

**Распределение Больцмана со степенными  
«хвостами»: новое  
мультипараметрическое аналитическое  
приближение для распределений продаж  
новых автомобилей и известных  
распределений доходов и имущества**

**О.С.Гаранина и М.Ю.Романовский**

**Институт общей физики им.А.М.Прохорова РАН**

**Семинар по динамике развивающихся систем**

**Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,**

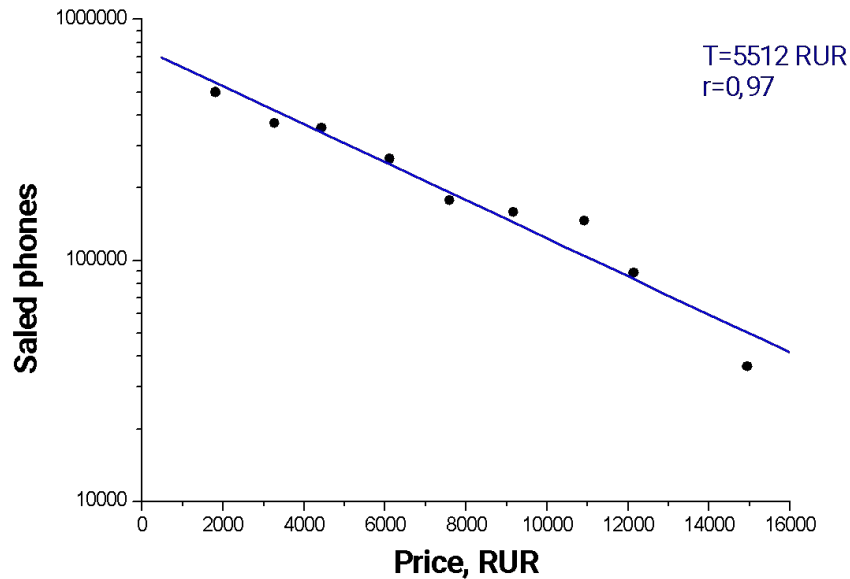
**9 апреля 2014 г.**

# ПОЧЕМУ ЭТО ИНТЕРЕСНО?

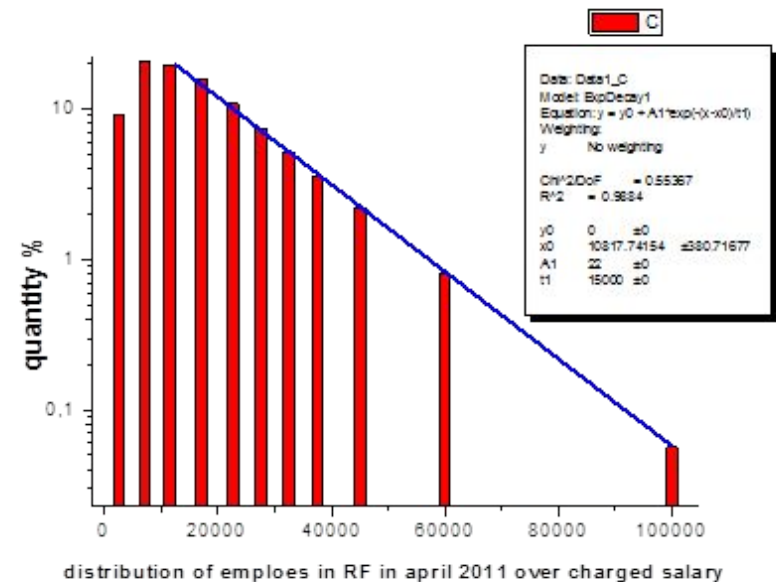
- Экономика - проблема доходов и расходов:
  - Экспоненциальные распределения с асимптотиками («хвостами») Парето;
- Физика – проблема горячих электронов:
  - Вид асимптотики до конца неизвестен;
- Причина: все процессы типа диссоциации, ионизации и т.п. определяются «хвостами» распределений взаимодействующих частиц.

# «БЕСХВОСТЫЕ» РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Распределение продаж сотовых телефонов в России в 2006 году

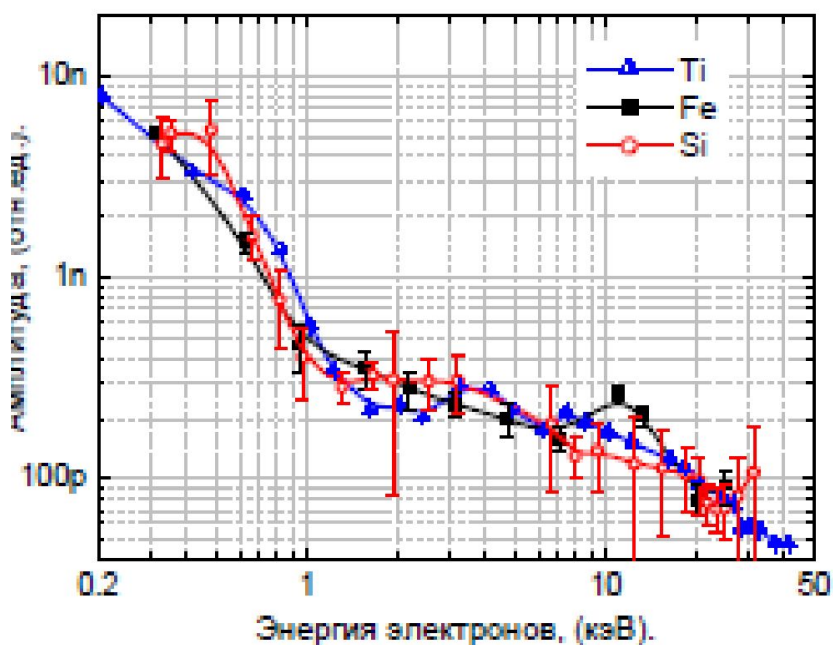
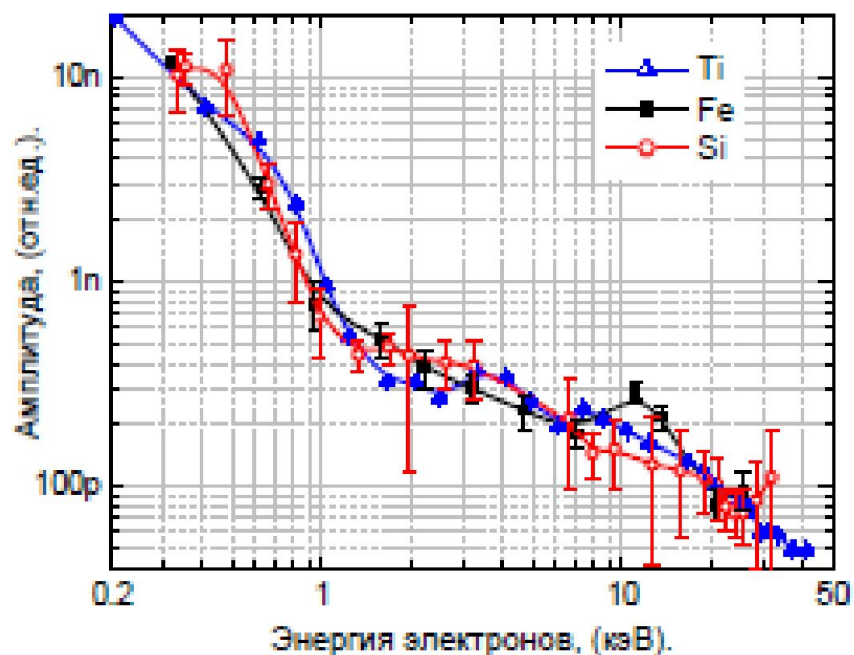


Распределение заработной платы в России апреле 2011 г.

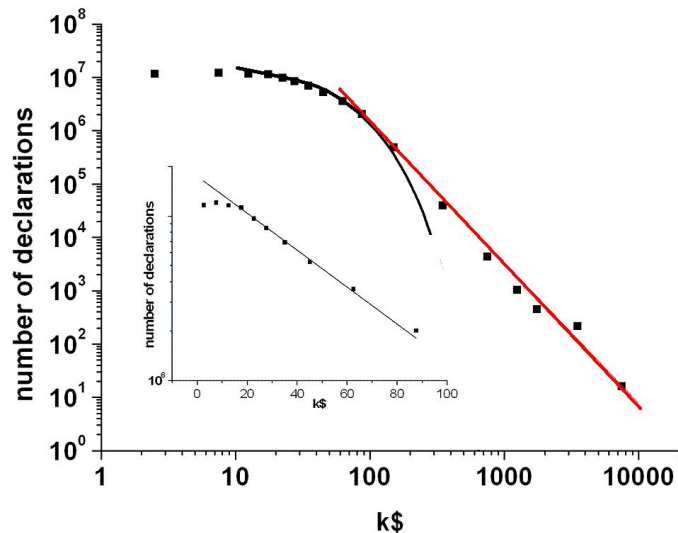


# ЭЛЕКТРОННЫЕ СПЕКТРЫ

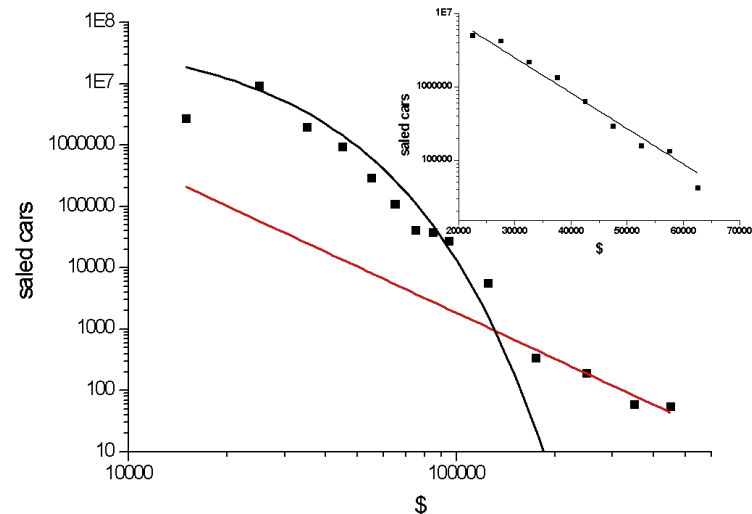
Рис. 2.12. Энергетические спектры электронного тока из плазмы, формируемой на твердотельных мишенях Fe(■), Si(O) и Ti(▲); Спектры получены без учета – (а), а также с учетом – (б) спектральной чувствительности  $s'(E)$  детектора ВЭУ-7 к электронам различных энергий (см. эмпирическую формулу 2.17).



# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОХОДОВ В США В 2004 г. И ПРОДАЖ НОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ В 2005 г.

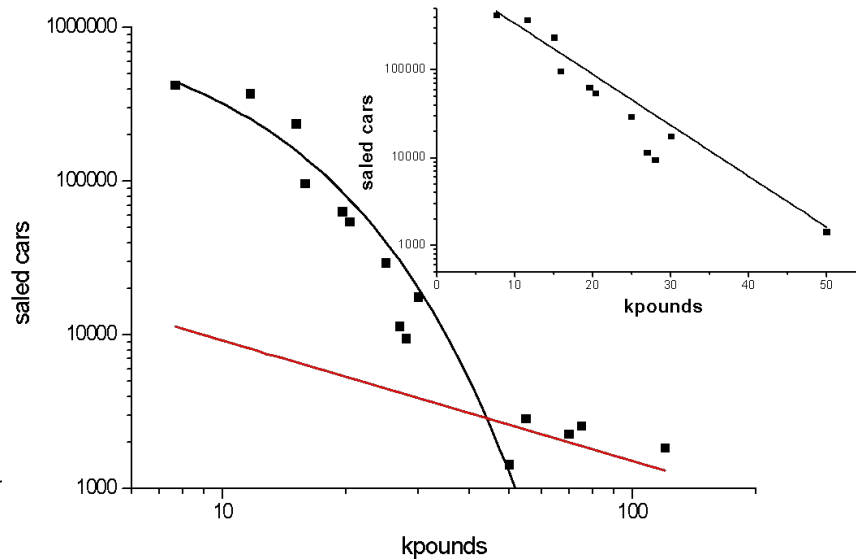
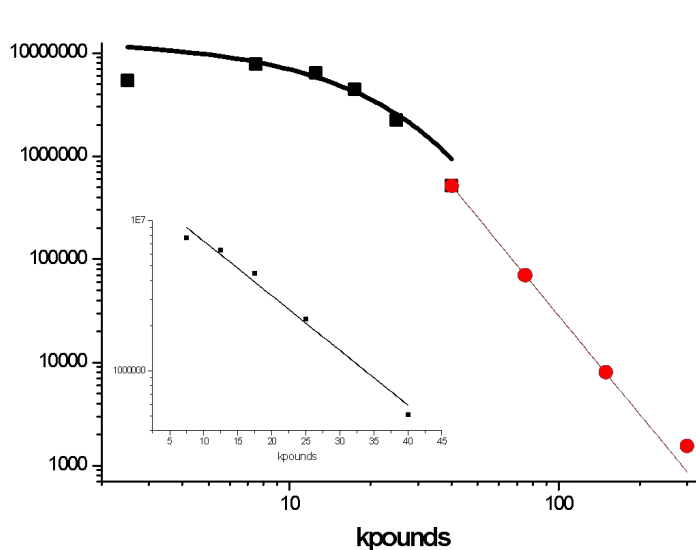


Средний доход 51.3 k\$  
 $T=38.7 \pm 1.1 \text{ k\$}$   $R^2 = 0.97$   
Показатель Парето  
 $\alpha = 2.65 \pm 0.02$   $R^2 = 1.00$



Средняя цена 25.6 k\$  
 $T=9.3 \pm 1.2 \text{ k\$}$   $R^2 = 0.95$   
Показатель Парето  $\alpha = 2.5$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОХОДОВ В ВЕЛИКОБРИТАНИИ В 2003/4 г. И ПРОДАЖ НОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ В 2004 г.



Средний доход 22 k£

$T=14.0 \pm 4.3 \text{ k£}$   $R^2 = 0.93$

Показатель Парето

$\alpha = 2.96 \pm 0.17$   $R^2 = 0.9991$

Средняя цена 11.2 k£

$T=7.5 \pm 1.1 \text{ k£}$

$R^2 = 0.95$

Показатель Парето  $\alpha = 0.8$

# СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОДАЖ НОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ И ДОХОДОВ

- USA (1998): средний доход 43.4 k\$, T = 33.9 k\$;
- USA (2004): средний доход 51.3 k\$, T = 38.7 k\$;  
средняя цена нового авто 25.6 k\$, T = 9.3 k\$  
(средний доход)/(средняя цена нового авто) = 2  
(доход T)/(авто T) = 4
- UK (2003/04): средний доход 22 k£, T = 14 k£;  
средняя цена нового авто 11.7 k£, T = 7.5 k£;  
(средний доход)/(средняя цена нового авто) = 1.5  
(доход T)/(авто T) = 1.5

# ПРОБЛЕМЫ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

- **Первая точка экспоненты:**

- Отказались от приближения, в котором распределение

$$N = N_0 \exp(-m / T)$$

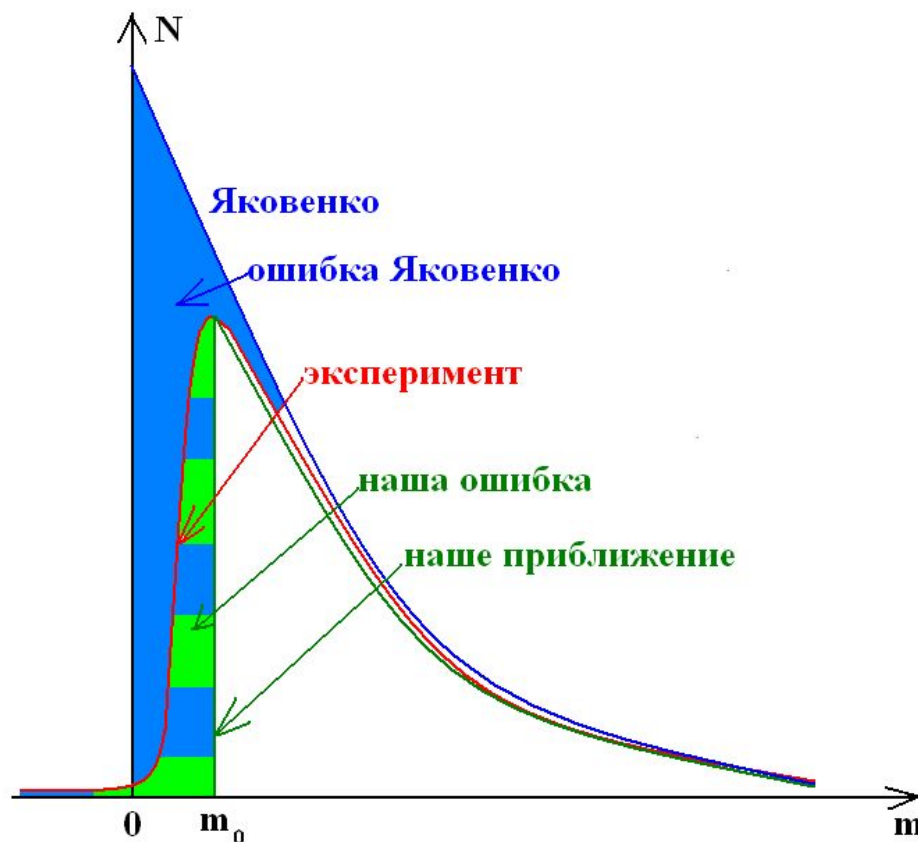
- и перешли к приближению

$$N = N_0 \exp[-(m - m_0) / T]$$

- которое также удовлетворяет закону Больцмана и лучше описывает экспериментальные распределения.

- Для новых автомобилей в России это стало справедливо в 2006 г.

- Причина: весомость первой точки метода наименьших квадратов для (резко) падающих распределений





# РЕШЕНИЕ

- Следует производить аппроксимацию не по методу наименьших квадратов, а по методу относительных наименьших квадратов, т.е. каждый раз делить на текущее значение аппроксимируемой функции. Тогда «вес» каждой точки аппроксимации будет примерно одинаковым.
- Практически это означает, что аппроксимировать надо всю кривую сразу.

# МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО КРИВЫХ С БОЛЬЦМАНОВСКОЙ ОСНОВНОЙ ЧАСТЬЮ И ХВОСТОМ ПАРЕТО

- **Формула:**

- $W_{T\beta\theta}(R) =$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi T}} \int_0^\infty \cos(x\sqrt{R}) \left\{ \frac{2}{\Gamma(\beta-1/2)} \left[ (\beta - 3/2) \frac{xT}{4N} \right]^{\beta/2-1/4} K_{\beta-1/2} \left[ \sqrt{(\beta - 3/2) \frac{xT}{4N}} \right] \right\}^\theta dx$$

- **При малых  $R$ :**

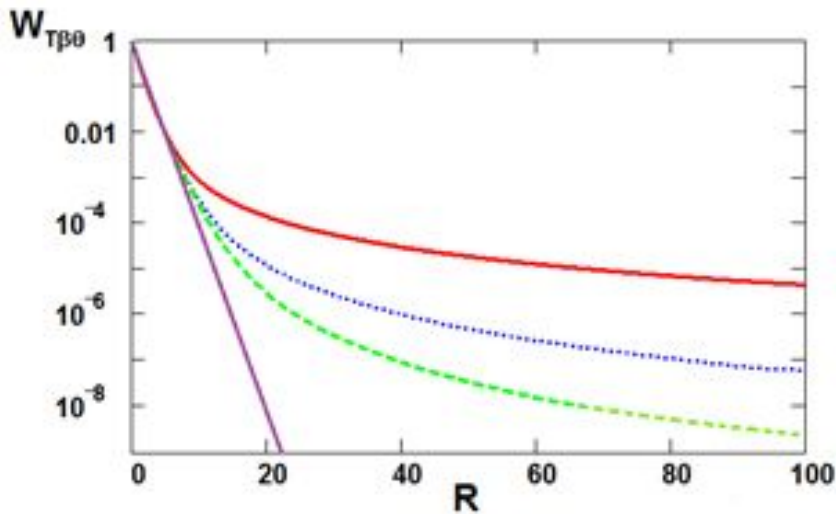
- $W_T(R) \cong \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{R}{T}\right)$

- **При больших  $R$ :**

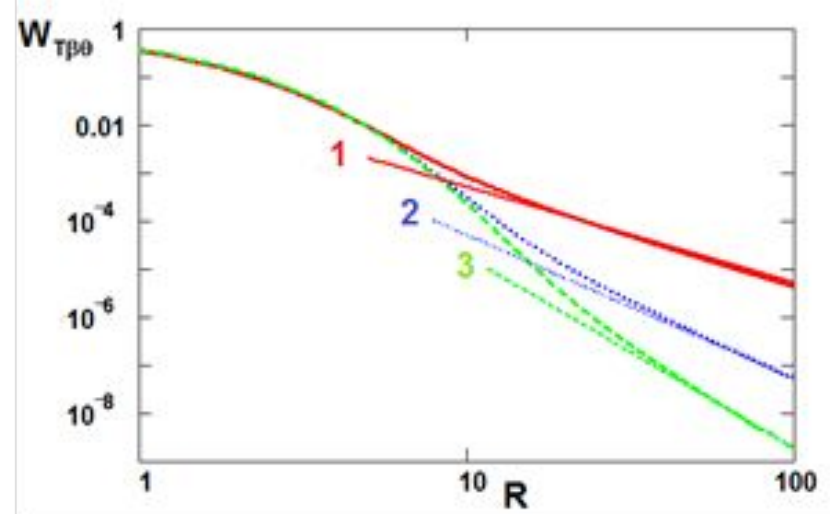
- $W_T(R) \sim R^{-\beta}$

# ОБЩИЙ ВИД РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Functions  $W_{T\beta\theta}$  for  $\beta=2$  (solid curve),  $\beta=3$  (dotted curve),  $\beta=4$  (dashed curve) in semi-logarithmic scale. The straight line is an exponent  $\exp(-R)$ . Here  $T=1$ ,  $\theta=100$  for  $\beta=2$ ,  $\theta=20$  for  $\beta=3$ , and  $\theta=10$  for  $\beta=4$



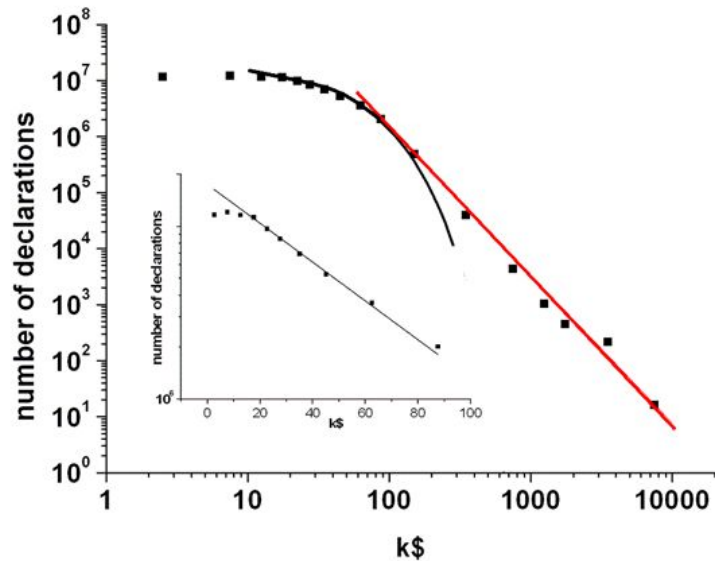
Functions  $W_{T\beta\theta}$  for  $\beta=2$  (solid curve),  $\beta=3$  (dotted curve),  $\beta=4$  (dashed curve) in double-logarithmic scale. The straight line 1 is an asymptote  $\sim R^{-2}$ , 2 is an asymptote  $\sim R^{-3}$ , 3 is an asymptote  $\sim R^{-4}$ .



# СРАВНЕНИЕ ДЛЯ США

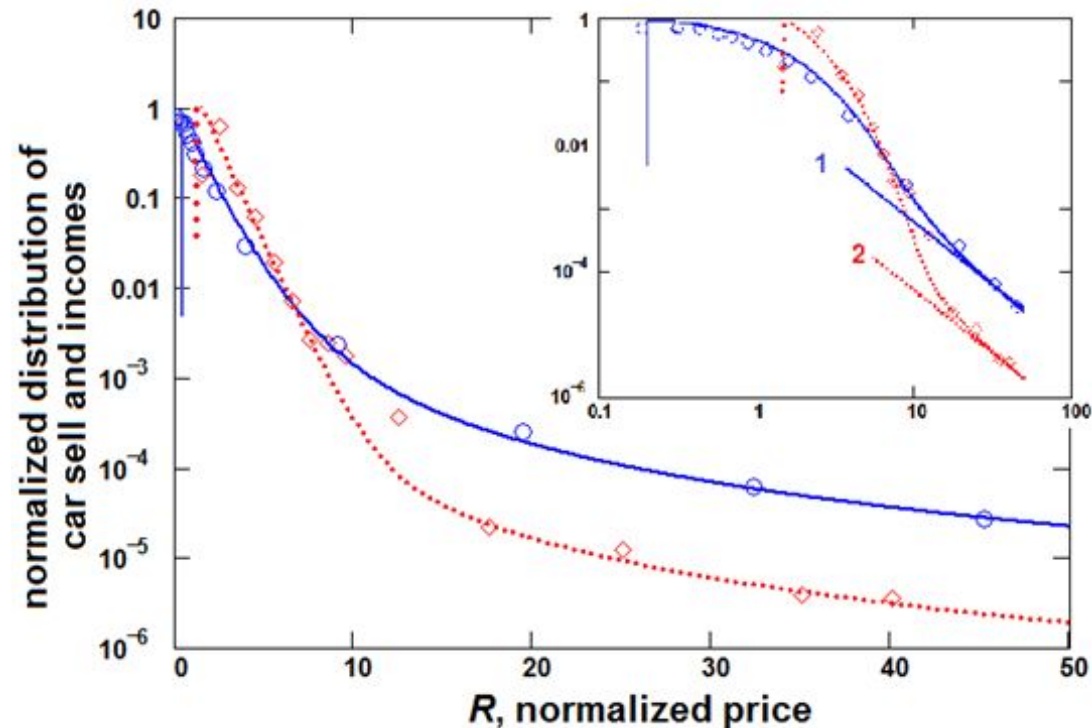
Старая аппроксимация:

$$\beta = 2,65$$

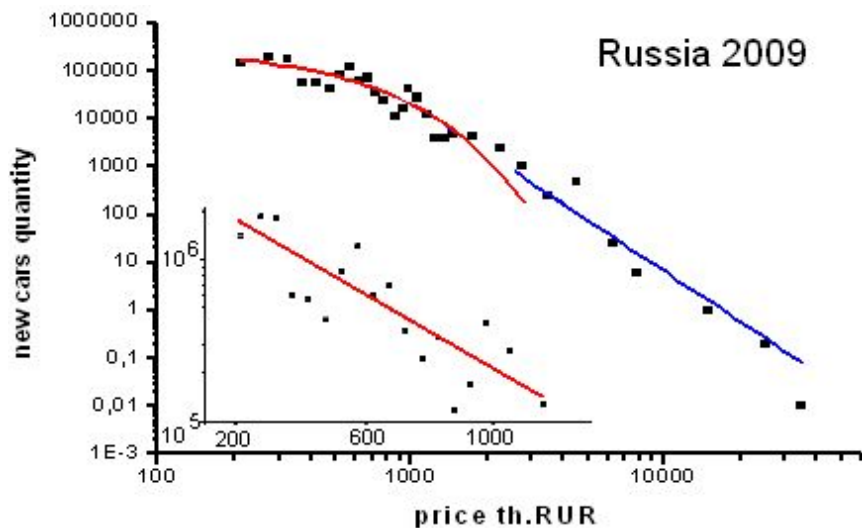
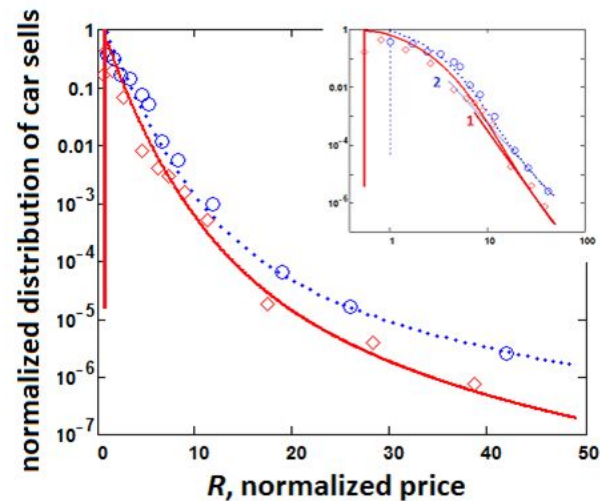
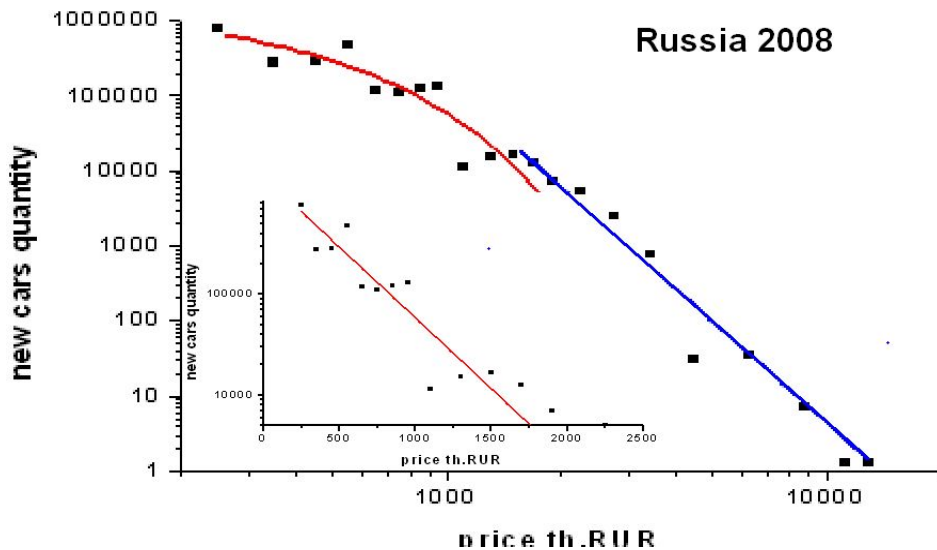


Наша аппроксимация:

$$\beta = 2, \theta = 100 \text{ (доходы),}$$
$$\theta = 1000 \text{ (машины)}$$

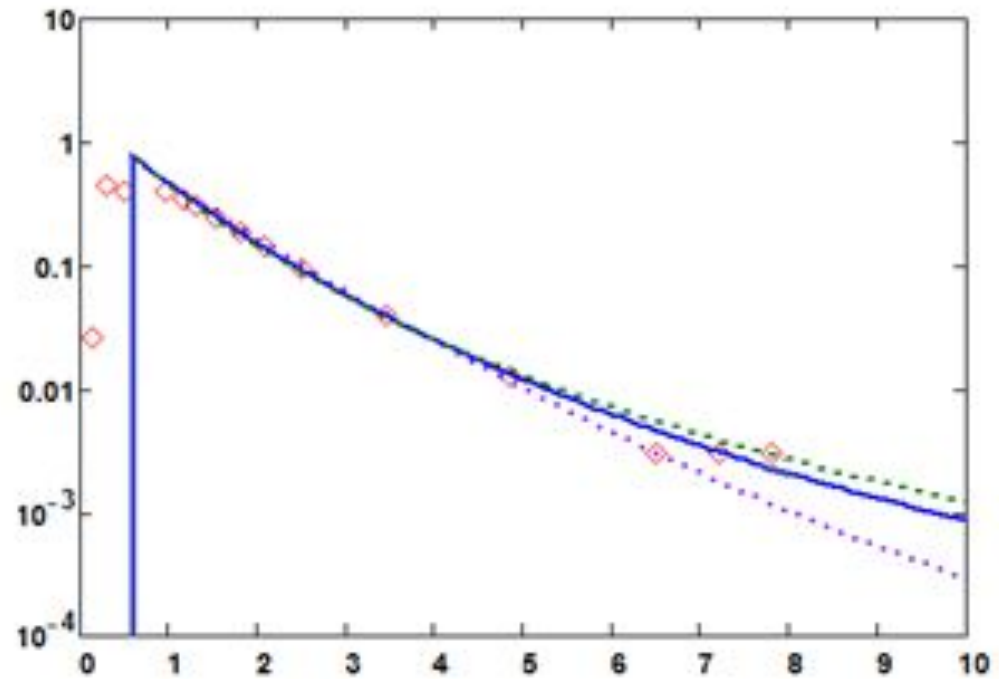
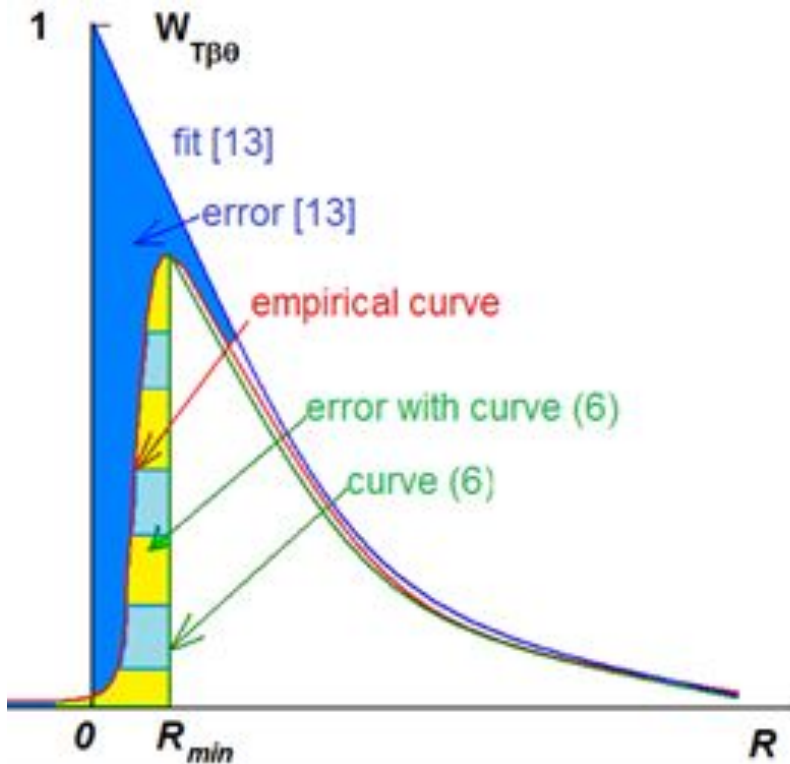


# ПРОДАЖИ НОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ В РОССИИ В 2008-2009 гг.



	2008	2009
начальная цена $m_0$	169000 RUR	177500 RUR
Нормировка $T$	310000 RUR	377000 RUR
показатель Парето (старый/новый)	4.5/4	3.5/3

# РЕГУЛИРОВКА «ХВОСТА»



# ОБЩАЯ ФОРМУЛА

- **Формула:**

- $W_{T\beta\theta}(R) =$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi T}} \int_0^\infty \cos(x\sqrt{R}) \left\{ \frac{2}{\Gamma(\beta-1/2)} \left[ (\beta - 3/2) \frac{xT}{4N} \right]^{\beta/2-1/4} K_{\beta-1/2} \left[ \sqrt{(\beta - 3/2) \frac{xT}{4N}} \right] \right\}^\theta dx$$

- **При малых  $R$ :**

- $W_T(R) \cong \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{R}{T}\right)$

- **При больших  $R$ :**

- $W_T(R) \sim R^{-\beta}$

# ВЫВОДЫ

- Многие распределения: продаж товаров по ценам, доходов, имущества, электронов по энергиям - выглядят как экспоненциальное Больцмановское с асимптотическим «хвостом» Парето;
- Аппроксимацию таких распределений следует проводить методом относительных наименьших квадратов с помощью предложенного многопараметрического семейства кривых.
- Это уточняет полученные эмпирические параметры распределений, что важно для расчетов скоростей элементарных процессов в физике и экономике.