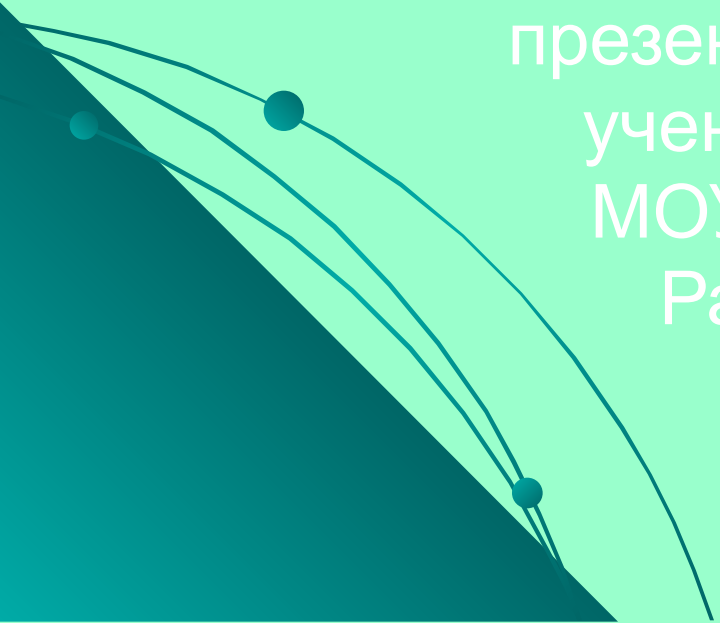


Различные виды уравнения прямой

презентацию подготовила
ученица 7 «Б» класса
МОУ «Гимназия №1»
Распарина Ольга



Общее уравнение прямой

Уравнение $Ax + By + C = 0$ (где A , B и C могут принимать любые значения, лишь бы коэффициенты A , B не были равны нулю оба сразу) представляет прямую линию.

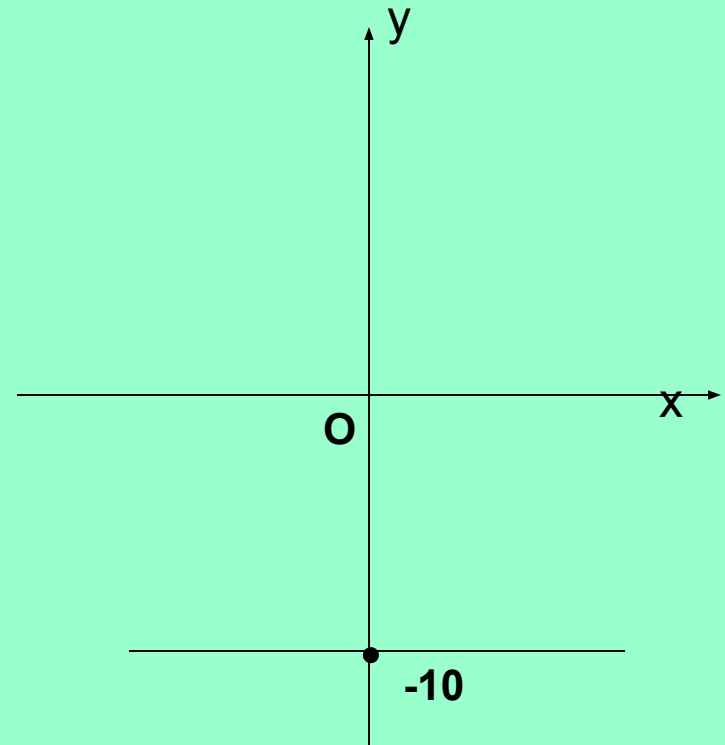
- Всякую прямую можно представить уравнением этого вида. Поэтому его называют общим уравнением прямой.

$Ax + By + C = 0$

1) Если $A=0$, то уравнение представляет прямую, параллельную оси Ox ($y = \dots$).

Пример 1.

Графиком уравнения $y = -10$ является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0; -10)$.

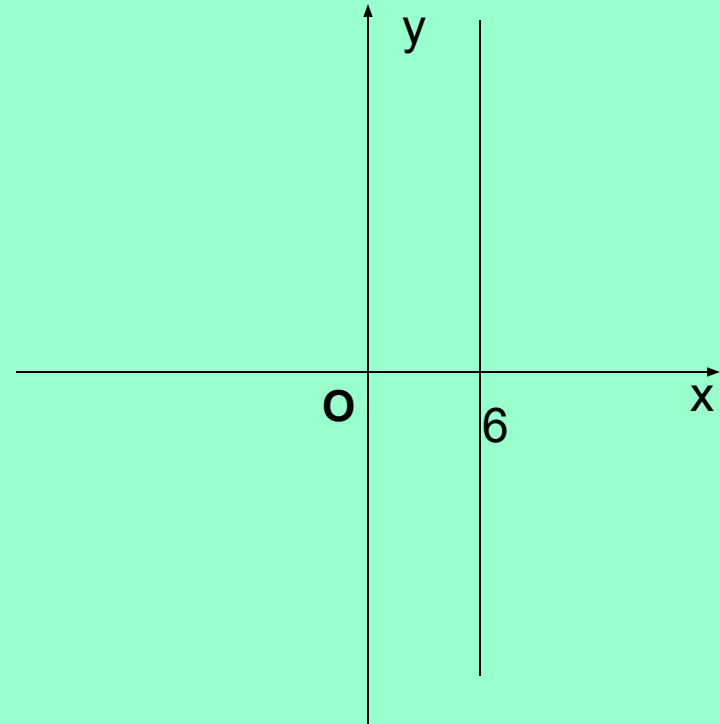


$Ax + By + C = 0$

2) Если $B=0$, то уравнение представляет прямую, параллельную оси Oy ($x = -\frac{C}{A}$).

Пример 2.

Графиком уравнения $x=6$ является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(6;0)$.

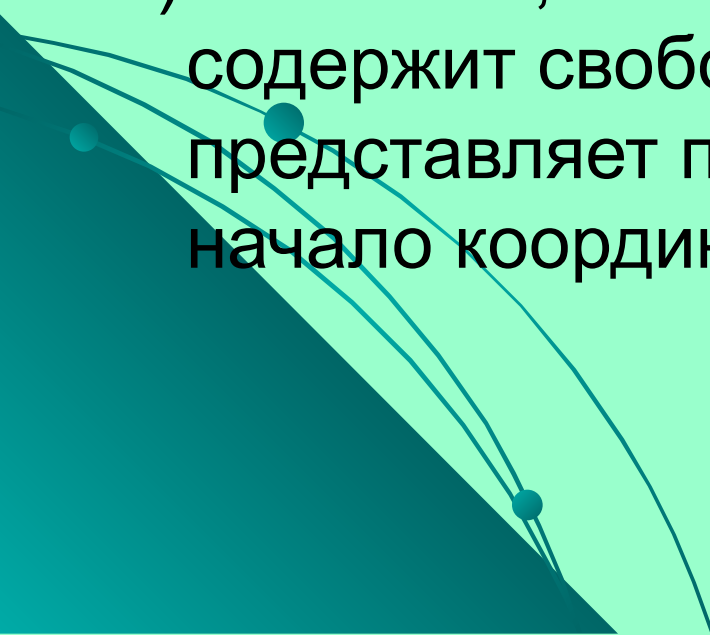


$Ax + By + C = 0$

3) Когда $B=0$, то $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$

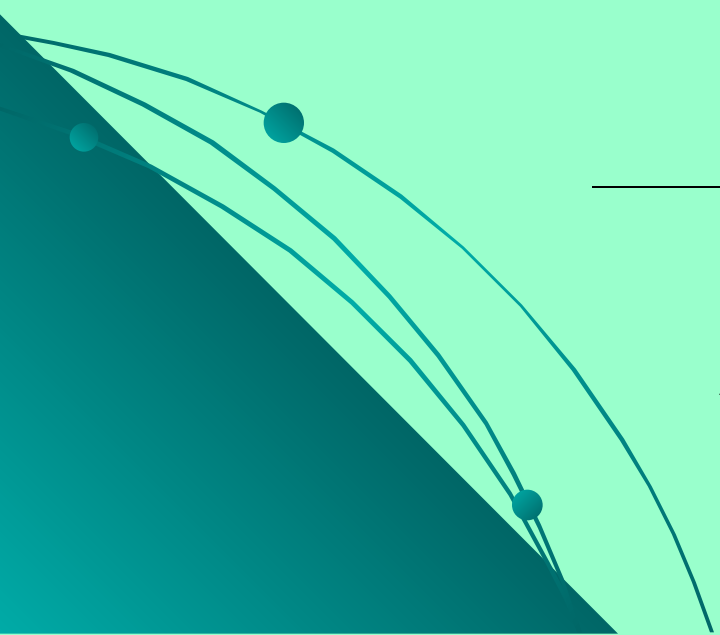
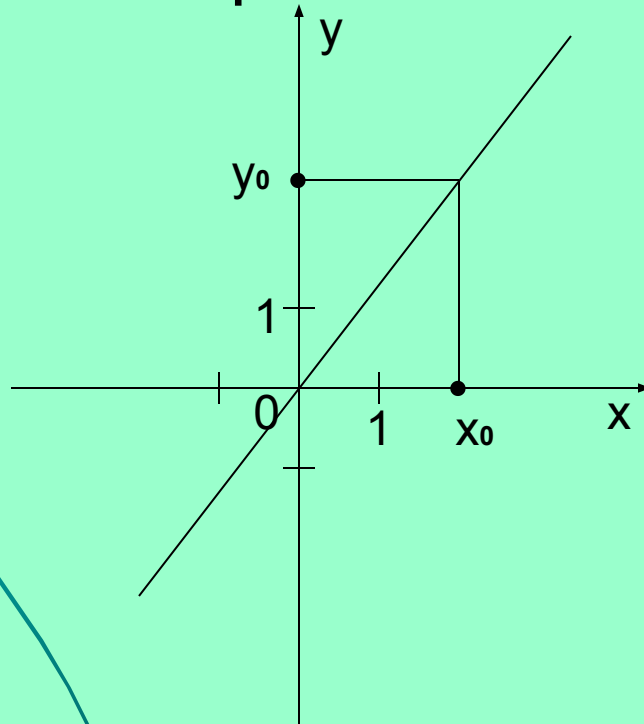
Уравнение $y = kx + m$, где $k = -\frac{A}{B}$, а $m = -\frac{C}{B}$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

4) Если $C=0$, то есть уравнение $Ax + By + C = 0$ не содержит свободного члена, то оно представляет прямую, проходящую через начало координат.



$Ax + By + C = 0$

$(y = -\frac{A}{B}x; \text{ то есть } y = kx - \text{ где } k - \text{ угловой}$
коэффициент прямой. Ясно, что $k = \frac{y_0}{x_0}$, где x_0
и y_0 координаты произвольной точки прямой,
 $x_0 \neq 0$).

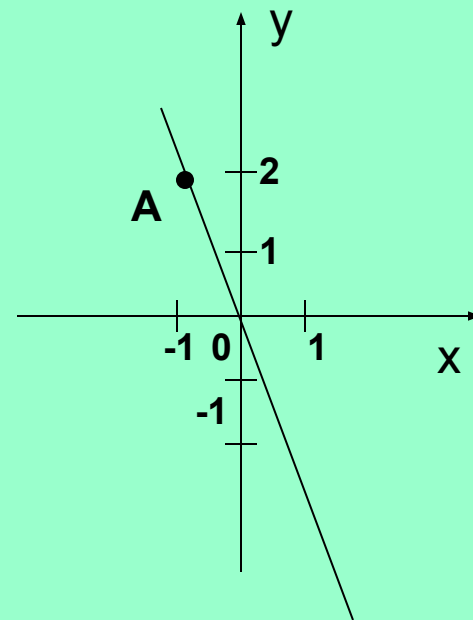


Пример 3.

Составить уравнение прямой, изображенной на рисунке.

Решение.

Так как прямая проходит через начало координат, то она задается уравнением $y=kx$. Определим угловой коэффициент этой прямой. Возьмем к примеру точку А этой прямой, тогда $k = \frac{y_A}{x_A}$, то есть $k = \frac{2}{-1}$.
Значит, $k=-2$ и уравнение данной прямой имеет вид: $y=-2x$.

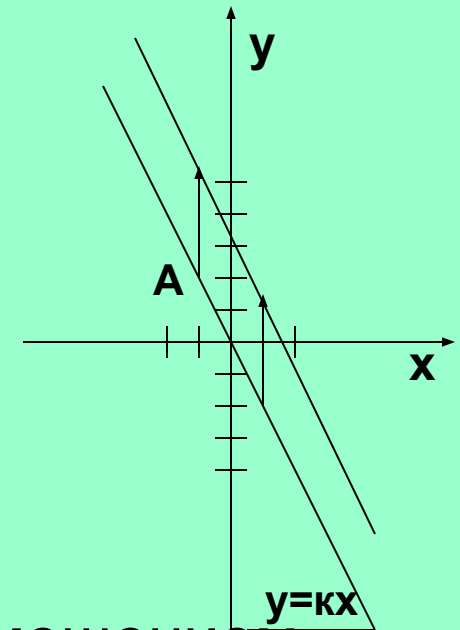


Пример 4.

Составить уравнение прямой, изображенной на рисунке.

Решение.

Данная прямая получена из прямой $y=kx$ смещением последней на 3 ед. отрезка вверх вдоль оси Oy . Прямые $y=kx$ и данная параллельны, следовательно, их угловые коэффициенты равны. Определив угловой коэффициент $\frac{y_A}{x_A}$ прямой $y=kx$ ($k=$), получим, что угловой коэффициент данной прямой равен -2. А так как данная прямая пересекает ось Oy в точке с ординатой 3, то в уравнении данной прямой ($y=kx+m$), $k=-2$, $m=3$. Искомое уравнение имеет вид $y= -2x+3$.

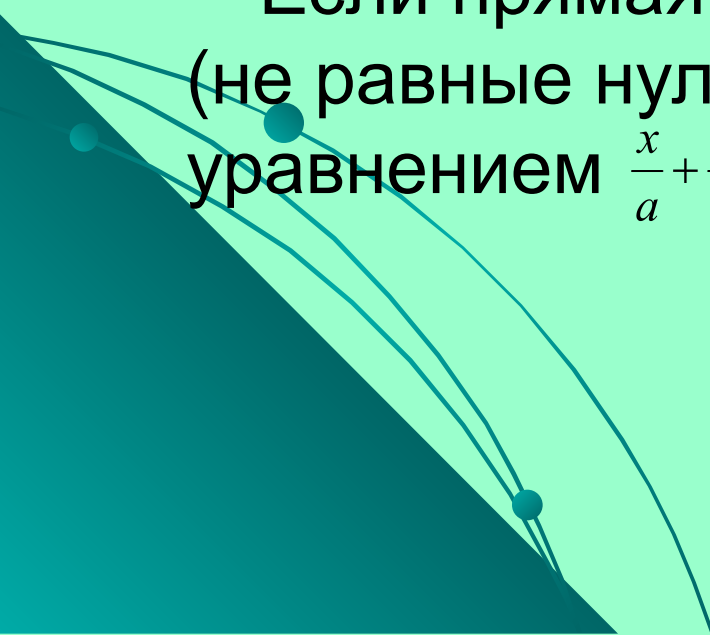


Теоремы

Уравнение изображенной прямой можно получить и иначе, если иметь ввиду следующие утверждения.

Теорема 1.


Если прямая отсекает на осях отрезки a и b (не равные нулю), то ее можно представить уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



Теорема 2.

Уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ представляет прямую, отсекающую на осях (считая от начала координат) отрезки a и b .

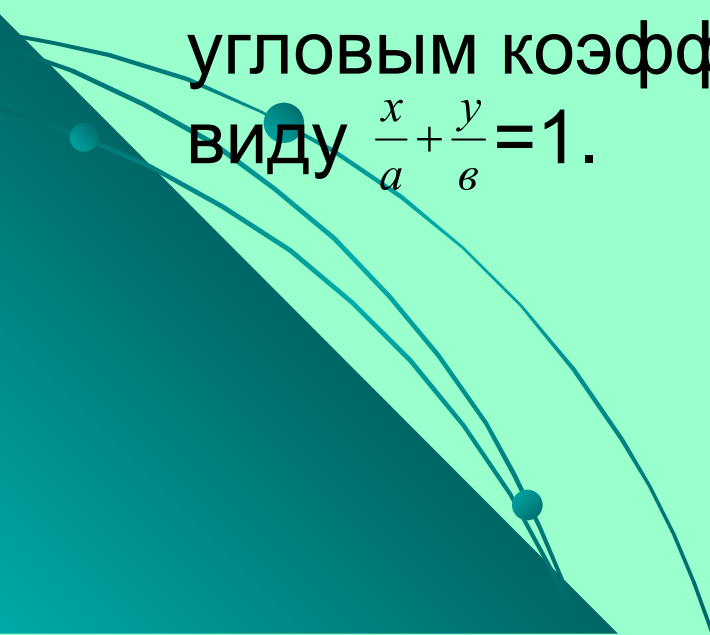
Уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется уравнением прямой в отрезках (ясно, что $a \neq 0$, $b \neq 0$).



Вывод уравнения прямой в отрезках.

Уравнение прямой в отрезках легко получается либо из общего уравнения прямой, либо из уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Пусть $y=kx+m$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом. Приведем его к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



$$y=kx+m$$

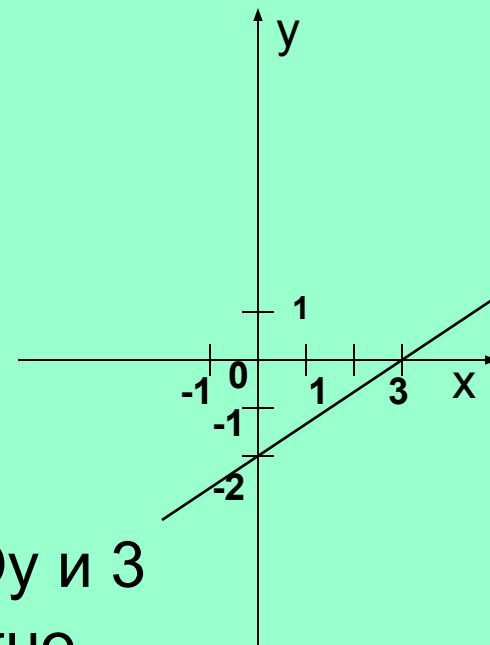
Для этого перенесем слагаемое kx в левую часть уравнения, изменив его знак на противоположный и разделим обе части полученного равенства на m . Получим следующее уравнение $\frac{y}{m} - \frac{kx}{m} = 1$. Перепишем это уравнение в виде $-\frac{\frac{k}{m}}{1} \cdot x + \frac{y}{m} = 1$.

Учтем, что $-\frac{k}{m} = -\frac{1}{\frac{m}{k}}$. Следовательно, $-\frac{k}{m} \cdot x = \frac{X}{-\frac{m}{k}}$. Обозначив $-\frac{m}{k}$ буквой «а», а m – буквой «в» получим искомое уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Рассмотрим следующий пример

Пример 5.

Составить уравнение прямой, изображенной на рисунке.



Решение.

Прямая отсекает отрезки -2 на оси Oy и 3 – на оси Ox. Поэтому ее уравнение можно записать так: 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ или $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$. Из последнего уравнения можно получить уравнение прямой в общем виде и уравнение прямой с угловым коэффициентом.

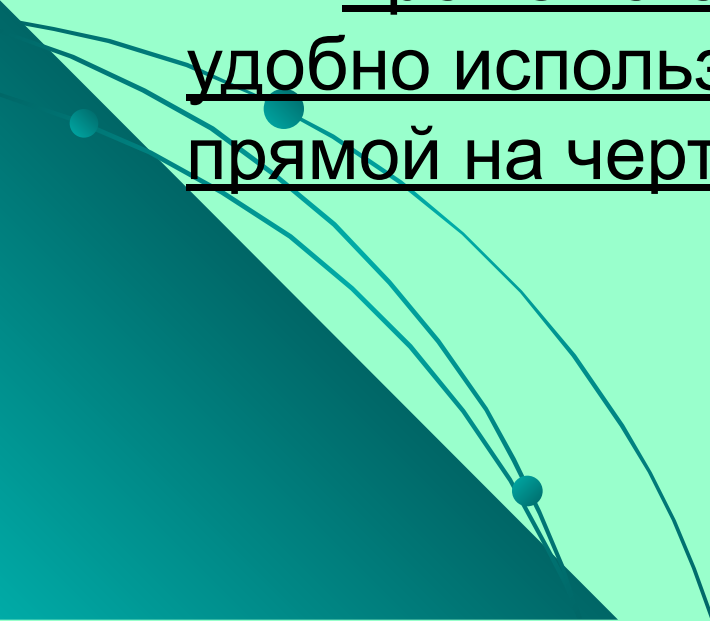
Пример 5.

$$2) \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \Big| \cdot 6. \Leftrightarrow 2x - 3y = 6. \Leftrightarrow 2x - 3y - 6 = 0.$$

$$3) \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1. \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{x}{3} - 1 \Big| \cdot 2. \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 2.$$

В ответе можно записать любое из уравнений 1), 2) или 3).

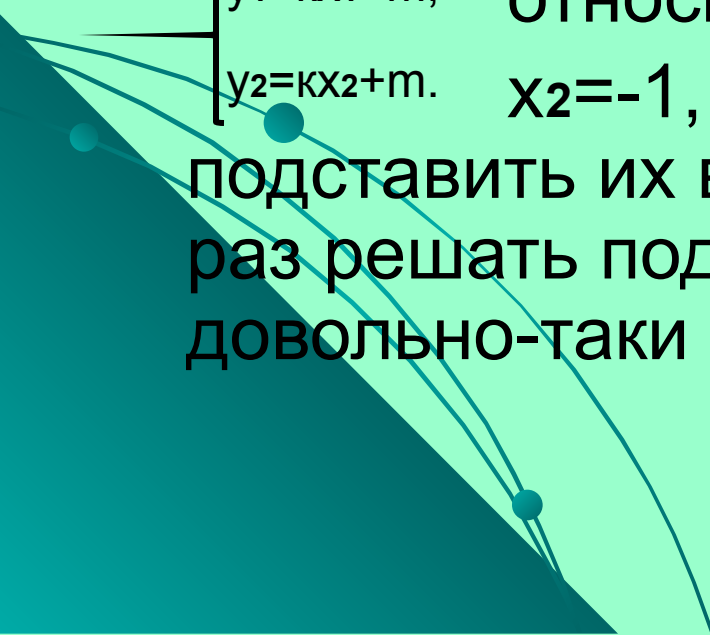
Кроме того, уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения этой прямой на чертеже.



Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Теперь, допустим, нужно записать уравнение прямой проходящей через две точки А (1;-2) и В (-1;4). Очевидно, что для решения этой задачи надо составить и решить систему уравнений

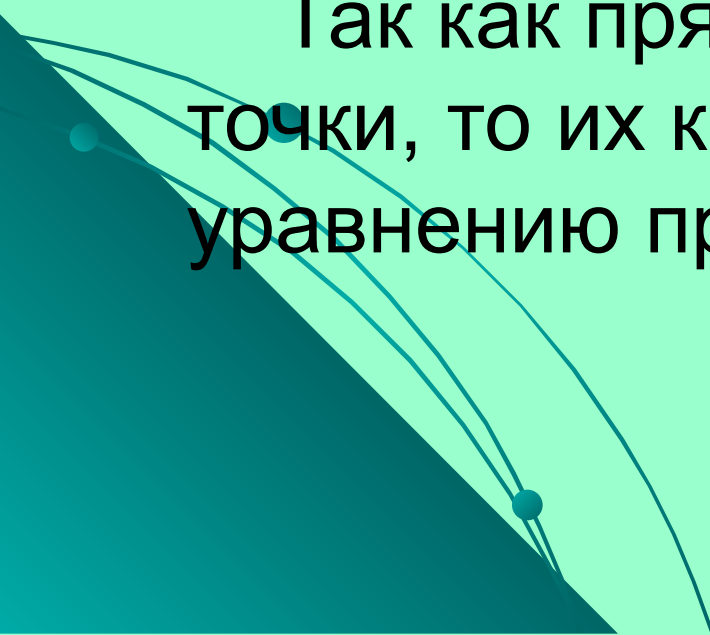
$$\begin{cases} y_1=kx_1+m, & \text{относительно } k \text{ и } m, \text{ где } x_1=1, y_1=-2, \\ y_2=kx_2+m. & x_2=-1, y_2=4. \end{cases}$$
 И, найдя значения k и m , подставить их в уравнение $y=kx+m$. Всякий раз решать подобные задачи таким способом довольно-таки нерационально.



Решим эту задачу в общем виде.

Пусть требуется составить уравнение прямой, проходящей через две различные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Так как прямая проходит через эти точки, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой $y = kx + m$.



Решим эту задачу в общем виде.

Решим систему уравнений
относительно k и m . Найдя

значения k и m , подставим их в уравнение $y=kx+m$.

Итак,

$$\begin{cases} y_1=kx_1+m, \\ y_2=kx_2+m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=y_1-kx_1, \\ y_2=kx_2+y_1-kx_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=y_1-kx_1, \\ (y_2-y_1)=k \cdot (x_2-x_1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=y_1-kx_1, \\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m=y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot x_1, \\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \end{cases}$$

Уравнение прямой примет вид: $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot x+y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot x_1$.

Преобразуем его

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1,$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

$$\odot (y - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1) \cdot (x - x_1) \quad | \quad \div (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1),$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

$$-\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = -\frac{x - x_1}{x_1 - x_2},$$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}}$$

Мы получили уравнение прямой,
проходящей через две различные точки $(x_1;$
 $y_1)$ и $(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2.$

$$\odot (y-y_1).(x_2-x_1)=(y_2-y_1).(x-x_1)$$

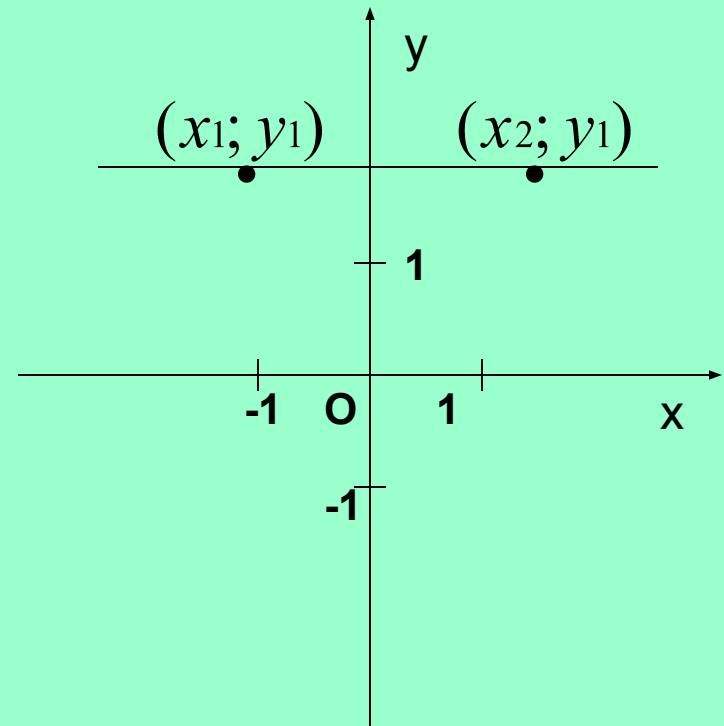
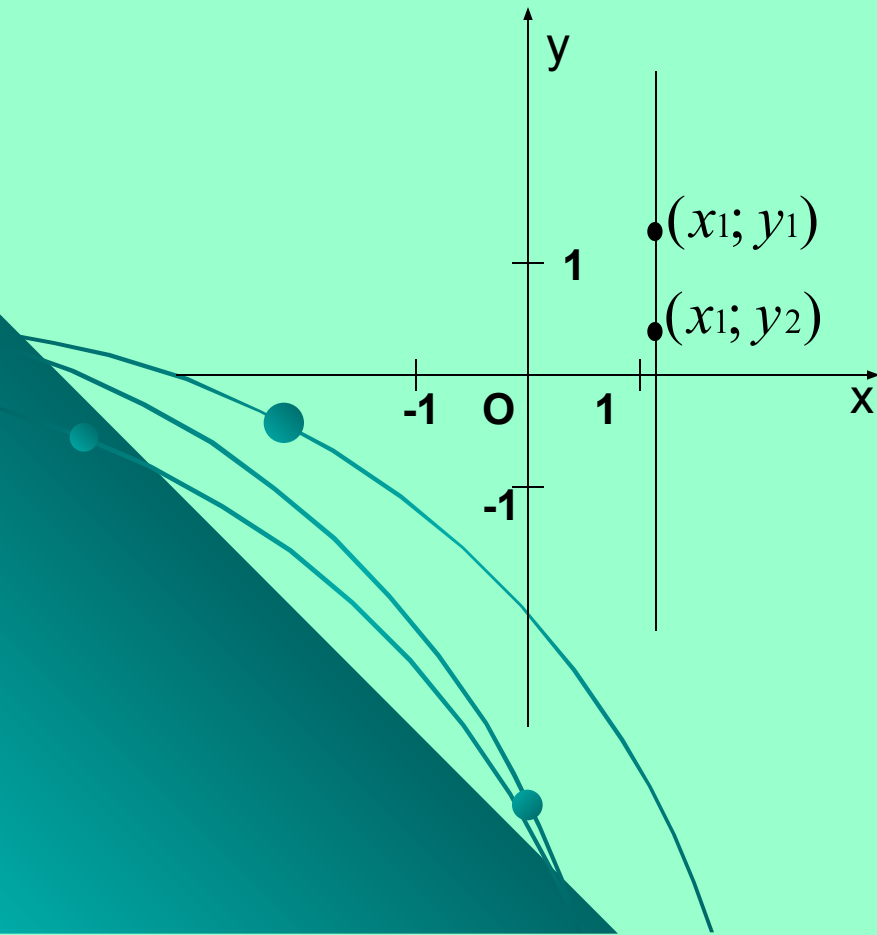
А что если $x_2=x_1$ (при условии, что $y_2 \neq y_1$) или $y_2=y_1$ (при условии, что $x_2 \neq x_1$)?

В этом случае уравнение (\odot) будет выглядеть так:

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=0 \text{ или } (y-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

Откуда получим уравнения: $x=x_1$ или $y=y_1$. То есть уравнения прямых, параллельных координатным осям.

В первом случае – уравнение прямой, параллельной оси Oy , а во втором случае – уравнение прямой, параллельной оси Ox .



Пример 6.

Записать уравнение прямой, проходящей через точки А (1;-2) и В (-1;4).

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две различные точки.

Перепишем его в виде $\frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{x - x_A}{x_A - x_B}$

Теперь подставим в него координаты данных точек:

$$\frac{x-1}{1-(-1)} = \frac{y-(-2)}{-2-4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-6} \Big| \cdot (-6) \Leftrightarrow -3(x-1) = y+2. \Leftrightarrow y = -3x+1.$$

Итак, $y = -3x+1$ – уравнение прямой, проходящей через точки А (1;-2) и В (-1;4).

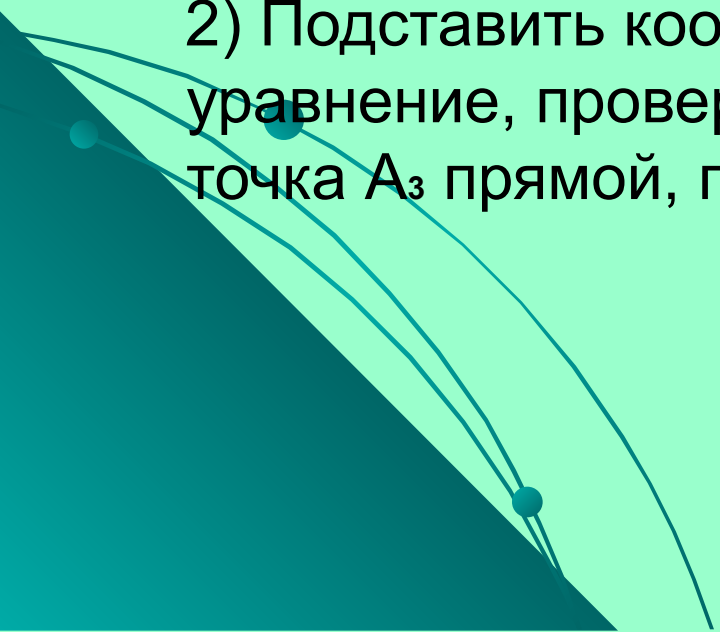
Ответ: $y = -3x+1$

Рассмотрим задачу:

«Лежат ли точки $A_1 (-2;5)$, $A_2 (4;3)$, $A_3 (16;-1)$ на одной прямой?».

Решить ее можно так:

- 1) Составить уравнение прямой, проходящей, например, через точки A_1 и A_2 .
- 2) Подставить координаты точки A_3 в полученное уравнение, проверив тем самым, принадлежит ли точка A_3 прямой, проходящей через точки A_1 и A_2 .



Итак: «Лежат ли точки $A_1 (-2;5)$, $A_2 (4;3)$, $A_3 (16;-1)$ на одной прямой?»

Использование уравнения прямой, проходящей через две различные точки, значительно сокращает процесс поиска решения данной задачи. Положив в уравнении $\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ $x = x_3$, $y = y_3$ и, подставив координаты данных точек в равенство $\frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_1 - x_2}$, получим: $\frac{16 - (-2)}{-2 - 4} = \frac{-1 - 5}{5 - 3}$, $\frac{18}{-6} = \frac{-6}{2}$, $-3 = -3$. Полученное равенство верное, следовательно, точки A_1 , A_2 и A_3 лежат на одной прямой.

Итак, использование различных видов уравнений прямой позволяет рационализировать поиск решения ряда задач.

Спасибо за
внимание!!!

