Тема. Вступ до стереометрії

Тема уроку. Наслідки з аксіом стереометрії

Урок №9

Почесне місце в геометрії займають ***аксіоми***. Вони виражають найбільш важливі властивості основних геометричних фігур.

Усі інші властивості геометричних фігур встановлюються міркуваннями та опираються на аксіоми або на доведені твердження, які опиралися на аксіоми. Такі міркування називають ***доведеннями***.

Твердження, істинність якого доведено і яке використовують для доведення інших тверджень, називають ***теоремою***.

Найпростішими з них є твердження для основних фігур стереометрії, які називають наслідками з аксіом стереометрії. Розглянемо теореми, які є наслідками аксіом стереометрії.

Теорема 1.

Через пряму і точку, що не належить їй, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай BC – дана пряма і A – точка, що не належить їй (рис. 2.9). Через точки A і B проведемо пряму b. Прямі BC і b різні та перетинаються в точці B. За аксіомою II_3, через них можна провести площину α. Доведемо, що вона єдина, методом від супротивного. Припустимо, що існує інша площина β, яка містить пряму BC і точку A. Тоді, згідно з аксіомою II_4, площини α і β перетинаються по спільній прямій, якій належать точки A, B, C, що суперечить умові. Припущення неправильне. Площина α – єдина. *Теорему доведено.*

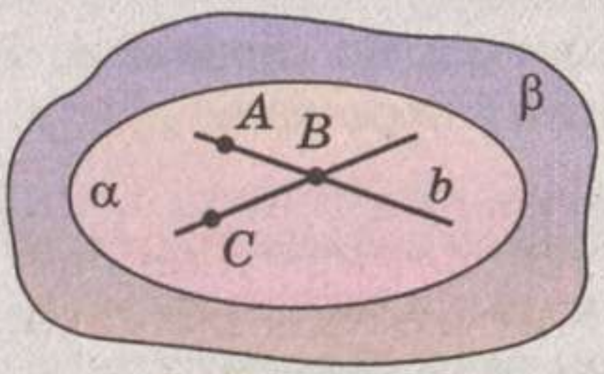


Рис. 2.9

Теорема 2.

Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині.

Доведення. Нехай задано пряму a, площину α і точки A та B прямої a, які належать α (рис. 2.10). Виберемо точку C, що не належить прямій a. Через точку C і пряму a проведемо площину β. Якщо α і β збіжаться, то пряма a належить площині α. Якщо ж площини α і β різні і мають дві спільні точки A і B, то вони перетинаються по прямій a_1, що містить ці точки. Отже, через дві точки A і B проходять дві прямі a і a_1, що суперечить аксіомі належності I_2. Тому a і a_1 – збігаються. Але оскільки a_1 належить площині α, то і пряма a теж належить α. *Теорему доведено.*

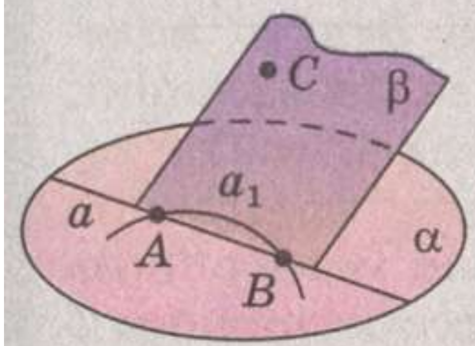


Рис. 2.10

Теорема 3.

Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай A, B, C – задані точки (рис. 2.11). Проведемо через точки A і C пряму b, а через точки A і B – пряму a. Прямі a і b різні та мають спільну точку A. Через них можна провести площину α. Доведемо, що вона єдина, методом від супротивного. Припустимо, що існує інша площина β, що містить точки A, B, C. Тоді, за теоремою 2, прямі a і b належать площині β. Отже, площини α і β мають дві спільні прямі a і b, які перетинаються, що суперечить аксіомі II_3. Отже, площина α – єдина. *Теорему доведено.*

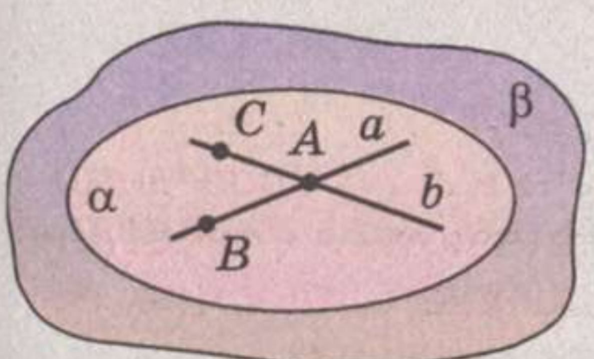


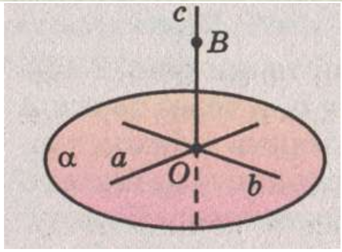
Рис. 2.11

Розглянемо використання наслідків аксіом до розв'язування задач.

Задача 1.

Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка б не лежала з ними в одній площині?

Розв'язання	Чому саме так?
Через прямі a і b (рис. 2.12), які мають спільну точку O, можна провести площину α. Візьмемо точку B, яка не належить α. Через точки O і B проведемо пряму c. Пряма c не лежить на площині α, бо якби пряма c належала площині α, то і точка B належала б площині α. Отже, через точку перетину прямих a і b можна провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині. *Відповідь*. Можна.	Очевидно, що точки площини задаватимуть прямі, які будуть належати цій самій площині. Якщо ж взяти точку перетину двох прямих на площині та точку поза площиною, то через будь-які дві точки простору можна провести пряму. Ця пряма матиме лише одну спільну точку з площиною, а значить, буде її перетинати.

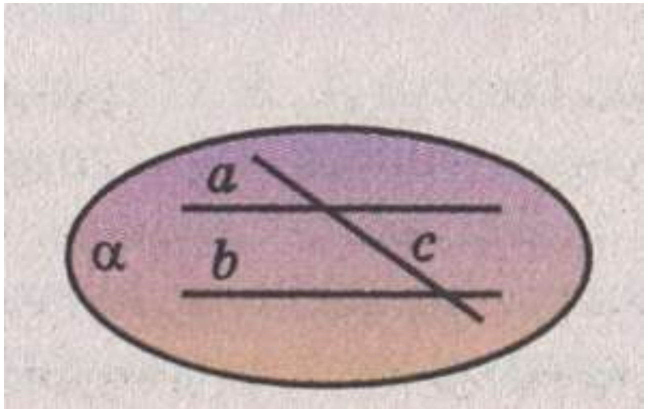


Задача 2.

Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

Доведення

Оскільки прямі a і b паралельні, то, за означенням, ці прямі лежать в одній площині α (рис. 2.13). Довільна пряма c, яка перетинає a і b, має з площиною α дві спільні точки – точки перетину. Згідно з теоремою 2, ця пряма належить площині α. Отже, всі прямі, які перетинають дві паралельні прямі, лежать в одній площині, що й вимагалося довести.



Задача 3.

Доведіть, що коли прямі AB і CD не лежать в одній площині, то прямі AC і BD теж не лежать в одній площині.

Доведення	Чому саме так?
Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що прямі AC і BD лежать в одній площині (рис. 2.14). Тоді точки A, B, C, D належать цій площині, а тому прямі AB і CD належать цій площині, що суперечить умові. Припущення неправильне, тому прямі AC і BD не належать одній площині, що й вимагалося довести.	Під час доведення належності чи неналежності часто використовують метод доведення від супротивного. У цьому випадку він одразу виводить на суперечність, а значить – доводить вимогу задачі.

Задача 4.

Скільки всього існує різних площин, які проходять через пряму і точку в просторі?

Розв'язання	Чому саме так?
Якщо в просторі дано пряму і точку, що лежить на ній, то ними визначається безліч площин, оскільки через пряму проходить безліч різних площин.	Взявши поза цією прямою довільну точку, ми кожного разу матимемо іншу площину, яка не збігатиметься з раніше побудованою. Таких площин – безліч.
Якщо ж точка не лежить на прямій, то за наслідком з аксіом стереометрії таку площину можна побудувати лише одну.	Через дану точку поза прямою можна побудувати або пряму, що перетинатиме дану пряму, або пряму, паралельну даній. Обидва випадки задають одну площину.
Відповідь. Безліч або одна.	