Математика абитуриенту

Использование интерактивных учебников для подготовки к экзаменам

Авторы:
Петрякова Ирина Михайловна - учитель математики МОУ «Белозерская средняя общеобразовательная школа»
Конева Надежда Валентиновна - учитель математики МОУ «Памятинская средняя общеобразовательная школа»

Пояснительная записка

Настоящий курс предназначен для учащихся 10-11 классов средней общеобразовательной школы, интересующихся математикой, желающих расширить и укрепить свои знания в этой области. Данный курс позволяет развивать интеллектуальные и творческие способности учащихся, учит логически мыслить; позволяет максимально увеличить самостоятельную и индивидуальную работу учащихся по предмету; способствует выработке и закреплению навыков работы на компьютере.

Курс разработан на 68 часов и предполагает знакомство с теорией и практикой реализации рассматриваемых в модулях тем. В процессе изучения данного элективного курса предполагается использование различных методов активизации познавательной деятельности школьников, а также различных форм организации их самостоятельной работы; практикумов, семинаров, дидактических игр. Результатом освоения программы курса является представление школьниками творческой индивидуальной работы на итоговом занятии.

В этом элективном курсе расширяются базовые знания по математике. Здесь рассматривается теорема Безу, и теорема о целых корнях с целыми коэффициентами, которые дают возможность учащимся обосновать решение некоторых уравнений высших степеней. Решаются задачи на движение, смеси, работу; нестандартные задачи на использование различных свойств функций и более сложные логические задачи.

Цель курса:

- Углубление и расширение знаний учеников и развитие их творческих способностей на основе использования интерактивных учебников.

Задачи курса:

- Умение самостоятельно формировать теоретические знания
- Сформировать умения и навыки при работе с интерактивными учебниками.
- Сформировать практические умения при выполнении творческих работ.

Тематическое планирование

№ п/п	Тема занятий	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практика
	Вводное занятие	1		1
1	**Уравнения и неравенства**	12	1,5	10,5
1.1	Уравнения и неравенства с модулем	2	0,5	1,5
1.2	Уравнения высших степеней	2	0,5	1,5
1.3	Уравнения и неравенства с радикалами	2	0,5	1,5
1.4	Квадратные уравнения с параметрами	1		1
1.5	Расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от параметра	1		1
1.6	Сложные системы уравнений	2		2
1.7	Защита творческих работ	1		1
2	**Способы решения тригонометрических уравнений и неравенств**	11	1,5	9,5
2.1	Сведение к квадратному уравнению	1	0,5	0,5
2.2	Группировка и разложение на множители	1		1
2.3	Сведение к однородным уравнениям	1		1
2.4	Преобразование суммы в произведение и произведение в суммы	1		1
2.5	Метод вспомогательного уравнения	2	0,5	1,5
2.6	Системы тригонометрических уравнений	2		2
2.7	Обратные тригонометрические функции	2	0,5	1,5
2.8	Защита творческих работ	1		1

№ п/п	Тема занятий	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практика
3	**Уравнения и неравенства для абитуриентской подготовки.**	9	3	6
3.1	Показательные уравнения и неравенства	2	1	1
3.2	Логарифмические неравенства	2	1	1
3.3	Смешанная тригонометрия	2	1	1
3.4	Задачи, содержащие одновременно логарифмы, модули, радикалы.	2		2
3.5	Защита творческих работ	1		1
4	**Текстовые задачи**	17	1,5	15,5
4.1	Движение	1		1
4.2	Работа	1		1
4.3	Смеси	2	0,5	1,5
4.4	Оптимальный выбор и целые числа	2		2
4.5	Прогрессии	3		3
4.6	Системы уравнений и неравенств, возникающие из текстовых задач	2		2
4.7	Логические задачи. Необходимость и достаточность.	3	1	2
4.8	Более сложные логические задачи	2		2
4.9	Защита творческих работ	1		1

№ п/п	Тема занятий	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практика
5	**Начала анализа**	**9**	**3**	**6**
5.1	Вычисление производной	1		1
5.2	Применение производной	3	1	2
5.3	Касательная к графику функции	2	1	1
5.4	Плоские множества	2	1	1
5.5	Зачётная работа	1		1
6	**Нестандартные задачи**	**9**	**4**	**5**
6.1	Метод Мажорант	2	1	1
6.2	Использование различных свойств функций	2	1	1
6.3	Удачная подстановка или группировка	2	1	1
6.4	Геометрический подход	2	1	1
6.5	Защита рефератов	1		1
	Тестирование	**2**		**2**
	Всего	**68**	14,5	**53,5**

Содержание

Вводное занятие: Тестирование
«Решение простейших уравнений и неравенств» (линейные, квадратные, дробно – рациональные)

1. Простейшие уравнения и неравенства

1.1 Повторение определения модуля. Графический смысл модуля. Решение простейших уравнений и неравенств с модулем.

1.2 Метод замены переменной. Деление многочлена на многочлен уголком. Теорема Безу. Формула Кардано. Кратные корни.

1.3 Возведение уравнения в чётную степень. Умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с параметром.

1.4 Понятие параметра, допустимых значений параметра на примере квадратного уравнения.

1.5 Расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от параметра. Оба корня больше, меньше, оба корня на интервале, число между корнями.

1.6 Определители и матрицы второго и третьего порядка. Теорема Кратера. Метод Гаусса.

Темы для творческих работ

1. Метод неопределённных коэффициентов
2. Теорема Безу
3. Теорема Виета для уравнений третьей и четвёртой степени
4. Кубическое уравнение. Формула Кардано
5. Деление уголком многочлена на многочлен
6. Сравнение чисел
7. График дробно – линейной функции
8. Равносильность систем. Метод Гаусса.

Интерактивные учебники по математике

- Электронный учебник – справочник Алгебра 7-11
- Математика абитуриенту
- Математика 5-11 классы. Практикум
- Математика часть 1
- Сдаем Единый экзамен

Перечень учебников по математике

Для удобства дальнейших ссылок приведем списки всех учебников, включенных в Федеральный перечень учебников для общеобразовательных школ (2002 г.).

Учебнике по математике для основной школы (7-9 кл.)

- [А1-7(8,9)] «Алгебра, 7(8,9)», авт. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И. Нешков, С.Б.Суворова.
- [А2-7(8,9)] «Алгебра, 7(8,9)», авт. Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров и др.
- [М1-7(8,9)] «Математика, 7(8,9)», авт. Г.В.Дорофеев, С.Б.Суворова, Е.А.Бунимович и др.
- [А3-7,8,9] «Алгебра, 7(8,9)», авт. К.С.Муравин, Г.К.Муравин, Г.В.Дорофеев.
- [А4-7,8,9] «Алгебра, 7(8,9)», авт. А.Г.Мордкович.
- [А5-7,8,9] «Алгебра, 7(8,9)», авт. С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин

Учебники по алгебре и началам анализа для средней школы (10-11 кл.)

- [АА1-10/11] «Алгебра и начала анализа, 10-11», авт. А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П. Дудницин и др.
- [АА2-10/11] «Алгебра и начала анализа, 10-11», авт. Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В. Сидоров и др.
- [АА3-10/11] «Алгебра и начала анализа, 10-11», авт. М.И.Башмаков.

Решение уравнений с параметрами

Определение:

Равенство вида $f(x, a) = h(x, a)$ называется уравнением с параметром a относительно переменной x.

Пример.

$3(x - a) = \sqrt{x - 4}$ - уравнение с параметром.

Определение:

Линейным уравнением с параметром p называется уравнение вида: $a(p)x + b(p) = 0$,

где a и b - некоторые выражения от одной переменной.

Пример.

$3ax - 2 + a^2 = 0$ - линейное уравнение с параметром a относительно переоменной x.

Определение:

Квадратным уравнением с параметром a называется уравнение вида

$Ax^2 + Bx + C = 0$, где $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ - некоторые выражения от переменной a.

Пример.

Уравнение $ax^2 - (2a - 1)x - 3a + 2 = 0$ является квадрат- ным уравнением с параметром a относительно переменной x.

Пример

Пример:

Решите уравнение с параметром a:

$$(a-2)x^2-(2a-3)x+a-2=0$$

Ответ: при $a=2$ $x=0$;

при $a=\frac{7}{4}$ $x=\frac{2a-3}{2(a-2)}$;

при $a>\frac{7}{4}; a\neq 2$ $x=\frac{2a-3\pm\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$;

при прочих a решений нет.

Задания для самостоятельного обучения

Найдите наименьшее целое положительное значение параметра a, при котором неравенство $-x^2 - 2x + 3 < |x - a|$ не имеет решений.

Ответ: $a = \square$.

При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 2\cdot x - 3| = a$ имеет три решения?

Ответ: $a = \square$.

При каких значениях параметра a уравнение $(a + 4\cdot x - x^2 - 1)\cdot(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три корня?

Ответ: $a = \square$.

Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $|x^2 - 5\cdot x + 4| = a$ имеет четыре корня.

Ответ: $a = \square$.

Применение свойств квадратного уравнения для решения задач с параметрами

Задачи с параметрами >> Урок 35. Квадратные уравнения и неравенства >> Задача 8 (1)

Уровень : 1 Пройдено: 0%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$x_1 = ?\;;\; x_2 = ?$.

Ответ: при $|a| \geqslant ?$, $x \in ?$;

при ____ .

Уровень : 1 Пройдено: 16%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех a таких, что $\boxed{|a| \geqslant ?}$.

Ответ: при $|a| \geqslant ?$, $x \in ?$;

при ______.

Уровень: 1 Пройдено: 33%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех a таких, что $|a| \geqslant 2$.

Следовательно, если $|a| \geqslant 2$, то неравенство верно при условии

$$\left[\begin{array}{l} x < \frac{?}{2}, \\ x > \frac{?}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: при $|a| \geqslant ?$, $x \in ?$;

при ______.

Уровень : 1 Пройдено: 50%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \; ; \; x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех a таких, что $|a| \geqslant 2$.

Следовательно, если $|a| \geqslant 2$, то неравенство верно при условии

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $|a| < 2$, то неравенство

- ☐ выполняется при всех x.
- ☐ не имеет решений.

OK

Ответ: при $|a| \geqslant ?$, $x \in ?$;

при ______.

Уровень : 1 Пройдено: 66%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\ ;\quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех a таких, что $|a| \geqslant 2$.

Следовательно, если $|a| \geqslant 2$, то неравенство верно при условии

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $|a| < 2$, то неравенство ☑ выполняется при всех x.

Ответ: при $|a| \geqslant ?,\ x \in ?$;

при ______.

Уровень : 1 Пройдено: 83%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех a таких, что $|a| \geqslant 2$.

Следовательно, если $|a| \geqslant 2$, то неравенство верно при условии

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $|a| < 2$, то неравенство ☑ выполняется при всех x.

Ответ: при $|a| \geqslant 2$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$;

при $|a| < ?$, $x \in R$.

Уровень : 1 Пройдено: 100%

Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

⊟ *Решение.*

Найдем корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, считая для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\ ;\quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех a таких, что $|a| \geqslant 2$.

Следовательно, если $|a| \geqslant 2$, то неравенство верно при условии

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $|a| < 2$, то неравенство ☑ выполняется при всех x.

Ответ: при $|a| \geqslant 2$, $x \in \left(-\infty\ ;\ \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\ ;\ +\infty\right)$;

при $|a| < 2$, $x \in R$.

При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1 ?

Решение.

Пусть x_1, x_2 – корни данного уравнения.

Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 \overset{?}{=} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a+1) = a^2 - 2a - 2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = a$; $x_1 \cdot x_2 = a + 1$.

Квадратное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант

☑ неотрицателен.

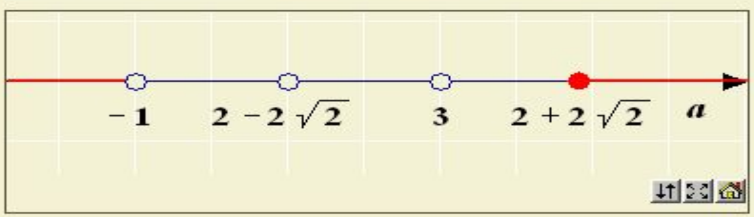
Найдем дискриминант: $D = a^2 - 4a - 4$.

Таким образом, искомые a удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 4 \geqslant 0, \\ a^2 - 2a - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a \geqslant 2 + 2\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 4 \geqslant 0, \\ a^2 - 2a - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2 + 2\sqrt{2})(a - 2 - 2\sqrt{2}) \geqslant 0, \\ (a - 3)(a + 1) > 0. \end{cases}$$

Укажем на числовой прямой решения системы:



Получим: $\left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a \geqslant 2 + 2\sqrt{2}. \end{array} \right.$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [2 + \sqrt{2}; +\infty)$.