

# Математика абитуриенту

## Использование интерактивных учебников для подготовки к экзаменам

Авторы:

Петрякова Ирина Михайловна - учитель математики МОУ  
«Белозерская средняя общеобразовательная школа»

Конева Надежда Валентиновна - учитель математики МОУ  
«Памятинская средняя общеобразовательная школа»

## Пояснительная записка

Настоящий курс предназначен для учащихся 10-11 классов средней общеобразовательной школы, интересующихся математикой, желающих расширить и укрепить свои знания в этой области. Данный курс позволяет развивать интеллектуальные и творческие способности учащихся, учит логически мыслить; позволяет максимально увеличить самостоятельную и индивидуальную работу учащихся по предмету; способствует выработке и закреплению навыков работы на компьютере.

Курс разработан на 68 часов и предполагает знакомство с теорией и практикой реализации рассматриваемых в модулях тем. В процессе изучения данного элективного курса предполагается использование различных методов активизации познавательной деятельности школьников, а также различных форм организации их самостоятельной работы; практикумов, семинаров, дидактических игр. Результатом освоения программы курса является представление школьниками творческой индивидуальной работы на итоговом занятии.

В этом элективном курсе расширяются базовые знания по математике. Здесь рассматривается теорема Безу, и теорема о целых корнях с целыми коэффициентами, которые дают возможность учащимся обосновать решение некоторых уравнений высших степеней. Решаются задачи на движение, смеси, работу; нестандартные задачи на использование различных свойств функций и более сложные логические задачи.

## **Цель курса:**

- Углубление и расширение знаний учеников и развитие их творческих способностей на основе использования интерактивных учебников.

## **Задачи курса:**

- Умение самостоятельно формировать теоретические знания
- Сформировать умения и навыки при работе с интерактивными учебниками.
- Сформировать практические умения при выполнении творческих работ.

# Тематическое планирование

№ п/п	Тема занятий	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практика
	Вводное занятие	1		1
<b>1</b>	<b>Уравнения и неравенства</b>	6	1,5	4,5
1.1	Уравнения и неравенства с модулем	1	0,5	1,5
1.2	Уравнения высших степеней	1	0,5	0,5
1.3	Уравнения и неравенства с радикалами	1	0,5	1,5
1.4	Квадратные уравнения с параметрами	1		0,5
1.5	Расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от параметра	1		0,5
1.6	Защита творческих работ	1		1
<b>2</b>	<b>Способы решения тригонометрических уравнений и неравенств</b>	8	1,5	6,5
2.1	Сведение к квадратному уравнению	1	0,5	0,5
2.2	Группировка и разложение на множители	1		1
2.3	Сведение к однородным уравнениям	1		1
2.4	Преобразование суммы в произведение и произведение в суммы	1		1
2.5	Метод вспомогательного уравнения	1	0,5	0,5
2.6	Системы тригонометрических уравнений	1		1
2.7	Обратные тригонометрические функции	1	0,5	0,5
2.8	Защита творческих работ	1		1

№ п/п	Тема занятий	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практика
<b>3</b>	<b>Уравнения и неравенства для абитуриентской подготовки.</b>	4	1,5	2,5
3.1	Показательные уравнения и неравенства	1	0,5	0,5
3.2	Логарифмические неравенства	1	0,5	0,5
3.3	Задачи, содержащие одновременно логарифмы, модули, радикалы.	1	0,5	0,5
3.4	Защита творческих работ	1		1
	<b>Итого</b>	17	4,5	12,5

№ п/п	Тема занятий	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практика
<b>5</b>	<b>Начала анализа</b>	<b>9</b>	<b>3</b>	<b>6</b>
5.1	Вычисление производной	1		1
5.2	Применение производной	3	1	2
5.3	Касательная к графику функции	2	1	1
5.4	Плоские множества	2	1	1
5.5	Зачётная работа	1		1
<b>6</b>	<b>Нестандартные задачи</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
6.1	Метод Мажорант	2	1	1
6.2	Использование различных свойств функций	2	1	1
6.3	Удачная подстановка или группировка	2	1	1
6.4	Геометрический подход	2	1	1
6.5	Защита рефератов	1		1
	<b>Тестирование</b>	<b>2</b>		<b>2</b>
	<b>Всего</b>	<b>68</b>	<b>14,5</b>	<b>53,5</b>

## Содержание

Вводное занятие: Тестирование

«Решение простейших уравнений и неравенств»

(линейные, квадратные, дробно – рациональные)

1. Простейшие уравнения и неравенства

1.1 Повторение определения модуля. Графический смысл модуля. Решение простейших уравнений и неравенств с модулем.

1.2 Метод замены переменной. Деление многочлена на многочлен уголком. Теорема Безу. Формула Кардано. Кратные корни.

1.3 Возведение уравнения в чётную степень. Умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с параметром.

1.4 Понятие параметра, допустимых значений параметра на примере квадратного уравнения.

1.5 Расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от параметра. Оба корня больше, меньше, оба корня на интервале, число между корнями.

1.6 Определители и матрицы второго и третьего порядка. Теорема Кратера. Метод Гаусса.



# Темы для творческих работ

1. Метод неопределённых коэффициентов
2. Теорема Безу
3. Теорема Виета для уравнений третьей и четвёртой степени
4. Кубическое уравнение. Формула Кардано
5. Деление уголком многочлена на многочлен
6. Сравнение чисел
7. График дробно – линейной функции
8. Равносильность систем. Метод Гаусса.

# Интерактивные учебники по математике

---

- Электронный учебник – справочник  
Алгебра 7-11
- Математика абитуриенту
- Математика 5-11 классы. Практикум
- Математика часть 1
- Сдаем Единый экзамен

## **Перечень учебников по математике**

Для удобства дальнейших ссылок приведем списки всех учебников, включенных в Федеральный перечень учебников для общеобразовательных школ (2002 г.).

### **Учебники по математике для основной школы (7-9 кл.)**

- [А1-7(8,9)] «Алгебра, 7(8,9)», авт. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И. Нешков, С.Б.Суворова.
- [А2-7(8,9)] «Алгебра, 7(8,9)», авт. Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров и др.
- [М1-7(8,9)] «Математика, 7(8,9)», авт. Г.В.Дорофеев, С.Б.Суворова, Е.А.Бунимович и др.
- [А3-7,8,9] «Алгебра, 7(8,9)», авт. К.С.Муравин, Г.К.Муравин, Г.В.Дорофеев.
- [А4-7,8,9] «Алгебра, 7(8,9)», авт. А.Г.Мордкович.
- [А5-7,8,9] «Алгебра, 7(8,9)», авт. С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин

### **Учебники по алгебре и началам анализа для средней школы (10-11 кл.)**

- [АА1-10/11] «Алгебра и начала анализа, 10-11», авт. А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П. Дудницин и др.
- [АА2-10/11] «Алгебра и начала анализа, 10-11», авт. Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В. Сидоров и др.
- [АА3-10/11] «Алгебра и начала анализа, 10-11», авт. М.И.Башмаков.

# Решение уравнений с параметрами

## Определение:

Равенство вида  $f(x, a) = h(x, a)$  называется уравнением с параметром  $a$  относительно переменной  $x$ .

## Пример.

$3(x - a) = \sqrt{x - 4}$  - уравнение с параметром.

## Определение:

Линейным уравнением с параметром  $p$  называется уравнение вида:  $a(p)x + b(p) = 0$ ,

где  $a$  и  $b$  - некоторые выражения от одной переменной.

## Пример.

$3ax - 2 + a^2 = 0$  - линейное уравнение с параметром  $a$  относительно переменной  $x$ .

## Определение:

Квадратным уравнением с параметром  $a$

называется уравнение вида

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad \text{где } A(a), B(a), C(a)$$

- некоторые выражения от переменной  $a$ .

## Пример.

Уравнение  $ax^2 - (2a - 1)x - 3a + 2 = 0$  является квадратным уравнением с параметром  $a$  относительно переменной  $x$ .

# Пример

Пример:

Решите уравнение с параметром  $a$ :

$$(a-2)x^2 - (2a-3)x + a-2 = 0$$

Ответ: при  $a=2$   $x=0$ ;

$$\text{при } a = \frac{7}{4} \quad x = \frac{2a-3}{2(a-2)};$$

$$\text{при } a > \frac{7}{4}; a \neq 2 \quad x = \frac{2a-3 \pm \sqrt{4a-7}}{2(a-2)};$$

при прочих  $a$  решений нет.

# Задания для самостоятельного обучения

Найдите наименьшее целое положительное значение параметра  $a$ , при котором неравенство  $-x^2 - 2x + 3 < |x - a|$  не имеет решений.

**Ответ:**  $a = \square$ .

При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|x^2 - 2 \cdot x - 3| = a$  имеет три решения?

**Ответ:**  $a = \square$ .

При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a + 4 \cdot x - x^2 - 1) \cdot (a + 1 - |x - 2|) = 0$  имеет ровно три корня?

**Ответ:**  $a = \square$ .

Найдите наибольшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $|x^2 - 5 \cdot x + 4| = a$  имеет четыре корня.

**Ответ:**  $a = \square$ .

# Применение свойств квадратного уравнения для решения задач с параметрами

Задачи с параметрами >> Урок 35. Квадратные уравнения и неравенства >> Задача 8 (1)

Уровень: 1 Пройдено:

0%

Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

— Решение.

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Ответ: при  $|a| \geq ?$ ,  $x \in ?$ ;

при

Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

[-] *Решение.*

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех  $a$  таких, что  $|a| \geq 2$ .

Ответ: при  $|a| \geq ?$ ,  $x \in ?$ ;

при



Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

— Решение.

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех  $a$  таких, что  $|a| \geq 2$ .

Следовательно, если  $|a| \geq 2$ , то неравенство верно при условии

$$\begin{aligned} x &< \frac{1}{2}, \\ x &> \frac{?}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: при  $|a| \geq ?$ ,  $x \in ?$ ;

при

Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

▣ *Решение.*

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех  $a$  таких, что  $|a| \geq 2$ .

Следовательно, если  $|a| \geq 2$ , то неравенство верно при условии

$$\begin{cases} x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{cases}$$

Если  $|a| < 2$ , то неравенство

- выполняется при  
всех  $x$ .
- не имеет решений.

OK

Ответ: при  $|a| \geq ?$ ,  $x \in ?$ ;

при .

Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

▢ *Решение.*

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех  $a$  таких, что  $|a| \geq 2$ .

Следовательно, если  $|a| \geq 2$ , то неравенство верно при условии

$$\begin{cases} x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{cases}$$

Если  $|a| < 2$ , то неравенство  выполняется при всех  $x$ .

Ответ: при  $|a| \geq 2$ ,  $x \in ?$ ;  
при .

Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

— Решение.

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех  $a$  таких, что  $|a| \geq 2$ .

Следовательно, если  $|a| \geq 2$ , то неравенство верно при условии

$$\begin{cases} x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{cases}$$

Если  $|a| < 2$ , то неравенство  выполняется при всех  $x$ .

Ответ: при  $|a| \geq 2$ ,  $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$ ;

при  $|a| < 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Для всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

— Решение.

Найдем корни уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$ , считая для определенности, что  $x_1 \leq x_2$ :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Корни существуют при всех  $a$  таких, что  $|a| \geq 2$ .

Следовательно, если  $|a| \geq 2$ , то неравенство верно при условии

$$\begin{cases} x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}. \end{cases}$$

Если  $|a| < 2$ , то неравенство  выполняется при всех  $x$ .

Ответ: при  $|a| \geq 2$ ,  $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$ ;

при  $|a| < 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

# Задачи с параметрами >> Урок 35. Квадратные уравнения и неравенства >> Задача 1 (1)

Уровень: 1 Пройдено:

100%

При каких  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - ax + a + 1 = 0$  больше 1?

**Решение.**

Пусть  $x_1, x_2$  – корни данного уравнения.

Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a + 1) = a^2 - 2a - 2.$$

По теореме Виета  $x_1 + x_2 = a; x_1 \cdot x_2 = a + 1$ .

Квадратное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант

неотрицателен.

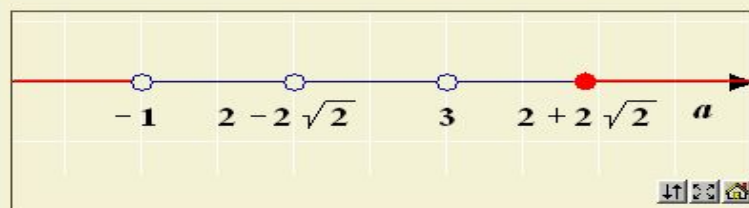
Найдем дискриминант:  $D = a^2 - 4a - 4$ .

Таким образом, искомые  $a$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 4 \geq 0, \\ a^2 - 2a - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a \geq 2 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 4 \geq 0, \\ a^2 - 2a - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2 + 2\sqrt{2})(a - 2 - 2\sqrt{2}) \geq 0, \\ (a - 3)(a + 1) > 0. \end{cases}$$

Укажем на числовой прямой решения системы:



Получим:  $\begin{cases} a < -1, \\ a \geq 2 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$

**Ответ:**  $(-\infty; -1) \cup [2 + \sqrt{2}; +\infty)$ .