Различные виды уравнения прямой

презентацию подготовила
ученица 7 «Б» класса
МОУ «Гимназия №1»
Распарина Ольга

Общее уравнение прямой

Уравнение Ax+By+C=0 (где A, B и C могут принимать любые значения, лишь бы коэффициенты A, B не были равны нулю оба сразу) представляет прямую линию.

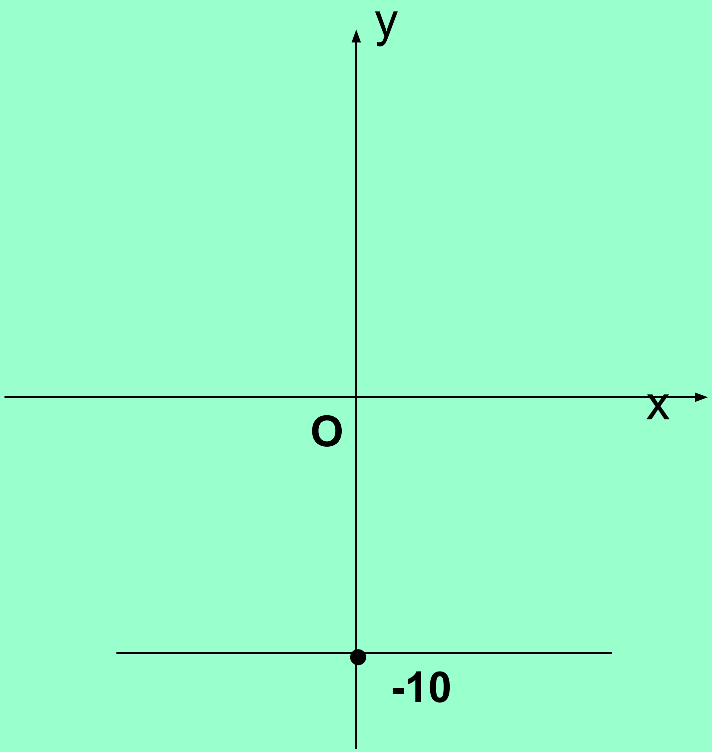
Всякую прямую можно представить уравнением этого вида. Поэтому его называют общим уравнением прямой.

Ax+By+C=0

1) Если A=0, то уравнение представляет прямую, параллельную оси Ox (y= $-\frac{C}{B}$).

Пример 1.

Графиком уравнения y=-10 является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку (0;-10).

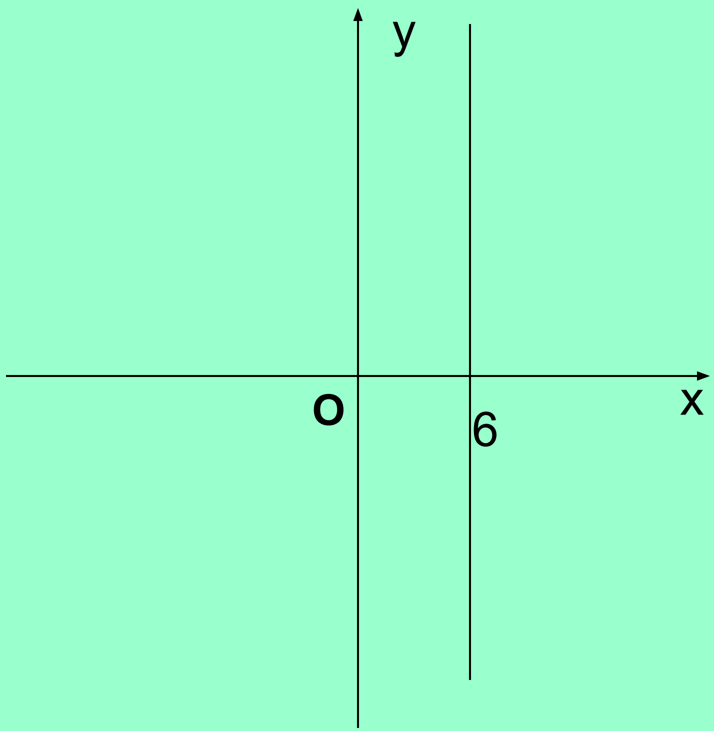


Ax+By+C=0

2) Если B=0, то уравнение представляет прямую, параллельную оси Oy (x= $-\frac{C}{A}$).

Пример 2.

Графиком уравнения x=6 является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку (6;0).



Ax+By+C=0

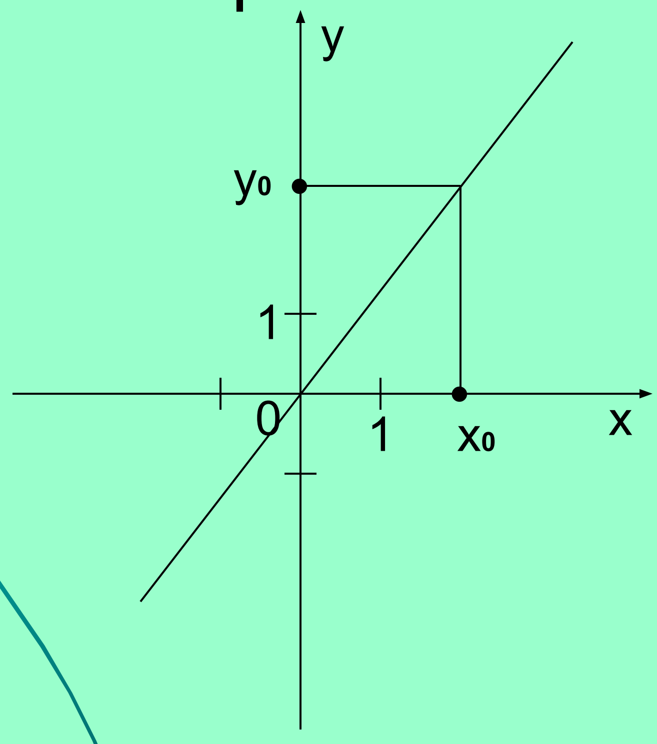
3) Когда B=0, то y= $-\frac{A}{B}\cdot x-\frac{C}{B}$

Уравнение y=кх+m, где к= $-\frac{A}{B}$*, а m=* $-\frac{C}{B}$ *называется уравнением прямой с угловым коэффициентом к.*

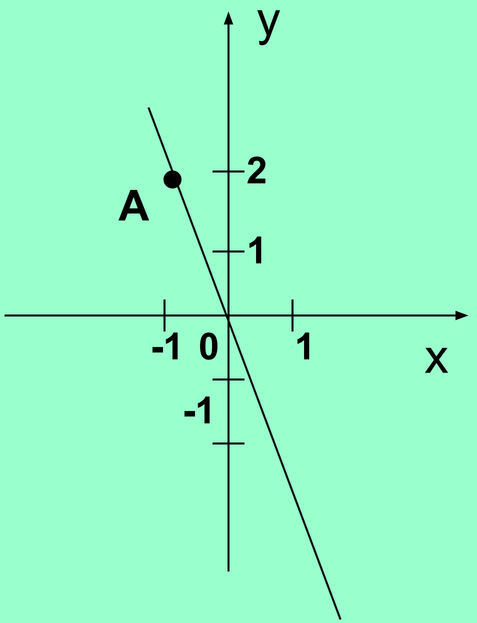
4) Если C=0, то есть уравнение Ax+By+C=0 не содержит свободного члена, то оно представляет прямую, проходящую через начало координат.

Ax+By+C=0

(y= $-\frac{A}{B}\cdot x$, то есть y=кх – где к – угловой коэффициент прямой. Ясно, что к= $\frac{y_0}{x_0}$, где x_0 и y_0 координаты произвольной точки прямой, $x_0 \neq 0$).



Пример 3.

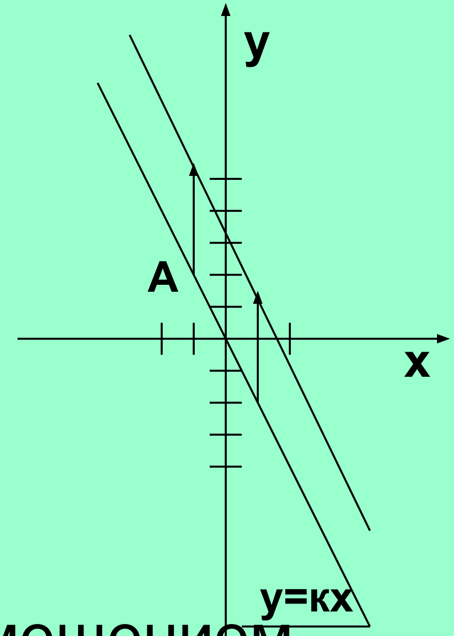


Составить уравнение прямой, изображенной на рисунке.

Решение.

Так как прямая проходит через начало координат, то она задается уравнением у=кх. Определим угловой коэффициент этой прямой. Возьмем к примеру точку А этой прямой, тогда к=$\frac{y_A}{x_A}$, то есть к=$\frac{2}{-1}$. Значит, к=-2 и уравнение данной прямой имеет вид: у=-2х.

Пример 4.



Составить уравнение прямой, изображенной на рисунке.

Решение.

Данная прямая получена из прямой у=кх смещением последней на 3 ед. отрезка вверх вдоль оси Оу. Прямые у=кх и данная параллельны, следовательно, их угловые коэффициенты равны. Определив угловой коэффициент прямой у=кх (к= $\frac{Y_A}{X_A}$), получим, что угловой коэффициент данной прямой равен -2. А так как данная прямая пересекает ось Оу в точке с ординатой 3, то в уравнении данной прямой (у=кх+m), к=-2, m=3. Искомое уравнение имеет вид у= =-2х+3.

Теоремы

Уравнение изображенной прямой можно получить и иначе, если иметь ввиду следующие утверждения.

Теорема 1.

Если прямая отсекает на осях отрезки а и в (не равные нулю), то ее можно представить уравнением $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}$=1.

Теорема 2.

Уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}$=1 представляет прямую, отсекающую на осях (считая от начала координат) отрезки а и в.

Уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}$=1 называется уравнением прямой в отрезках (ясно, что а≠0, в≠0).

Вывод уравнения прямой в отрезках.

Уравнение прямой в отрезках легко получается либо из общего уравнения прямой, либо из уравнения прямой с угловым коэффициентом.

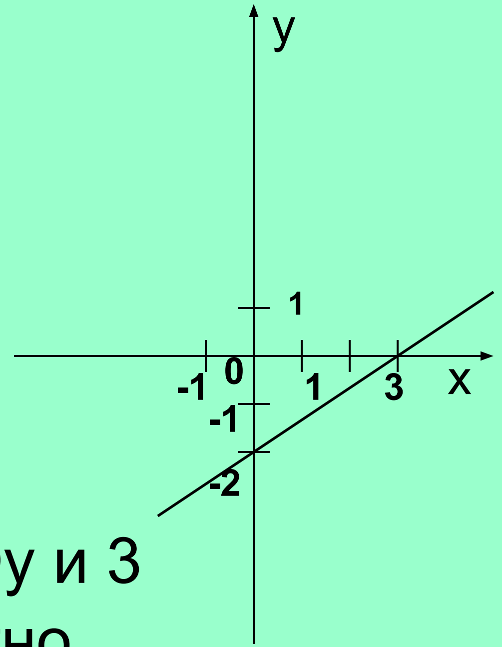
Пусть у=кх+m – уравнение прямой с угловым коэффициентом. Приведем его к виду $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}$=1.

y=кх+m

Для этого перенесем слагаемое кх в левую часть уравнения, изменив его знак на противоположный и разделим обе части полученного равенства на m. Получим следующее уравнение $\frac{y}{m}-\frac{кx}{m}$=1. Перепишем это уравнение в виде $-\frac{к}{m}\cdot x+\frac{y}{m}$=1.

Учтем, что $-\frac{к}{m}=-\frac{1}{\frac{m}{к}}$. Следовательно, $-\frac{к}{m}\cdot x=\frac{X}{-\frac{m}{к}}$. Обозначив $-\frac{m}{к}$ буквой «а», а m – буквой «в» получим искомое уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}$ =1.

Рассмотрим следующий пример



Пример 5.

Составить уравнение прямой, изображенной на рисунке.

Решение.

Прямая отсекает отрезки -2 на оси Оу и 3 – на оси Ох. Поэтому ее уравнение можно записать так:1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}$ =1 или $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}$=1. Из последнего уравнения можно получить уравнение прямой в общем виде и уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пример 5.

2) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1 \Big| \cdot 6.$ ⇔ 2x-3y=6. ⇔ 2x-3y-6=0.

3) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1.$ ⇔ $\frac{y}{2}=\frac{x}{3}-1 \Big| \cdot 2.$ ⇔ y= $\frac{2}{3}x$-2.

В ответе можно записать любое из уравнений 1), 2) или 3).

<u>Кроме того, уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения этой прямой на чертеже.</u>

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Теперь, допустим, нужно записать уравнение прямой проходящей через две точки А (1;-2) и В (-1;4). Очевидно, что для решения этой задачи надо составить и решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1=кx_1+m, \\ y_2=кx_2+m. \end{cases}$$

относительно к и m, где $x_1=1$, $y_1=-2$, $x_2=-1$, $y_2=4$. И, найдя значения к и m, подставить их в уравнение $y=кx+m$. Всякий раз решать подобные задачи таким способом довольно-таки нерационально.

Решим эту задачу в общем виде.

Пусть требуется составить уравнение прямой, проходящей через две различные точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Так как прямая проходит через эти точки, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой $y=kx+m$.

Решим эту задачу в общем виде.

Решим систему уравнений $\begin{cases} y_1 = kx_1 + m, \\ y_2 = kx_2 + m. \end{cases}$ относительно к и m. Найдя значения к и m, подставим их в уравнение y=кx+m.

Итак,

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m, \\ y_2 = kx_2 + m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = y_1 - kx_1, \\ y_2 = kx_2 + y_1 - kx_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = y_1 - kx_1, \\ (y_2 - y_1) = k \cdot (x_2 - x_1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = y_1 - kx_1, \\ k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1, \\ k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{cases}$$

Уравнение прямой примет вид: $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$.

Преобразуем его

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1,$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot (x-x_1).$$

☼ $(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)=(y_2-y_1)\cdot(x-x_1)\,\Big|\div(x_2-x_1)\cdot(y_2-y_1),$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

$$-\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=-\frac{x-x_1}{x_1-x_2},$$

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}}$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через две различные точки (x_1; y_1) и (x_2;y_2), причем $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

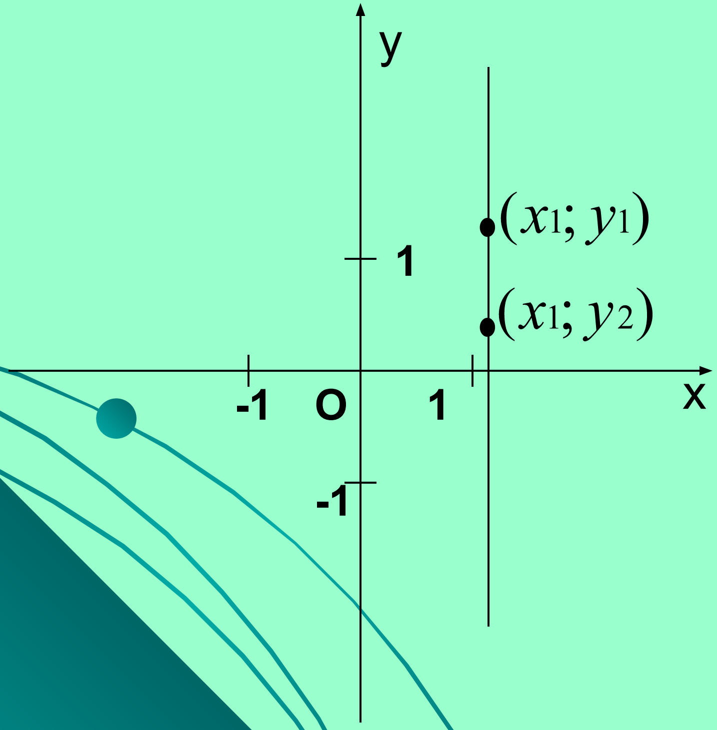
☼ $(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)=(y_2-y_1)\cdot(x-x_1)$

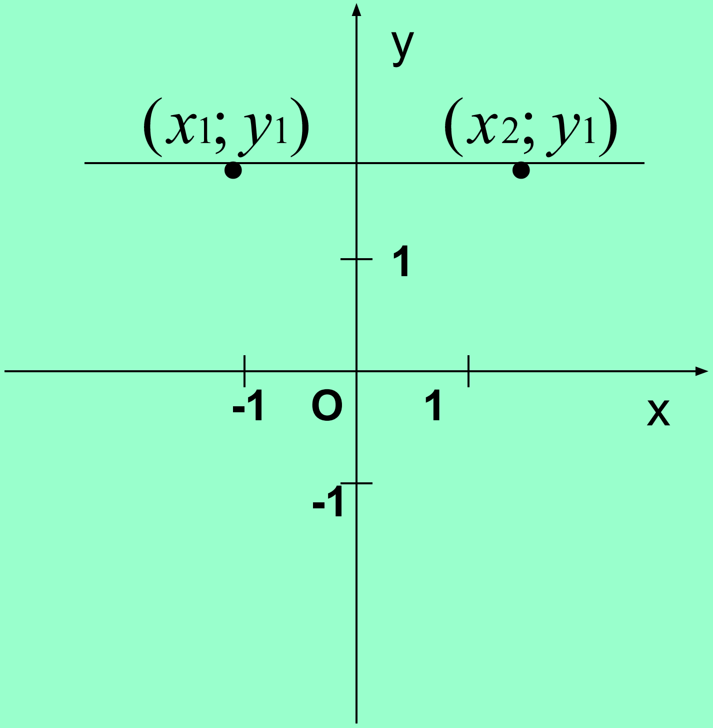
А что если $x_2=x_1$ (при условии, что $y_2\neq y_1$) или $y_2=y_1$ (при условии, что $x_2\neq x_1$)?

В этом случае уравнение (☼) будет выглядеть так:

$(y_2-y_1)\,(x-x_1)=0$ или $(y-y_1)\,(x_2-x_1)=0$. Откуда получим уравнения: $x=x_1$ или $y=y_1$. То есть <u>уравнения прямых, параллельных координатным осям</u>.

В первом случае – уравнение прямой, параллельной оси Оу, а во втором случае – уравнение прямой, параллельной оси Ох.





Пример 6.

Записать уравнение прямой, проходящей через точки А (1;-2) и В (-1;4).

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две различные точки.

Перепишем его в виде $\frac{y-y_A}{y_A-y_B}=\frac{x-x_A}{x_A-x_B}$

Теперь подставим в него координаты данных точек:

$$\frac{x-1}{1-(-1)}=\frac{y-(-2)}{-2-4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-6}\Bigg|\cdot(-6) \Leftrightarrow -3(x-1)=y+2. \Leftrightarrow y=-3x+1.$$

Итак, y=-3x+1 – уравнение прямой, проходящей через точки А (1;-2) и В (-1;4).

<u>Ответ:</u> y=-3x+1

Рассмотрим задачу:

«Лежат ли точки A_1 (-2;5), A_2 (4;3), A_3 (16;-1) на одной прямой?».

Решить ее можно так:

1) Составить уравнение прямой, проходящей, например, через точки A_1 и A_2.

2) Подставить координаты точки A_3 в полученное уравнение, проверив тем самым, принадлежит ли точка A_3 прямой, проходящей через точки A_1 и A_2.

Итак: «Лежат ли точки А**1** (-2;5), А**2** (4;3), А**3** (16;-1) на одной прямой?»

Использование уравнения прямой, проходящей через две различные точки, значительно сокращает процесс поиска решения данной задачи. Положив в уравнении $\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$ $x=x_3$, $y=y_3$ и, подставив координаты данных точек в равенство $\frac{y_3-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x_3-x_1}{x_1-x_2}$, получим: $\frac{16-(-2)}{-2-4}=\frac{-1-5}{5-3}, \frac{18}{-6}=\frac{-6}{2}, -3=-3$. Полученное равенство верное, следовательно, точки $А_1$, $А_2$ и $А_3$ лежат на одной прямой .

Итак, использование различных видов уравнений прямой позволяет рационализировать поиск решения ряда задач.

Спасибо за внимание!!!