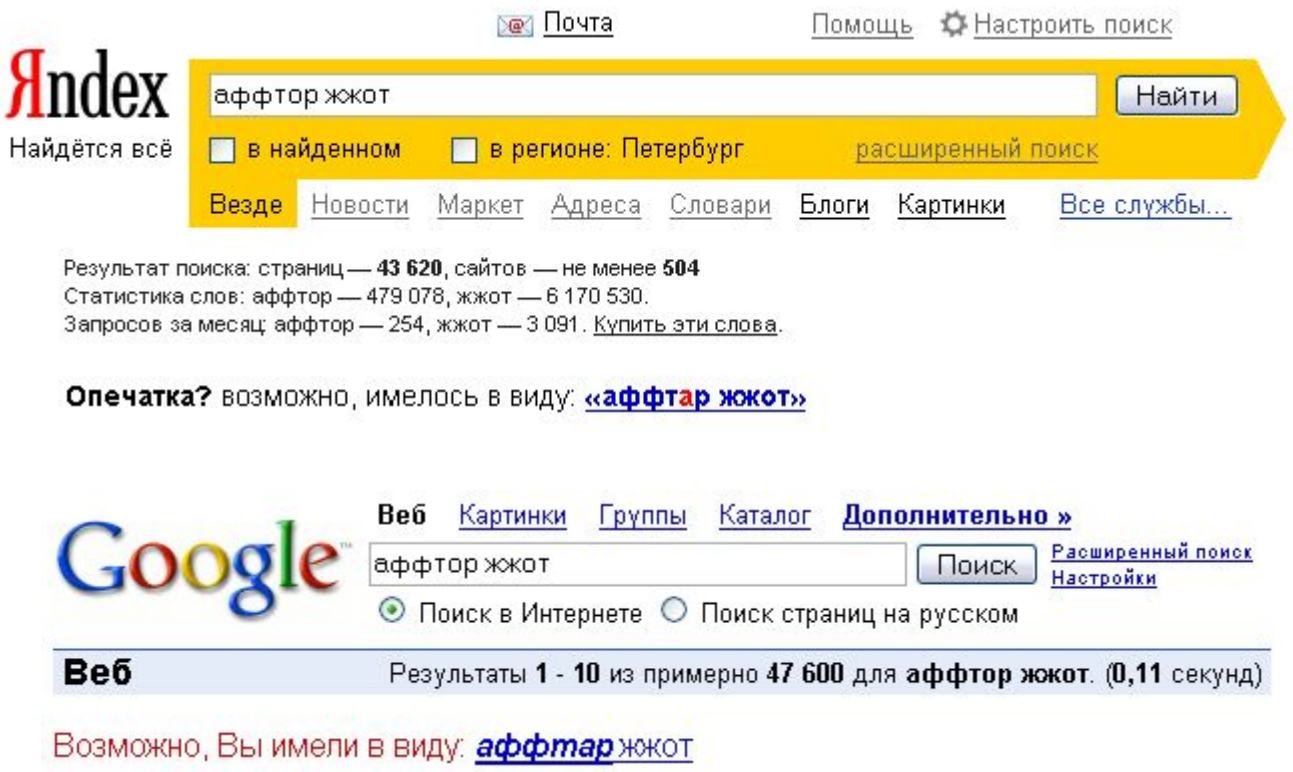
Индексирование текста для поиска с учетом орфографических ошибок

Искандер Акишев
Михаил Дворкин

СПбГУ ИТМО
Ноябрь 2006 г.

Часть 0 – Предисловие



Часть I - Введение

- Область применения
- Постановка задачи
- Примеры
- Имеющиеся результаты

Область применения

- Необходимость поиска с учетом ошибок:
  - Поиск документов в Интернете
  - Автоматическое исправление орфографических ошибок
  - Вычислительная биология:
    - Поиск образца в неточных экспериментальных данных
    - Поиск похожих участков ДНК

Постановка задачи (1)

- Коллекция документов *T* суммарного размера *n*
- Образец *P* длины *m*
- Предполагается не более *d* ошибок:
  - Пропущенный символ
  - Лишний символ
  - Измененный символ
  - *Можно также сузить на метрику Хэмминга*

Постановка задачи (2)

- Требуется найти
  - Все вхождения
  - Все начальные позиции вхождений
  - Все документы, содержащие образец

Пример

Документы:

GACTCAAAACGGGTGC

GTGACCGACGGATGAC

CCTACAAACATGTTCG

TAAACCTGAGACCAAC

Образец: **ACAAC**

Разрешенное число ошибок: $d = 1$

Пример

Документы:

GACTCAAAACGGGTGC

GTGACCGACGGATGAC

CCTACAAACATGTTCG

TAAACCTGAGACCAAC

Образец: **ACAAC**

Разрешенное число ошибок: $d = 1$

Различные вхождения:

1-й документ: (6, 10), (7, 10)
3-й документ: (4, 7), (4, 8), (4, 9), (6, 9)
4-й документ: (2, 5), (11, 16), (12, 16), (13, 16)

Пример

Документы:

GACTCAAAACGGGTGC

GTGACCGACGGATGAC

CCTACAAACATGTTCG

TAAACCTGAGACCAAC

Образец: **ACAAC**

Разрешенное число ошибок: $d = 1$

Начальные позиции вхождений:

1-й документ: 6, 7

3-й документ: 4, 6

4-й документ: 2, 11, 12, 13

Пример

Документы:

GACTCAAAACGGGTGC

GTGACCGACGGATGAC

CCTACAAACATGTTCG

TAAACCTGAGACCAAC

Образец: **ACAAC**

Разрешенное число ошибок: $d = 1$

Документы, содержащие образец:

1, 3, 4

Имеющиеся результаты (1)

Число ошибок	Время запроса	Размер структуры данных	Время индексирования	Источник
$d = 0$	$O(m + occ)$	$O(n)$	$O(n)$	Weiner 1973
$d = 1$	$O(m + \log n \log \log n + occ)$	$O(n \log^2 n)$	$O(n \log^2 n)$	Amir et al. 2000
$d = 1$	$O(m \log \log n + occ)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	Buchsbaum et al. 2000
$d = 1$	$O(m + occ)$	$O(n \log n)$	$O(n \log^2 n)$ (в среднем)	Maaß Novak 2004
$d = O(1)$	$O(m + \log^d n \log \log n + occ)$	$O(n \log^d n)$	$O(n \log^d n)$	Cole et al. 2004
$d = O(1)$	$O(d\, n^{\varepsilon} \log n)$	$O(n)$	$O(n)$	Myers 1994
$d = O(1)$	$O(n^{\varepsilon})$	$O(n)$	$O(n)$	Navarro et al. 2000

Имеющиеся результаты (2)

Число ошибок	Время запроса	Размер структуры данных	Время индексирования	Источник
$d = O(1)$	$O(m \log^2 n + m^2 + occ)$ (в среднем)	$O(n \log n)$ (в среднем)	$O(n \log^2 n)$ (в среднем)	Chávez et al. 2002
$d = O(1)$	$O(m \min\{n, m^{d+1}\} + occ)$	$O(\min\{n, m^{d+1}\} + n)$	$O(\min\{n, m^{d+1}\} + n)$	Cobbs 1995 (Ukkonen 1993)
$d = O(1)$, Hamming	$O(\log^{d+1} n)$ (в среднем)	$O(n)$	$O(n)$	Maaß 2004
$d = O(1)$	$O(m + occ)$	$O(n \log^d n)$ (в среднем)	$O(n \log^{d+1} n)$ (в среднем)	Maaß Novak 2005
$d = O(1)$	$O(m + occ)$ (в среднем)	$O(n \log^d n)$	$O(n \log^{d+1} n)$	Maaß Novak 2005

Часть II – Необходимые знания

- Расстояние Левенштейна
- Функция minpref
- Бор
- Сжатый бор
- *l*-слабый бор
- Интервальные запросы

Расстояние Левенштейна

- $d(u,v)$ = наименьшее количество операций редактирования, необходимое, чтобы перевести u в v.
- Вычисляется методом динамического программирования:

$$d(u[1..i],v[1..j]) = \begin{cases} d(u[1..i],v[1..j-1])+1, \\ \min d(u[1..i-1],v[1..j])+1, \\ d(u[1..i-1],v[1..j-1])+\delta_{u[i],v[j]} \end{cases}$$

Расстояние Левенштейна (2)

- Пример:

d(”АВТОР”, ”АФФТАР”) = 3

  - АВТОР
  - АФТОР
  - АФФТОР
  - АФФТАР

- За время O((|*u*|+|*v*|)**k*) можно найти min(d(*u*,*v*),*k*) [Укконен 1985]

Функция $\text{minpref}_u(v)$

- $\text{minpref}_u(v) = \min l$:
  $$\begin{cases} d(\text{pref}_l(u), \text{pref}_{l+|u|-|v|}(v)) = d(u,v) \\ \text{suff}_{l+1}(u) = \text{suff}_{l+|u|-|v|+1}(v) \end{cases}$$
- Пример:

  $\text{minpref}_{\text{“АВТОР”}}(\text{“АФФТАР”}) = 4$
  - АВТО●Р
  - АФФТА●Р
  - $d(\text{“АВТО”},\text{“АФФТА”})=3$

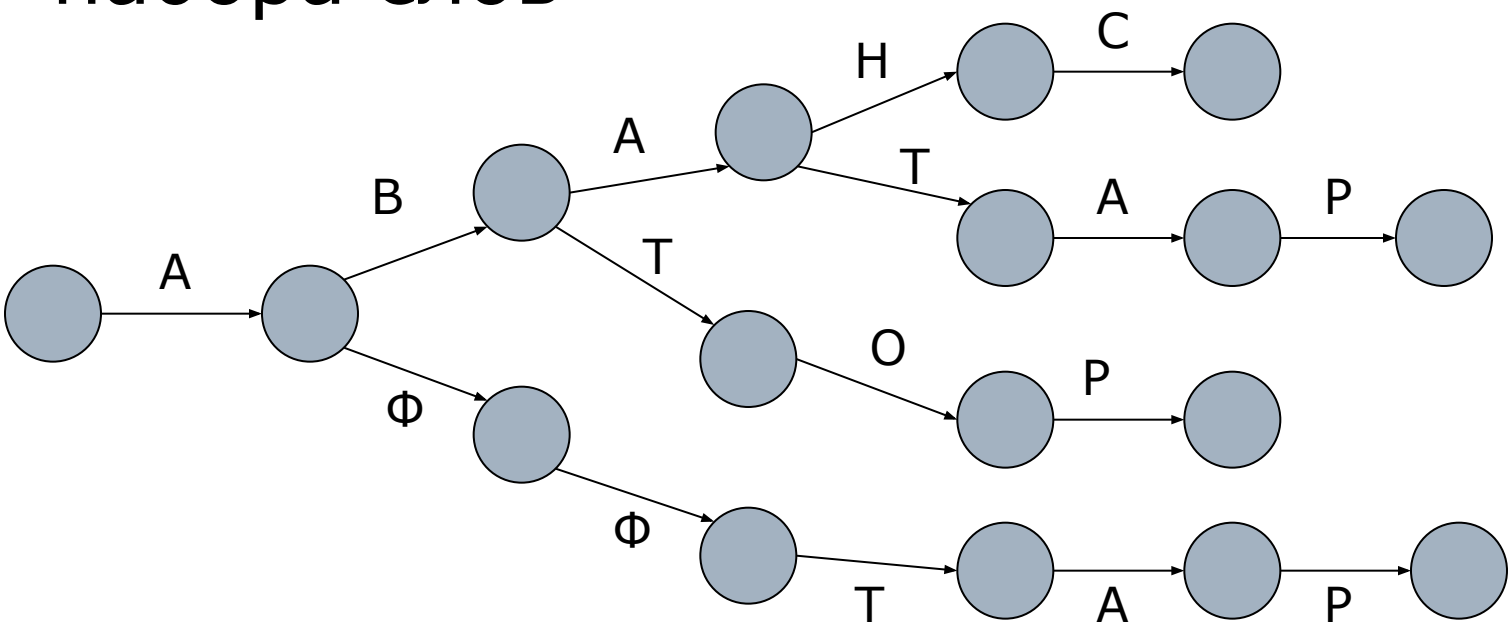
Лемма о minpref

- Пусть $d(u,v)=k$
- Обозначим за $u(i)$ строку u после i из k операций редактирования
- Если $\text{minpref}_{u(i)}(u) > h + 1$, то для некоторого $j > h$ $\text{pref}_j(v)=\text{pref}_j(u(i\text{-}1))$
- Например:
  - АВТОР
  - АФТОР
  - АФФ●ТОР
  - АФФТАР

i = 2
$\text{minpref}_{u(2)}(u)=3$
h = 1
j = 2
$\text{pref}_2(v)=\text{pref}_2(u(1))$

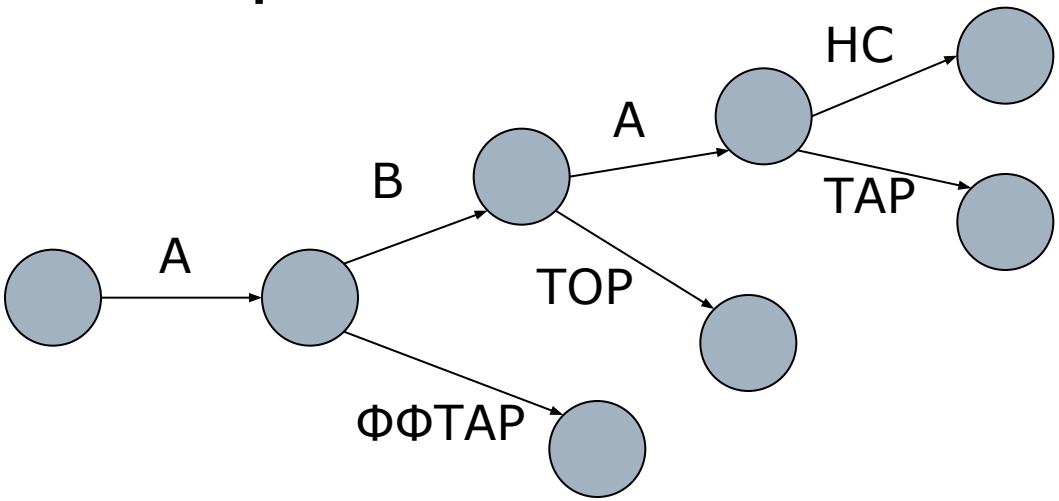
Бор

- Структура данных для хранения набора слов



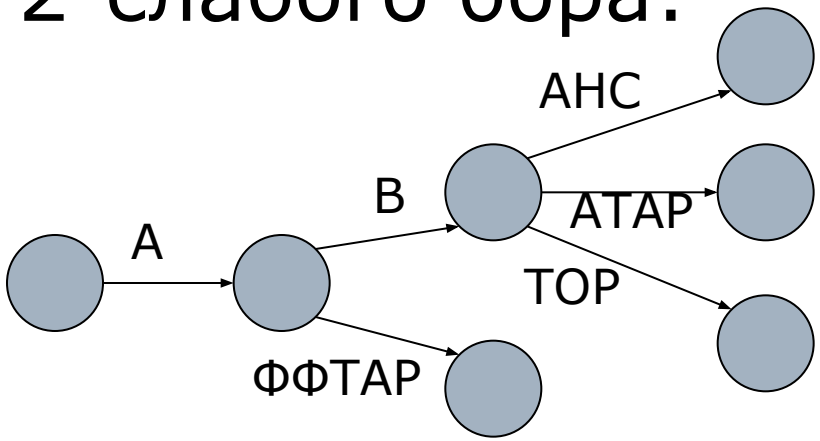
Сжатый бор

- Структура данных для хранения набора слов



/-слабый бор

- Вершины глубины менее / имеют структуру сжатого бора
- После /-го уровня – никакого ветвления
- Пример 2-слабого бора:



Интервальные запросы

- Дан массив A длины n с целыми числами.
- Поступают запросы про числа в позициях с i по j.
- Время работы $<f(n),g(n)>$ обознает
  - Один запрос обрабатывается за время $f(n)$
  - Предобработка занимает время $g(n)$

Интервальные запросы (2)

- RMQ – Range Minimum Query
- Запрос (i, j) – найти индекс l, такой что $A[l] = \min\{A[k], i \le k \le j\}$
- Алгоритм Фарака-Колтона и Бендера позволяет решать RMQ за наилучшее возможное время: $<O(1),O(n)>$

Интервальные запросы (3)

- BVRQ – Bounded Value Range Query
  - Запрос (i, j, k) – найти множество всех индексов l, таких что $i \le l \le j$ и $A[l] \le k$
- CRQ – Colored Range Query
  - Запрос (i, j) – найти множество всех различных значений $A[l]$ при $i \le l \le j$

Часть III – Алгоритм Маасса-Новака

- Подход Маасса-Новака
- Случай $d = 1$
- Общий случай
- Оценка времени поиска
- Оценка времени индексирования
- Использование интервальных запросов

Подход Маасса-Новака

- Старый подход №1:
  - Выберем строку s из T. За время $O(|P|d)$ можно сравнить ее с P.
- Старый подход №2:
  - Построим словарь всех слов, отличающихся от слов из T не более чем на d. Тогда поиск P будет занимать $O(|P|)$.

Подход Маасса-Новака

- Чем плохи старые подходы?
- Старый подход №1:
  - Перебор всех строк из *T* - ВРЕМЯ
- Старый подход №2:
  - Индекс всех слов со всеми возможными ошибками – ПАМЯТЬ

Подход Маасса-Новака

- Иногда: обнаружим один подходящий вариант и проверим его за $O(|P|)$.
- Иногда: будем искать P в предпосчитанном дереве строк, мало отличающихся от строк из T.

Случай $d = 1$

Пусть S – сжатый бор, содержащий все подстроки T, h_0 – высота S.

- Если P встречается в T как подстрока (без ошибок), то P найдется в S.
- Если P встречается в T с одной ошибкой, возможны два важных случая:
  - Ошибка после h_0-го символа, т.е. $\text{minpref}_s(P) > h_0$
  - Ошибка до h_0-го символа (включительно), т.е. $\text{minpref}_s(P) \leq h_0$

  где s – подстрока T, похожая на P.

Случай d = 1

- $\text{minpref}_s(P) > h_0$
  - Ищем P в боре S
  - Доходим до листа
  - Сверяем метку на этом листе с оставшимся суффиксом P (” старый подход №1”)

Случай d = 1

- $\text{minpref}_s(P) \le h_0$
  - Предподсчитаем все строки, отличающиеся от строк из T ровно одной ошибкой, и эта ошибка в позиции, не большей h_0.
  - В каждой позиции бывает $2|\Sigma|$ разных ошибок
  - Для каждой строки из S порождается $O(h_0)$ новых строк
  - Эти строки положим в сжатый бор S' высоты h_1
- В боре S' найдем все вхождения строки P
  - Их может быть несколько
  - Здесь пригодятся интервальные запросы

Общий случай

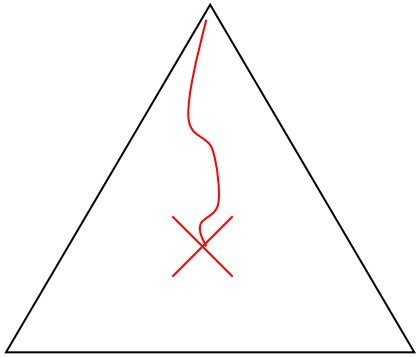
- Пусть P совпадает некоторой строкой s из S с d ошибками
- Если $\text{pref}_{h0}(P)=\text{pref}_{h0}(s)$, дойдем в S до листа, далее ”старый подход №1”, на этот раз $O(|P|d)$ времени.
- Иначе: в боре S' есть строка r, являющаяся строкой P с исправленной первой ошибкой.

Общий случай (2)

- Снова два случая:
- $\text{minpref}_s(r) > h_1$
  - Дойдем в боре S' до соответствующего листа, далее ”старый подход №1”
- $\text{minpref}_s(r) \le h_1$
  - Предподсчитаем все строки, отличающиеся от строк из S' одной ошибкой в первых h_1 символах.
  - При этом бор разрастется в $O(h_1)$ раз.
  - В боре S'' находим строчку P и так далее.

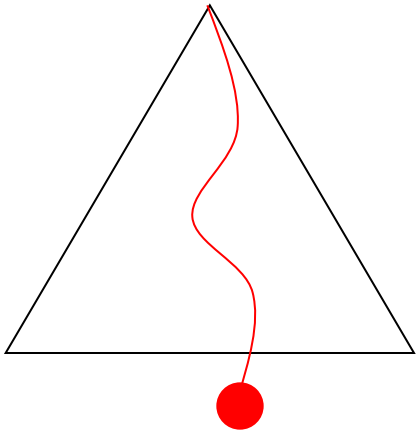
Оценка времени поиска

- В боре не оказалось строки *P*



- *O*(*m*)

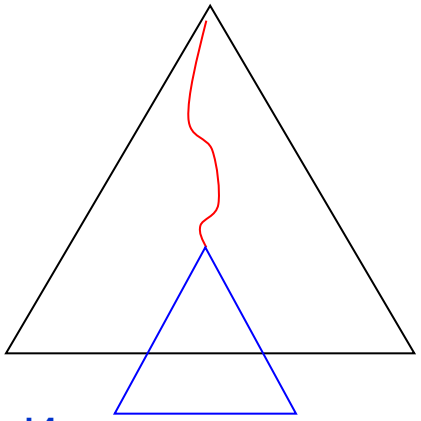
- Пройдя бор, мы дошли до листа



- *O*(*m* + *dm*)

Оценка времени поиска (2)

- При обходе бора кончилась строка *P*



- *O*(*m* + occ)

- Итого:

  O(*m* + occ)

d и |Σ| считаются константами

Оценка времени индексирования

- Суммарный размер вспомогательных боров:
  $O(h_0 h_1 \ldots h_{d-1} |S|)$
- Время построения индекса:
  $O(h_0 h_1 \ldots h_d |S|)$
- $h_i = O(\log n)$
  - В среднем
  - С высокой вероятностью
  - *Доказано Маассом и Новаком в модели постоянного эргодического источника*

Использование интервальных запросов

- Необходимо за время $O(occ)$ находить
  - все первые позиции вхождений
  - все документы, содержащие образец
- Обойдем все листья боров в лексикографическом порядке
- Для каждого вхождения в массив A запишем первую позицию вхождения/номер документа
- Для внутренних узлов бора, поддеревьям соответствуют интервалы в массиве A
- В массиве A необходимо за время $O(occ)$ обрабатывать запросы CRQ

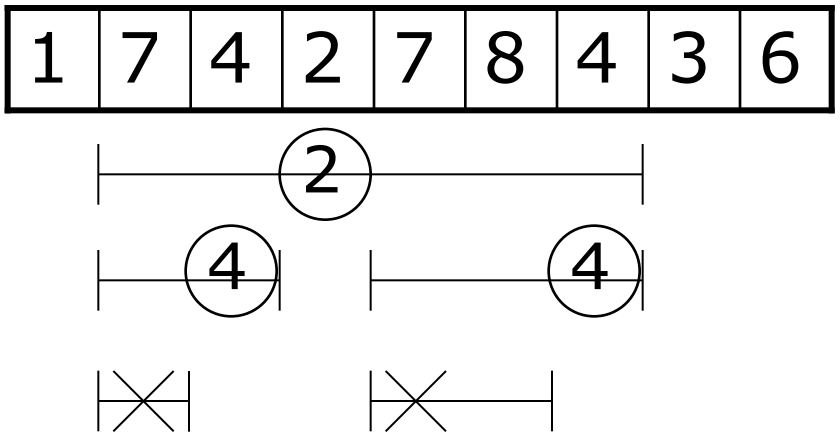
Использование интервальных запросов (2)

- CRQ сводится к BVRQ
  - Заведем массив *B*:
  - *B*[*i*] = предыдущая позиция в массиве *A* числа *A*[*i*], либо -1, если оно ранее не встречалось
  - CRQ-запрос (*i*,*j*) сводится к BVRQ-запросу (*i*,*j*,*i*-1) для массива *B*.

A	1	1	2	1	1	2	1	3	3
B	**-1**	0	**-1**	1	3	2	4	**-1**	7

Использование интервальных запросов (3)

- BVRQ решается за время <*O*(occ),*O*(n)> сведением к RMQ:
- Запрос (2,7,6):



Часть IV - Заключение

- Алгоритм Маасса-Новака - первый алгоритм, обрабатывающий запрос за $O(m+occ)$
- Важно улучшить размер и время создания индекса (в данном алгоритме огромные константы)
- Неизвестен алгоритм, с приемлемой оценкой размера индекса в худшем случае

Вопросы ?