимости

Задания на отрезки

(№ 376) На числовой прямой даны два отрезка: $P=[4,15]$ и $Q=[12,20]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что формула $((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$ тождественно истинна, то есть принимает значение **1** при любом значении переменной x .

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решающая формула

Для выбора решающей формулы важно внимательно прочитать требование задачи.

В нашей задаче в требовании сказано:

принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Выбор решающей формулы очевиден:

$$A \vee \neg A = 1$$

Решение задачи на отрезки

Разделим решение задачи на этапы:

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на отрезки

1) *Легенда* – это удобные нам условные обозначения, которые мы будем использовать при решении.

Введем следующие обозначения:

$$P = x \in P$$

$$Q = x \in Q$$

$$A = x \in A$$

Решение задачи на отрезки

2) *Формализация условия* –
перепишем формулу из условия
задачи в соответствие с легендой.

Было:

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A) \\ = 1$$

Стало:

$$(P \wedge Q) \rightarrow A = 1$$

Решение задачи на отрезки

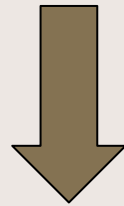
3) *Решение логического уравнения* – вначале это, возможно, самый сложный этап в решении задачи. Но позже, при накоплении опыта, он уже не будет казаться таким уж сложным 😊

Рассмотрим решение логического уравнения по шагам.

Решение задачи на отрезки

3.1. Представим логическое следование в базовых логических операциях по формуле: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$:

$$(P \wedge Q) \rightarrow A = 1$$



$$\neg(P \wedge Q) \vee A = 1$$

Решение задачи на отрезки

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле: $A \vee \neg A = 1$ (в алгебре логики справедлив закон коммутативности, т.е. $A \vee \neg A = \neg A \vee A$):

$$\neg(P \wedge Q) \vee A = 1, \text{ отсюда}$$

$$\neg A = \neg(P \wedge Q)$$

Ответом в логическом уравнении будет:

$$A = P \wedge Q.$$

Решение задачи на отрезки

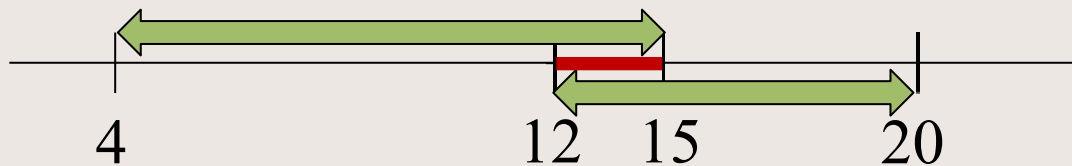
4) *Интерпретация полученного результата.*

Наш ответ: $A = P \wedge Q$.

В алгебре логики это выражение означает пересечение объемов двух логических объектов. По условию нашей задачи – это пересечение отрезков P и Q .

Решение задачи на отрезки

Пересечение отрезков **P** и **Q** можно визуализировать: $P=[4,15]$ и $Q=[12,20]$.



По условию нашей задачи, нам нужна **минимальная длина отрезка A.**

Находим ее: **$15 - 12 = 3$.**

Ответ: **3.**

Ответ на сайте Полякова К.Ю.: 3

Задания на отрезки

(№ 360) На числовой прямой даны три отрезка: $P=[10,25]$, $Q=[15,30]$ и $R=[25,40]$. Какова максимальная длина отрезка A , при котором формула $((x \in Q) \rightarrow (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x ?

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решающая формула

Для выбора решающей формулы важно внимательно прочитать требование задачи.

В нашей задаче в требовании сказано:

принимает значение 0 при любом значении переменной x .

Выбор решающей формулы очевиден:

$$A \wedge \neg A = 0$$

Решение задачи на отрезки

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на отрезки

1) *Легенда*

$$\mathbf{R = x \in R}$$

$$\mathbf{Q = x \in Q}$$

$$\mathbf{A = x \in A}$$

$$\mathbf{P = x \in P}$$

Решение задачи на отрезки

2) Формализация условия

Было:

$$((x \in Q) \rightarrow (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P) = 0$$

Стало:

$$(Q \rightarrow \neg R) \wedge A \wedge \neg P = 0$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$(Q \rightarrow \neg R) \wedge A \wedge \neg P = 0$$

3.1. Представим логическое следование в базовых логических операциях по формуле: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$, и переставим множители согласно закону коммутативности умножения:

$$A \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P = 0$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$A \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P = 0$$

3.2. Сведем получившееся выражение к

решающей формуле: $A \wedge \neg A = 0$ и

найдем, чему равно $\neg A$:

$$\neg A = (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$\neg A = (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P$$

3.3. Упростим выражение для $\neg A$ по закону де Моргана $\neg A \vee \neg B = \neg(A \wedge B)$:

$$\neg A = \neg(Q \wedge R) \wedge \neg P,$$

и по другому закону де Моргана

$$\neg A \wedge \neg B = \neg(A \vee B):$$

$$\neg A = \neg(Q \wedge R \vee P)$$

Решение задачи на отрезки

3) *Решение логического уравнения*

$$\neg A = \neg (Q \wedge R \vee P)$$

3.4. Очевидно, что

$$A = Q \wedge R \vee P$$

Решение задачи на отрезки

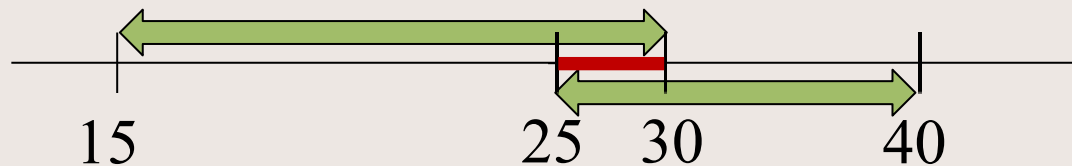
4) *Интерпретация полученного результата*

$$A = Q \wedge R \vee$$

Отрезок A – это пересечение отрезков Q и R и его объединение с отрезком R .

Решение задачи на отрезки

Пересечение отрезков **R** и **Q** можно визуализировать: $Q=[15,30]$ и $R=[25,40]$.



Отрезок $P=[10,25]$ нанесем на наш чертеж и объединим с пересечением:



Решение задачи на отрезки

$$A = Q \wedge R \vee$$



По условию нашей задачи, нам нужна **максимальная длина отрезка А.**

Находим ее: **$30 - 10 = 20$.**

Ответ: **20.**

Ответ на сайте Полякова К.Ю.: 20

2. Задания на множества

(№ 386) Элементами множеств A , P , Q являются натуральные числа, причём $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{3, 5, 15\}$. Известно, что выражение

$(x \notin A) \rightarrow ((x \notin P) \wedge (x \in Q)) \vee (x \notin Q)$
истинно (т.е. принимает значение 1 при любом значении переменной x).

Определите наименьшее возможное количество элементов в множестве A .

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на множества

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на множества

1) *Легенда*

$$A = x \in A$$

$$P = x \in P$$

$$Q = x \in Q$$

Решение задачи на множества

2) Формализация условия

Было:

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \notin P) \wedge (x \in Q)) \vee (x \notin Q) = 1$$

Стало:

$$\neg A \rightarrow (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q = 1$$

Решение задачи на множества

3) *Решение логического уравнения*

$$\neg A \rightarrow (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q = 1$$

3.1. Представим логическое следование в базовых логических операциях и сгруппируем:

$$A \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) = 1$$

Решение задачи на множества

$$A \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) = 1$$

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле:

$$A \vee \neg A = 1$$

и найдем, чему равно $\neg A$:

$$\neg A = (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$$

3.3. Упростим выражение для $\neg A$,
раскрыв скобки по закону
дистрибутивности сложения:

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$Q \vee \neg Q = 1$$

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q)$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q)$$

По закону де Моргана:

$$\neg A = \neg(P \wedge Q)$$

3.4. Очевидно, что

$$A = P \wedge Q$$

Решение задачи на множества

$$A = P \cap Q$$

4) *Интерпретация полученного результата*

Искомое множество A представляет собой пересечение множеств P и Q .

Решение задачи на множества

Искомое множество A есть
пересечение множеств

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $Q = \{3, 5, 15\}$,

таким образом $A = \{3, 5\}$

и содержит только 2 элемента.

Ответ: 2

Ответ на сайте Полякова: 2

2. Задания на множества

(№ 368) Элементами множеств A , P , Q являются натуральные числа, причём $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $Q = \{4, 8, 12, 116\}$.

Известно, что выражение

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge (x \notin A)) \rightarrow (x \notin P))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Определите наименьшее возможное значение **суммы элементов множества**

A .

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на множества

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на множества

1) *Легенда*

$$A = x \in A$$

$$P = x \in P$$

$$Q = x \in Q$$

Решение задачи на множества

2) *Формализация условия*

Было:

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge (x \notin A)) \rightarrow (x \notin P)) = 1$$

Стало:

$$P \rightarrow ((Q \wedge \neg A) \rightarrow \neg P) = 1$$

Решение задачи на множества

3) *Решение логического уравнения*

$$P \rightarrow ((Q \wedge \neg A) \rightarrow \neg P) = 1$$

3.1. Представим первое логическое следование (в скобках) в базовых логических операциях :

$$P \rightarrow (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) = 1$$

Решение задачи на множества

$$P \rightarrow (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) = 1$$

Представим второе логическое следование в базовых логических операциях, применим закон де Моргана и перегруппируем:

$$\neg P \vee (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) = 1$$

$$\neg P \vee \neg Q \vee \neg \neg A \vee \neg P = 1$$

Решение задачи на множества

$$A \vee (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) = 1$$

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле:

$$A \vee \neg A = 1$$

и найдем, чему равно $\neg A$:

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P)$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

3.3. Упростим выражение для $\neg A$
по формуле $A \vee \neg A = A$:

$$\neg A = \neg P \vee \neg Q$$

Далее, по закону де Моргана
получаем:

$$\neg A = \neg(P \wedge Q)$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = \neg(P \wedge Q)$$

3.4. Очевидно, что

$$A = P \wedge Q$$

4) *Интерпретация*

полученного результата

Искомое множество **A** представляет собой пересечение множеств **P** и **Q**.

Решение задачи на множества

Искомое множество A есть
пересечение множеств

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ и}$$

$$Q = \{4, 8, 12, 16\}, \text{ таким образом}$$

$$A = \{4, 8, 12\}$$

и содержит только 3 элемента, сумма
которых $4+8+12=24$.

Ответ: **24** *Ответ на сайте Полякова: 24*

3. Задания на поразрядную КОНЪЮНКЦИЮ

(№ 379) Обозначим через $m \& n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n . Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула $(x \& 29 \neq 0) \rightarrow ((x \& 12 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$ тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

1. Легенда

Легенда для задач на поразрядную конъюнкцию отличается от всех остальных случаев:

$$B = (x \& 29 \neq 0)$$

$$C = (x \& 12 \neq 0)$$

$$A = (x \& A \neq 0)$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

Мы принимаем за истинное высказывание поразрядную конъюнкцию, отличную от нуля, иначе поразрядная конъюнкция теряет свой логический смысл, т.к. всегда можно представить X всеми нулями.

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

2) Формализация условия

Было:

$$(x \& 29 \neq 0) \rightarrow ((x \& 12 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0)) = 1$$

Стало:

$$B \rightarrow (\neg C \rightarrow A) = 1$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

3) Решение логического уравнения

$$B \rightarrow (\neg C \rightarrow A) = 1$$

$$B \rightarrow (C \vee A) = 1$$

$$(\neg B \vee C) \vee A = 1$$

$$\neg A = \neg B \vee C$$

$$\neg A = \neg(B \wedge \neg C)$$

Очевидно, что

$$A = B \wedge \neg C$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

4) *Интерпретация полученного
результата*

Искомое двоичное значение
поразрядной конъюнкции **A** – это
двоичное значение пора­зрядной
конъюнкции значения **B** и инверсии
двоичного значения **C**.

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

$$B = (x \& 29 \neq 0)$$

$$B \text{ или } 29 = 11101_2$$

$$C = (x \& 12 \neq 0)$$

$$12 = 1100_2$$

$$\neg C \text{ или инверсия } 12 = 0011_2$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

$$В \text{ или } 29 = 11101_2$$

$$\neg C \text{ или инверсия } 12 = 0011_2$$

$$A = B \wedge \neg C$$

$$\begin{array}{r} \times 11101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$10001_2$$

$$A = 10001_2 = 17$$

*Ответ на
сайте*

Полякова:

17

3. Задания на поразрядную КОНЪЮНКЦИЮ

(№ 375) Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение $(X \& 49 \neq 0) \rightarrow ((X \& 33 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$ тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

- 1) Легенда**
- 2) Формализация условия**
- 3) Решение логического уравнения**
- 4) Интерпретация полученного результата**

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

1) Легенда

Легенда для задач на поразрядную конъюнкцию отличается от всех остальных случаев:

$$B = (x \& 49 \neq 0)$$

$$C = (x \& 33 \neq 0)$$

$$A = (x \& A \neq 0)$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

2) *Формализация условия*

Было:

$$(X \& 49 \neq 0) \rightarrow ((X \& 33 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0)) = 1$$

Стало:

$$B \rightarrow (\neg C \rightarrow A) = 1$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

3) *Решение логического уравнения*

$$B \rightarrow (\neg C \rightarrow A) = 1$$

$$B \rightarrow (C \vee A) = 1$$

$$(\neg B \vee C) \vee A = 1$$

$$\neg A = (\neg B \vee C)$$

Очевидно:

$$A = B \wedge \neg C$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

4) *Интерпретация полученного
результата*

Искомое двоичное значение
поразрядной конъюнкции **A** – это
двоичное значение пора­зрядной
конъюнкции значения **B** и инверсии
двоичного значения **C**.

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

$$B = (x \& 49 \neq 0)$$

$$B \text{ или } 49 = 110001_2$$

$$C = (x \& 33 \neq 0)$$

$$33 = 100001_2$$

$$\neg C \text{ или инверсия } 33 = 011110_2$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

$$В \text{ или } 49 = 110001_2$$

$$\neg C \text{ или инверсия } 33 = 011110_2$$

$$A = B \wedge \neg C$$

$$\begin{array}{r} \times 110001_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{011110}_2$$

$$010000_2$$

$$A = 10000_2 = 16$$

*Ответ на
сайте*

Полякова:

16

4. Задания на условие делимости

(№ 372) Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)? - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на условие делимости

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) **Интерпретация полученного результата**

Решение задачи на условие делимости

1) Легенда

Легенда простая:

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A)$$

$$21 = \text{ДЕЛ}(x, 21)$$

$$35 = \text{ДЕЛ}(x, 35)$$

Решение задачи на условие делимости

2) Формализация условия

Было:

$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}$

$(x, 35))$
тождественно истинна (то есть принимает значение 1)

Стало:

$$\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35) =$$

1

Решение задачи на условие делимости

3) *Решение логического уравнения*

$$\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35) = 1$$

$$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35) = 1$$

$$\neg A = \neg 21 \wedge \neg 35$$

Очевидно, что

$$A = 21 \vee 35$$

Решение задачи на условие делимости

4) *Интерпретация полученного результата*

$$A = 21 \vee 35$$

В данной задаче это самый сложный этап решения. Нужно понять, что же представляет из себя число A – НОК или НОД или ...

Решение задачи на условие делимости

4) *Интерпретация полученного результата*

$$A = 21 \vee 35$$

Итак, наше число A таково, что X делится на него без остатка, тогда и только тогда, когда X делится без остатка на 21 или на 35. В этом случае ищем

$$A = \text{НОД}(21, 35) = 7$$

*Ответ на сайте
Полякова: 7*

4. Задания на условие делимости

(№ 370) Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула $\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow ((\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на условие делимости

- 1) Легенда
- 2) Формализация условия
- 3) Решение логического уравнения
- 4) **Интерпретация полученного результата**

Решение задачи на условие делимости

1) *Легенда*

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A)$$

$$6 = \text{ДЕЛ}(x, 6)$$

$$4 = \text{ДЕЛ}(x, 4)$$

Решение задачи на условие делимости

2) Формализация условия

Было:

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow ((\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1

Стало:

$$\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4) = 1$$

Решение задачи на условие делимости

3) *Решение логического уравнения*

$$\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4) = 1$$

$$\neg A \rightarrow (\neg 6 \vee \neg 4) = 1$$

$$A \vee (\neg 6 \vee \neg 4) = 1$$

$$\neg A = \neg 6 \vee \neg 4$$

Очевидно:

$$A = 6 \wedge 4$$

Решение задачи на условие делимости

4) *Интерпретация полученного результата*

$$A = 6 \wedge 4$$

Итак, A таково, что X делится на него без остатка тогда и только тогда, когда X делится без остатка и на 6, и на 4. Т.е. $A = \text{НОК}(6, 4) = 12$

Ответ на сайте Полякова: 12

Рефлексия

Оцените, пожалуйста, свой уровень понимания, достигнутый на занятии, по шкале от 0 до 10.

Сможете ли Вы теперь объяснить решение задания 18 своим ученикам или друзьям?

(да, нет, не знаю).

A spiral-bound notebook with a brown cover and a white page. The spiral binding is on the left side. The text "Спасибо за внимание!" is written in the center of the page in a bold, black, serif font. A thin horizontal line is drawn across the page, just above the text.

Спасибо за внимание!