Некоторые свойства медиан треугольника

Теорема. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Обратное утверждение: «Если отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, делит данный треугольник на два равновеликих треугольника, то этот отрезок является его медианой».

Докажем, к примеру, обратное утверждение.

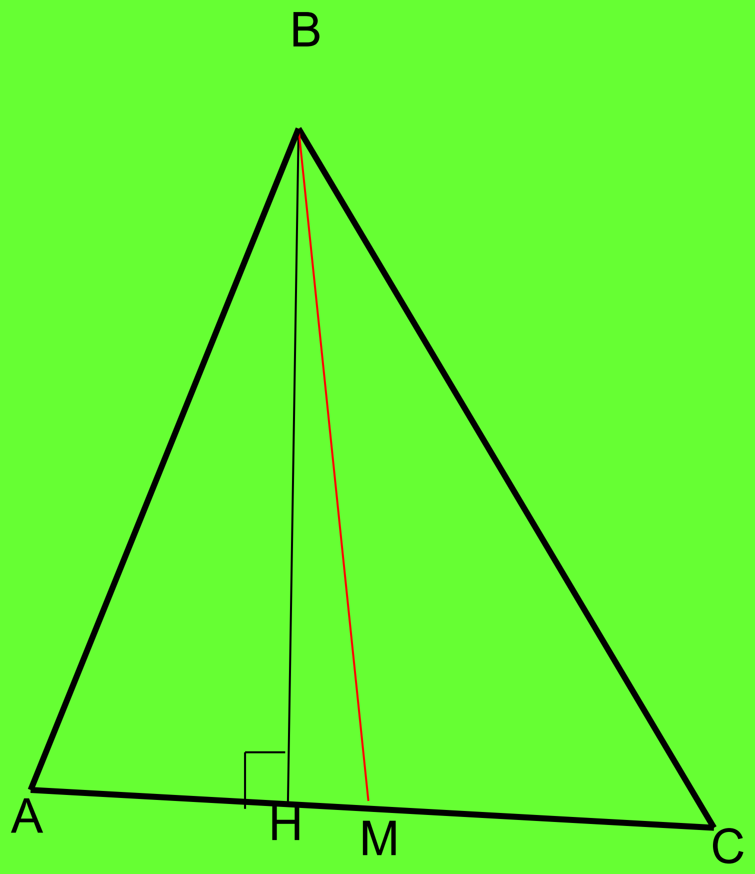
Доказательство

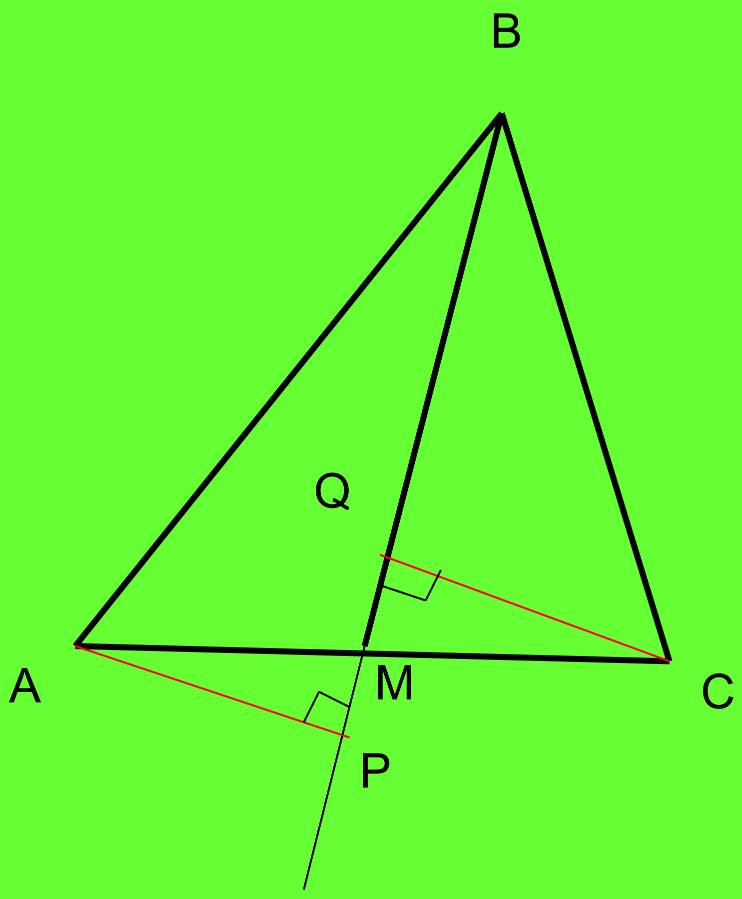
I способ. **Пусть BM – данный отрезок и $S_{ABM} = S_{BMC}$. Проведем высоту BH треугольника.**

Тогда $2S_{ABM} = AM \cdot BH$ и $2S_{BMC} = MC \cdot BH$.

Ясно, что $AM \cdot BH = MC \cdot BH$ и $AM = MC$.

Следовательно, отрезок BM – медиана данного треугольника.





<u>II способ.</u> 1. Пусть BM – данный отрезок и S_{ABM} = S_{BMC}. Отрезки AP и CQ – высоты треугольников ABM и BMC, проведенные к одной и той же стороне.

2. Так как $S_{ABM} = S_{BMC}$, то

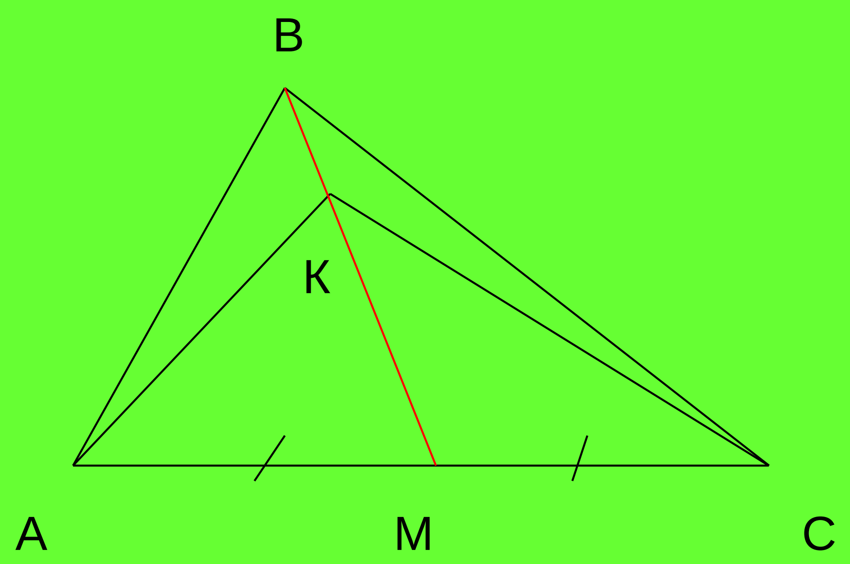
$AP \cdot BM = CQ \cdot BM$, откуда

$AP = CQ$.

3. $\Delta AMP = \Delta CMQ$ (по катету и острому углу). $AM = CM$.

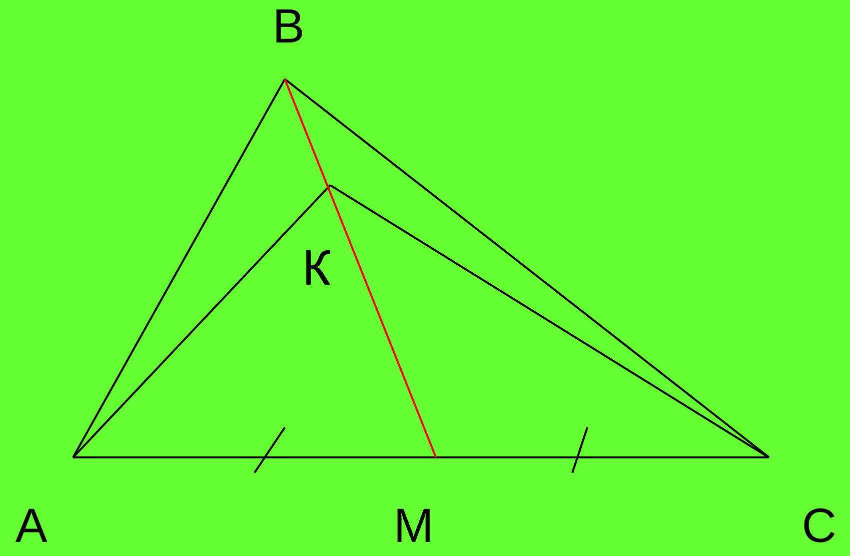
Следовательно, отрезок BM – медиана данного треугольника.

Решим задачу. Пусть точка К – произвольная точка медианы ВМ треугольника АВС. Докажите, что $S_{ABK}+S_{MKC} = S_{BKC} + S_{AKM}$.



Доказательство. КМ - медиана треугольника АКС, поэтому $S_{AKM} = S_{MKC}$ (1).

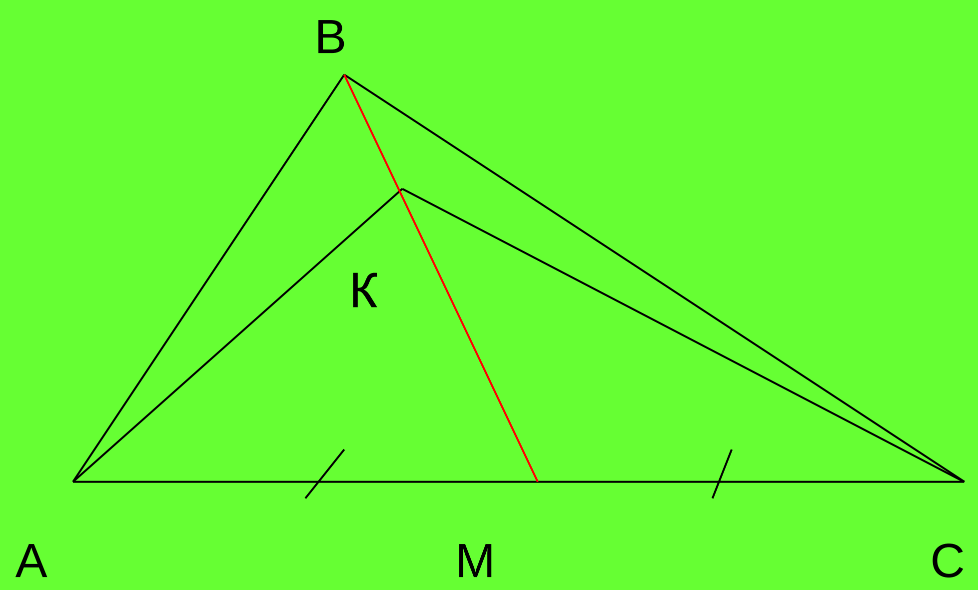
BM - медиана треугольника ABC, следовательно, $S_{ABM} = S_{BMC}$ (2). Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1) $S_{AKM} = S_{MKC}$: $S_{ABM} – S_{AKM} = S_{BMC} – S_{MKC}$.



Получаем, что $S_{ABK} = S_{BKC}$.(3)

Перепишем равенство (1) в виде:

$S_{MKC} = S_{AKM}$ и, сложив его почленно с равенством (3) $S_{ABK} = S_{BKC}$, получим требуемое: $S_{ABK}+S_{MKC} = S_{BKC} + S_{AKM}$.

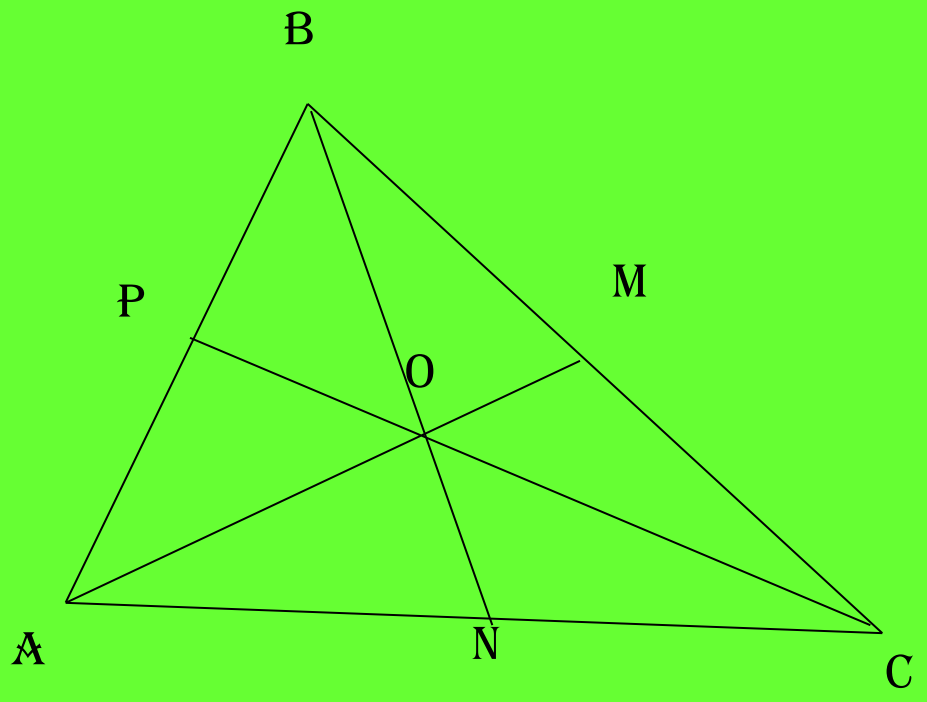


Теперь докажем два утверждения.

1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершин, из которых они проведены.

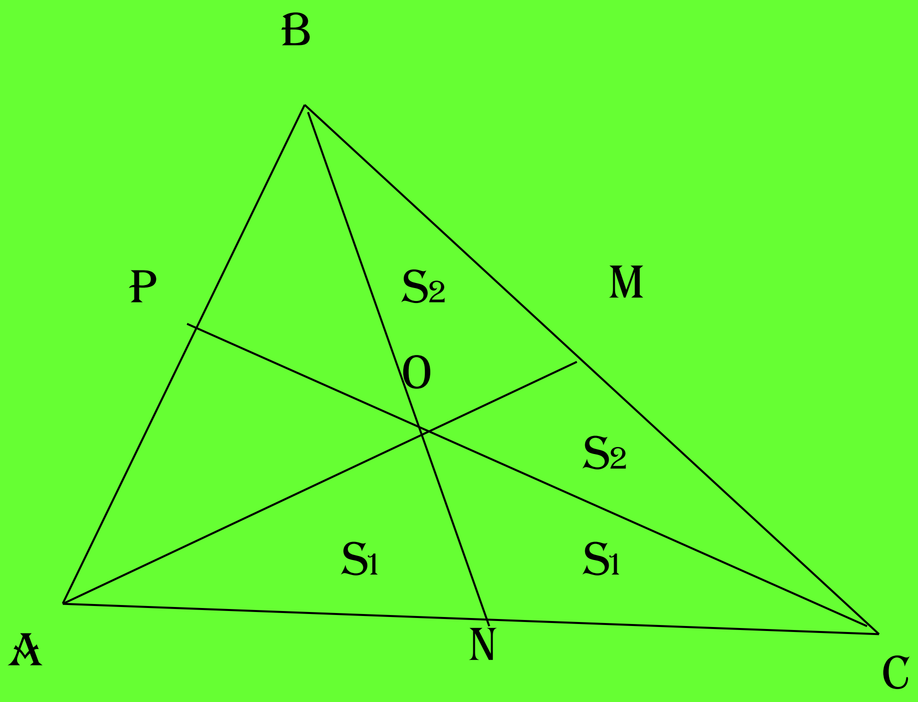
2) Медианы треугольника, пересекаясь, делят его на шесть равновеликих треугольников.

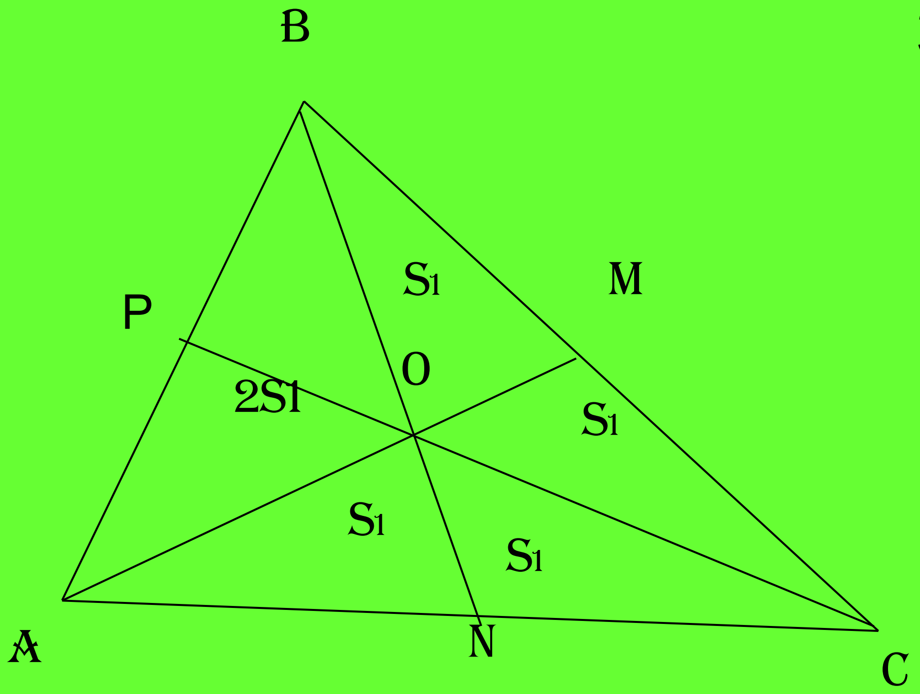
Пусть AM и BN - медианы треугольника ABC, пересекающиеся в точке O.Через точку O проведем отрезок CP с концом P на стороне AB.Так как точка O лежит на медиане ON треугольника ABC, то $S_{AON}=S_{ONC}=S_1$.



Так как точка О лежит на медиане ОМ треугольника ВОС, то $S_{BOM} = S_{OMC} = S_2$.

Так как О – точка медианы BN, то $S_{AOB} = S_{BOC} = 2S_2$. Ввиду того, что О – точка медианы АМ, $S_{AOB} = S_{AOC}$,то есть $2S_2 = 2S_1$ и $S_2 = S_1$.





Значит, $S_{AOC} = S_{BOC}$, то есть отрезок CP - медиана треугольника ABC, следовательно,

<u>медианы треугольника пересекаются в одной точке</u>.

Треугольники BOC и CON имеют общую высоту, проведенную к сторонам BO и ON соответственно и $S_{BOC} : S_{CON} = 2 : 1$.

Итак, BO : ON = 2 : 1. Тем самым доказано, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершин, из которых они проведены.

OP – медиана треугольника AOB, поэтому $S_{AOP}=S_{BOP}=S_1$. Следовательно, все шесть треугольников равновелики.