Двоичные деревья поиска. Очередь с приоритетами

Федор Царев

Спецкурс «Олимпиадное программирование»

Лекция 3

19.01.2009, 26.01.2009

Санкт-Петербург, Гимназия 261

Цель лекции

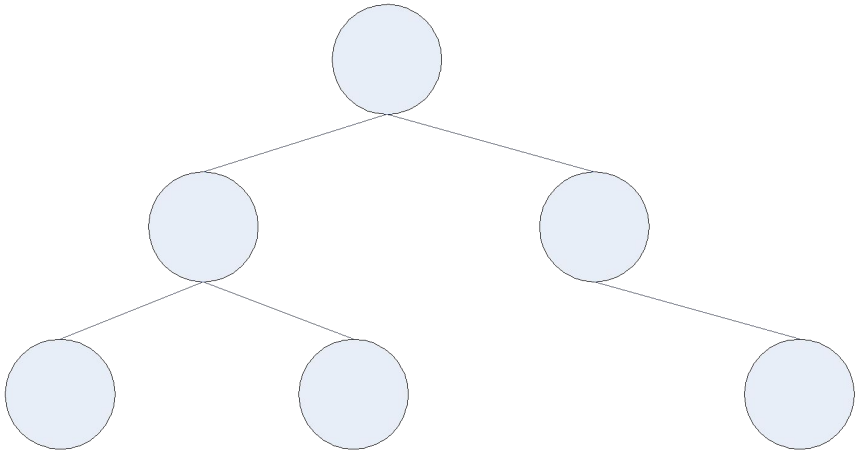
- Изучить теоретические основы двоичных деревьев поиска и очереди с приоритетами и алгоритмы их обработки
- Изучить методы реализации этих структур данных и алгоритмов на языке программирования Pascal (Delphi)

Постановка задачи

- Реализовать структуру данных, хранящую набор чисел и поддерживающую операции:
  - добавить число
  - найти число
  - удалить число
  - найти минимум
  - найти максимум
  - найти k-ое по порядку числу (k-ую порядковую статистику)

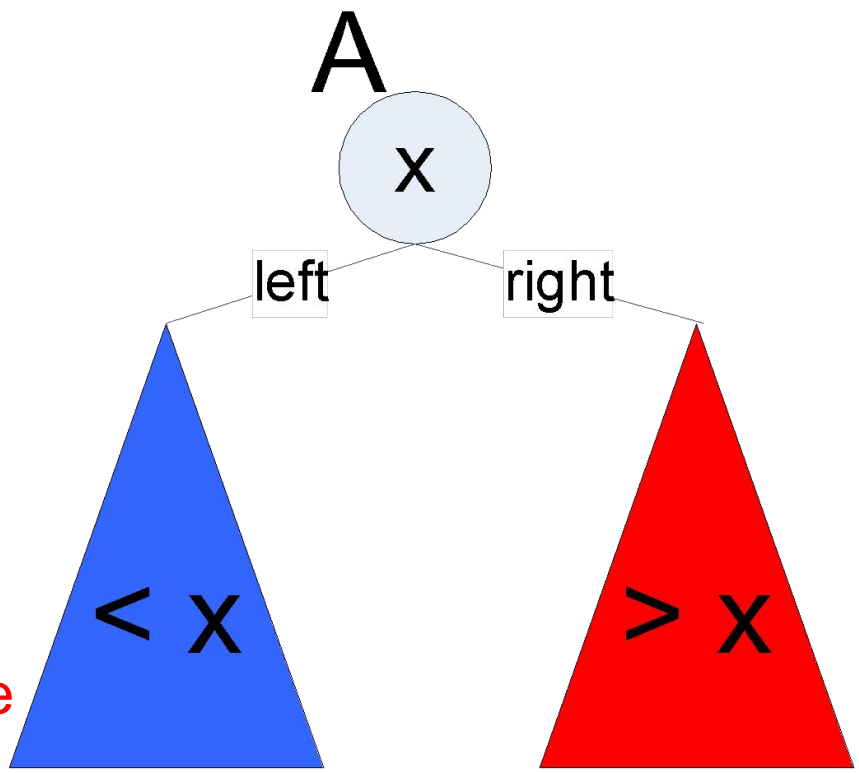
Двоичное дерево

- Дерево, каждая вершина которого имеет не более двух детей
- На детях каждой вершины задан порядок – есть «левый» ребенок и «правый» ребенок
- Самая верхняя вершина – корень – не имеет родителя
- Глубина вершины – расстояние от нее до корня
- Высота дерева – наибольшая глубина его вершины



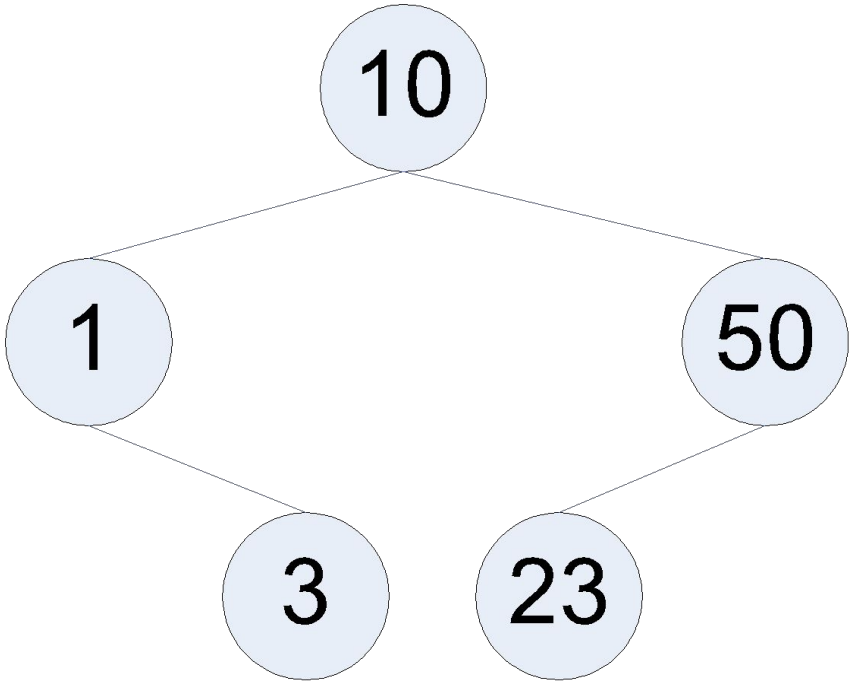
Двоичное дерево поиска

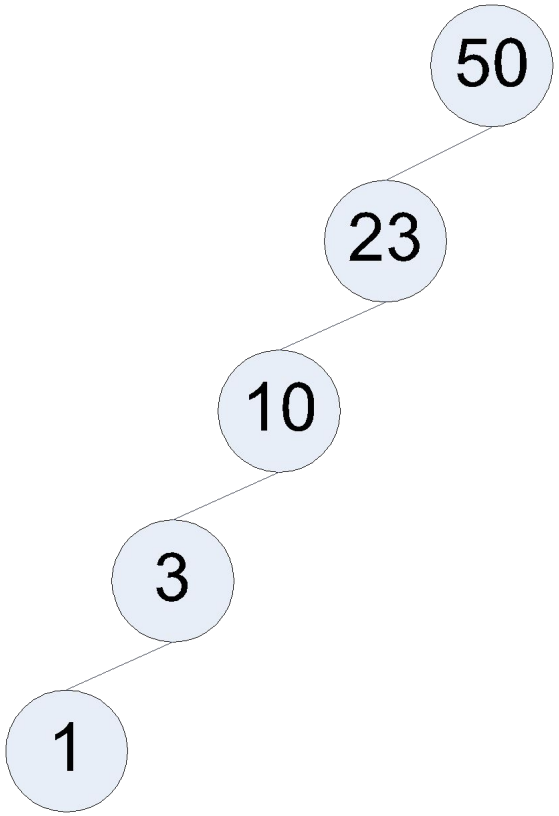
- Это двоичное дерево, в каждой вершине которого хранится число
- При этом если в некоторой вершине А хранится число *x*, то:
  - все числа в левом поддереве А меньше чем *x*
  - все числа в правом поддереве А больше чем *x*



Дерево поиска неоднозначно

- Набор чисел: 1, 3, 10, 23, 50





Высота есть O(logn)

Высота есть O(n)

Вершина дерева

```
node = record
  data : integer;
  left, right : integer; // при реализации
                         // на собственном
  // менеджере памяти
end;
```

data	
left	right

-1 соответствует тому, что соответствующего ребенка у вершины нет

Поиск элемента в дереве

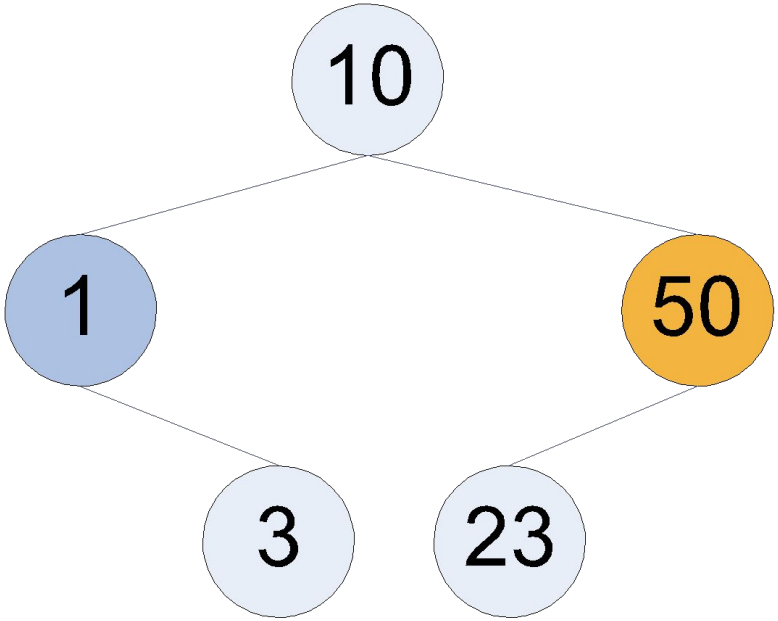
- Если значение y в текущей вершине равно искомому x, то поиск завершен
- Если x > y, то перейти к правому ребенку
- Если x < y, то перейти к левому ребенку

Программа

```
function find(x : integer) : boolean;
begin
  cur := root; // root – корень дерева
  result := false;
  while (cur <> -1) do begin
   if (memory[cur].data = x) then begin
      result := true;
      exit;
   end;
   if (x > memory[cur].data) then begin
      cur := memory[cur].right;
   end else begin
      cur := memory[cur].left;
   end;
  end;
end;
```

Поиск минимума и максимума

- Минимум – самый левый элемент в дереве
- Максимум – самый правый элемент в дереве



Добавить число

- Необходимо:
  1. Найти место, в котором должно находиться число
  2. Создать новый узел дерева и поместить в него это число
- Считаем, что все числа в дереве различны

Программа (1)

```
function add(root, x : integer) : integer;
begin
   if (root = -1) then begin
    cur := free;
    inc(free);
    memory[cur] := data;
    result := cur;
    exit;
   end;
   if (memory[root].data = x) then begin
    // Элемент уже есть в дереве
    result := root;
    exit;
   end;
```

Программа (2)

```
  if (x < memory[root].data) then begin
   cur := add(memory[root].left, x);
   memory[root].left := cur;
   result := root;
   exit;
  end;
  if (x > memory[root].data) then begin
   cur := add(memory[root].right, x);
   memory[root].right := cur;
   result := root;
   exit;
  end;
end;
```

Вызов процедуры

```
root := add(root, x);
```

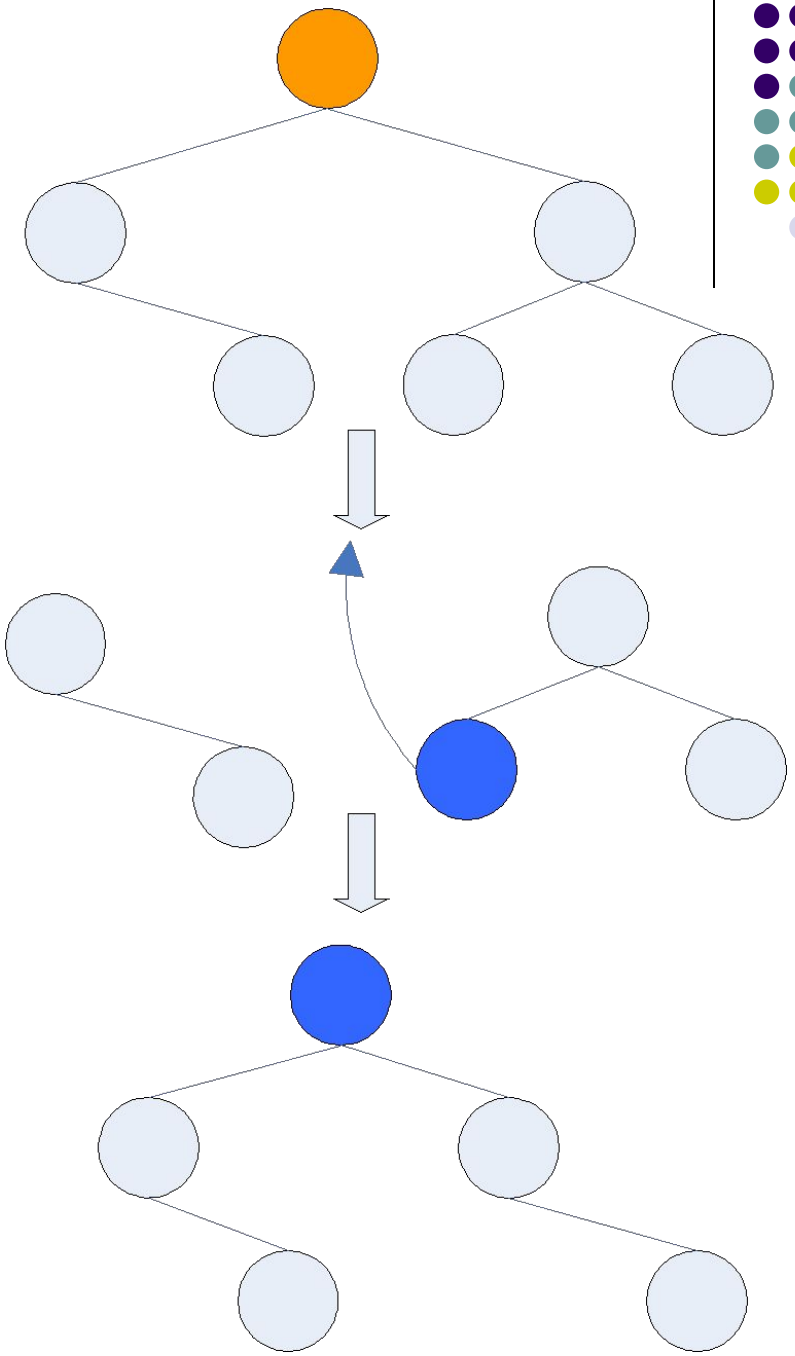
Здесь **`root`** – это корень дерева.

Удаление элемента

- Необходимо найти элемент
- Три случая:
  1. вершина является листом – просто удаляем
  2. у вершины один ребенок – заменяем на ребенка
  3. у вершины два ребенка

Третий случай

- Необходимо найти минимальную вершину в правом поддереве и переместить ее на место удаляемой
- Проблем с перемещением не возникнет, так как у перемещаемой вершины не более одного ребенка



Время работы операций

- Время работы всех рассмотренных операций пропорционально высоте дерева – в худшем случае есть O(n)
- Существуют методы выполнения этих операций так, чтобы высота все время была O(logn):
  - АВЛ-деревья
  - красно-черные деревья
  - …
  - Они будут рассмотрены в следующих лекциях

Упражнение

- Предложить алгоритм нахождения следующего и предыдущего элемента в двоичном дереве поиска со временем работы пропорциональным высоте дерева

Поиск k-ой порядковой статистики

- В каждом узле дерева необходимо хранить дополнительную информацию – число узлов в его поддереве

```
node = record
  data : integer;
  left, right : integer;
  size : integer;
end;
```

- memory[a].size = memory[memory[a].left].size + memory[memory[a].right].size + 1

Поиск k-ого элемента

- Дано:
  - Корень дерева
  - Число k
- Если в левом поддереве не меньше, чем k элементов, то переходим к нему
- Если в левом поддереве ровно k-1 элемент, то k-ый элемент находится в корне
- Иначе переходим к правому поддереву

Программа

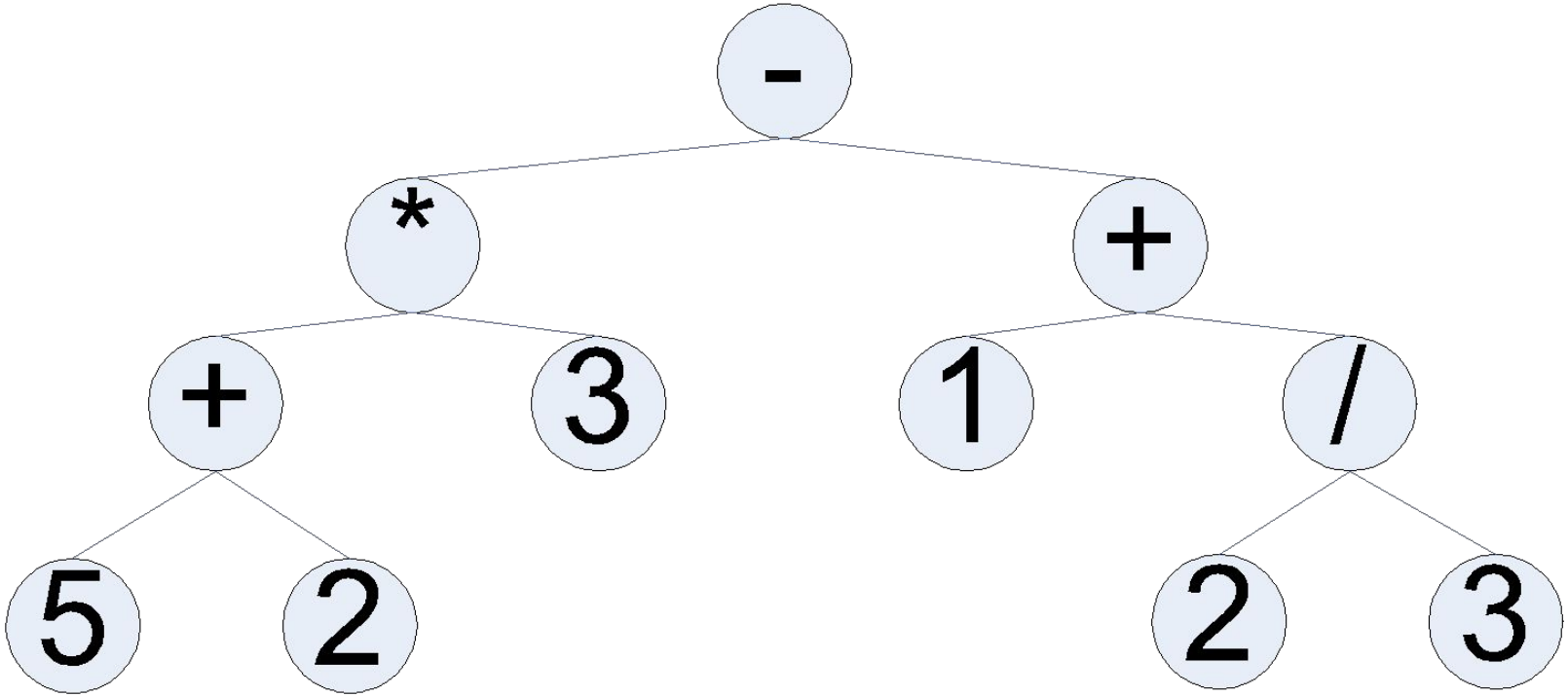
```
function getKth(root, k : integer) : integer;
begin
  sizeLeft := 0;
  if (memory[root].left <> -1) then begin
   sizeLeft := memory[memory[root].left].size;
  end;
  if (k <= sizeLeft) then begin
   result := getKth(memory[root].left, k);
   exit;
  end;
  if (sizeLeft = k - 1) then begin
   result := memory[root].data;
   exit;
  end;
  result := getKth(memory[root].right, k-sizeLeft-1);
end;
```

Упражнение

- Модифицировать операции добавления и удаления вершины, так чтобы они обновляли значения поля «размер поддерева». Время работы операций не должно измениться.

Деревья выражений

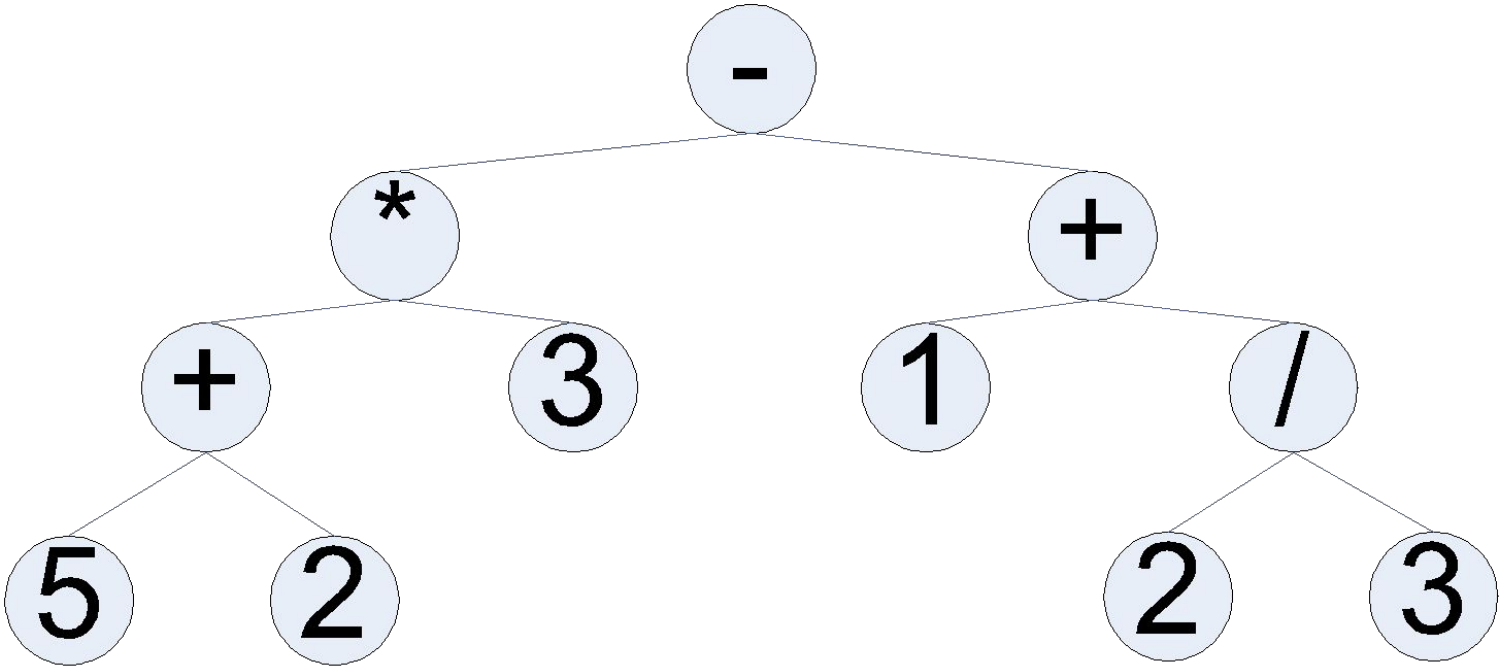
- (5+2)*3 – (1 + 2/3)



Обходы двоичных деревьев

- Основные варианты обхода двоичного дерева:
  - корень – левое поддерево – правое поддерево
  - левое поддерево – корень – правое поддерево
  - левое поддерево – правое поддерево – корень
- Им соответствуют:
  - префиксная запись
  - инфиксная запись
  - постфиксная запись

Примеры



- - * + 5 2 3 + 1 / 2 3
- 5 + 2 * 3 – 1 + 2 / 3
- 5 2 + 3 * 1 2 3 / + -

Упражнения

- Предложить алгоритм вычисления выражений, заданных в постфиксной записи (указание: используйте стек)
- Применение какого из обходов позволяет вывести элементы дерева поиска в отсортированном порядке?

Очередь с приоритетами

- Структура данных с двумя операциями:
  - добавить элемент и назначить ему приоритет
  - извлечь элемент с наименьшим приоритетом
- Как с помощью такой структуры данных реализовать стек? Обычную очередь?

Простая реализация

- Храним массив записей

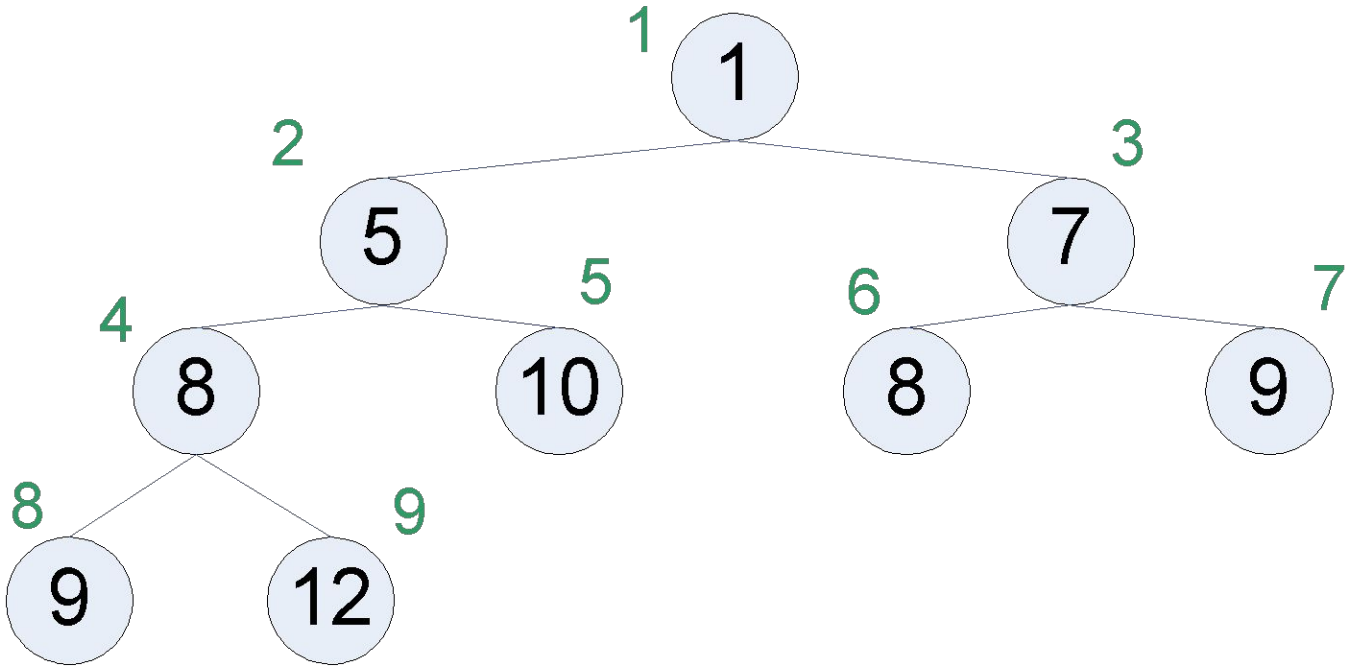
```
element = record
  data, priority : integer;
end;
```

- Добавление – в конец массива (O(1))
- Извлечение – просматриваем весь массив и ищем минимум (O(n))

Структура данных «куча»

- Полное двоичное дерево
- Хранится в массиве:
  - Левый ребенок – `2 * i`
  - Правый ребенок – `2 * i + 1`
  - Родитель – `i div 2`
- Основное свойство: `heap[i] > heap[i div 2]`
- Высота есть O(logn)
- Можно рассматривать кучу для максимума, а для минимума
- Иногда эту структуру данных называют «пирамида»

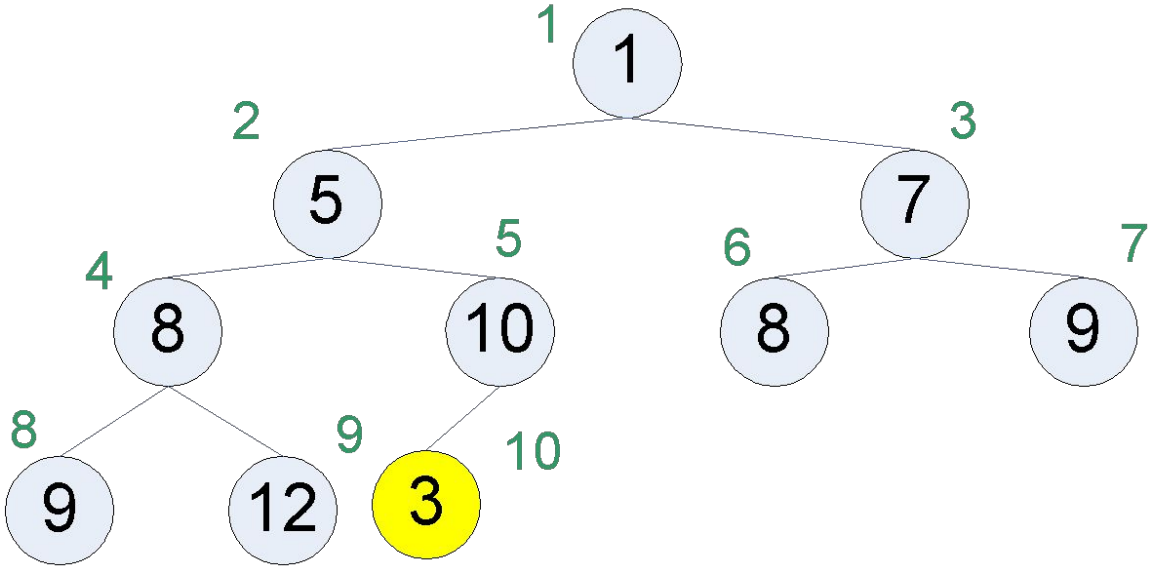
Пример



1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	7	8	10	8	9	9	12

Добавление элемента (1)

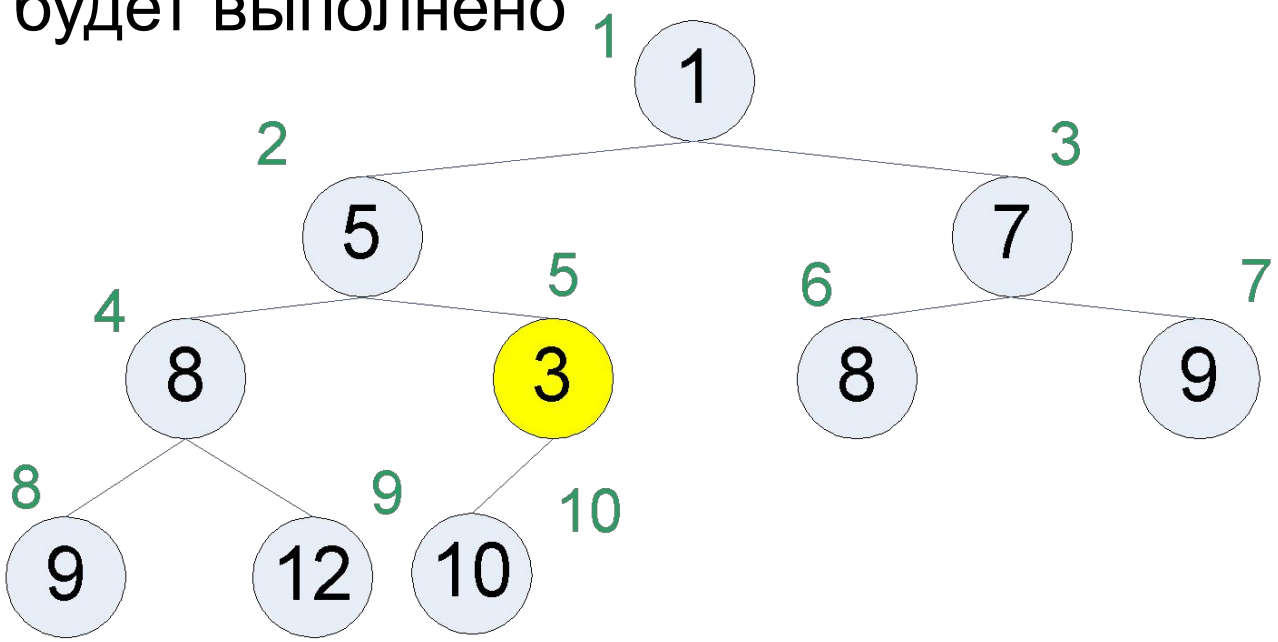
- Добавим в конец массива
- После этого основное свойство кучи может быть нарушено



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	7	8	10	8	9	9	12	3

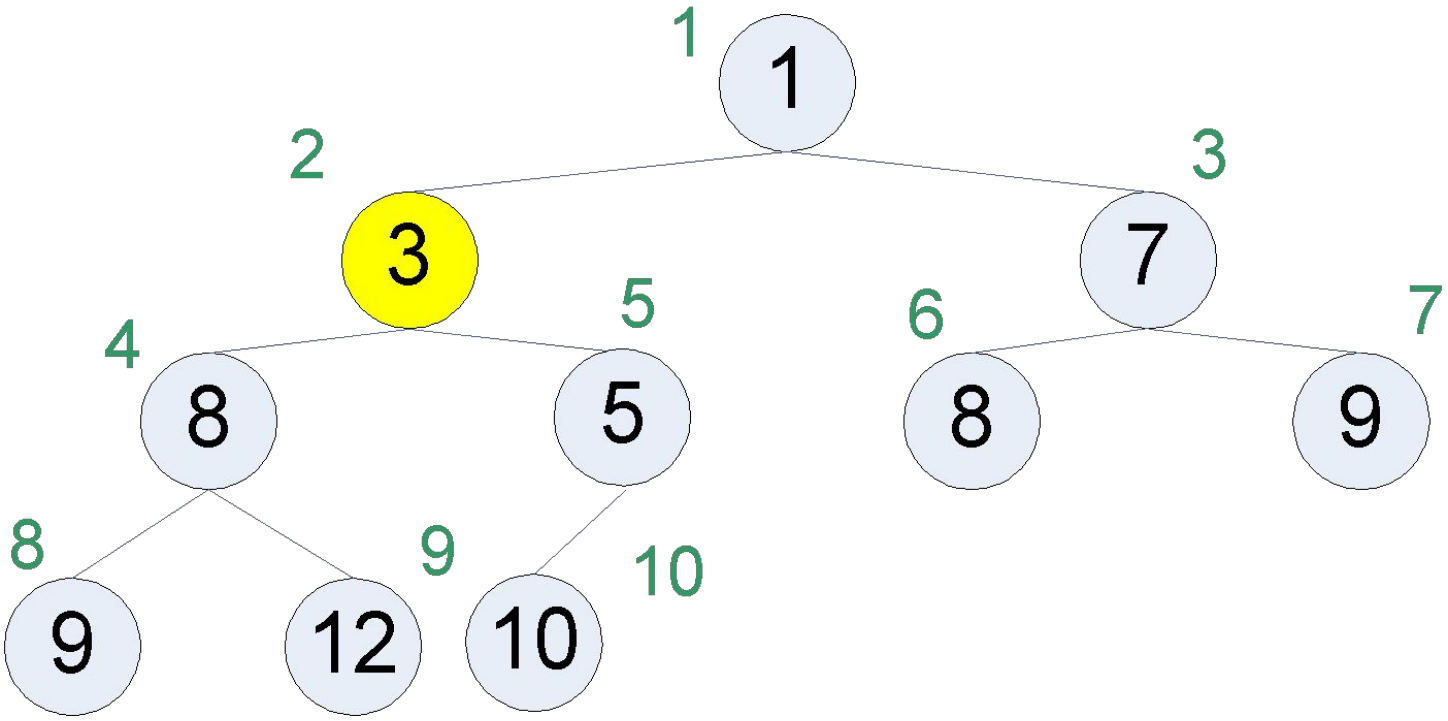
Добавление элемента (2)

- Необходимо восстановить нарушенное основное свойство
- Для этого выполним просеивание вверх – будем поднимать элемент вверх до тех пор, пока свойство не будет выполнено



Добавление элемента (3)

- Число обменов не превышает высоту дерева – то есть O(logn)



Добавление элемента (4)

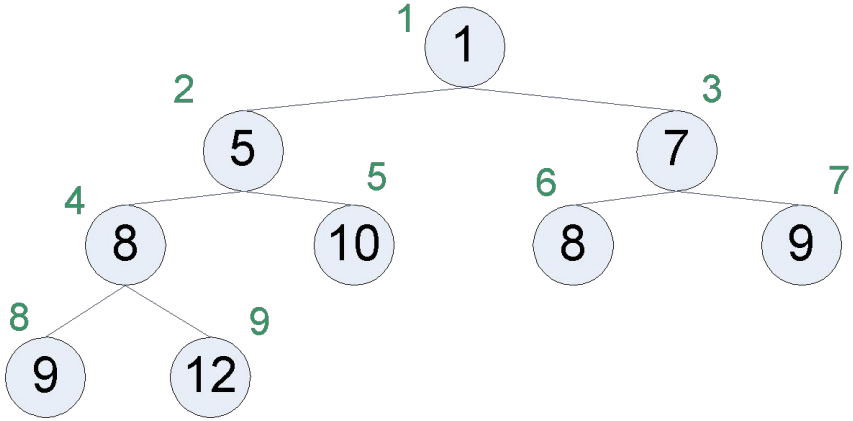
```
procedure add(x : integer);
begin
  inc(size);
  heap[size] := x;
  i := size;
  while (i > 1) and  do begin
   if (heap[i div 2] > heap[i]) then begin
      swap(heap[i], heap[i div 2]);
   end else begin
      break;
   end;
  end;
end;
```

Извлечение элемента (1)

- Минимальный элемент находится на вершине кучи
- Поменяем его местами с последним и удалим
- После этого может нарушиться основное свойство

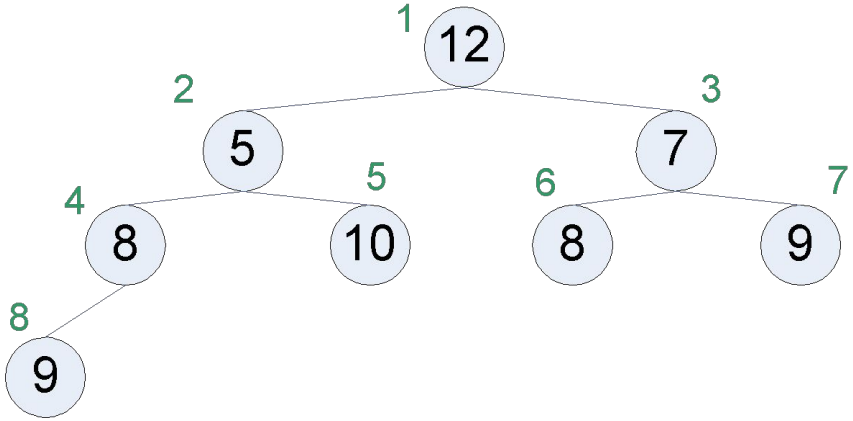
Извлечение элемента (2)

Было



1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	7	8	10	8	9	9	12

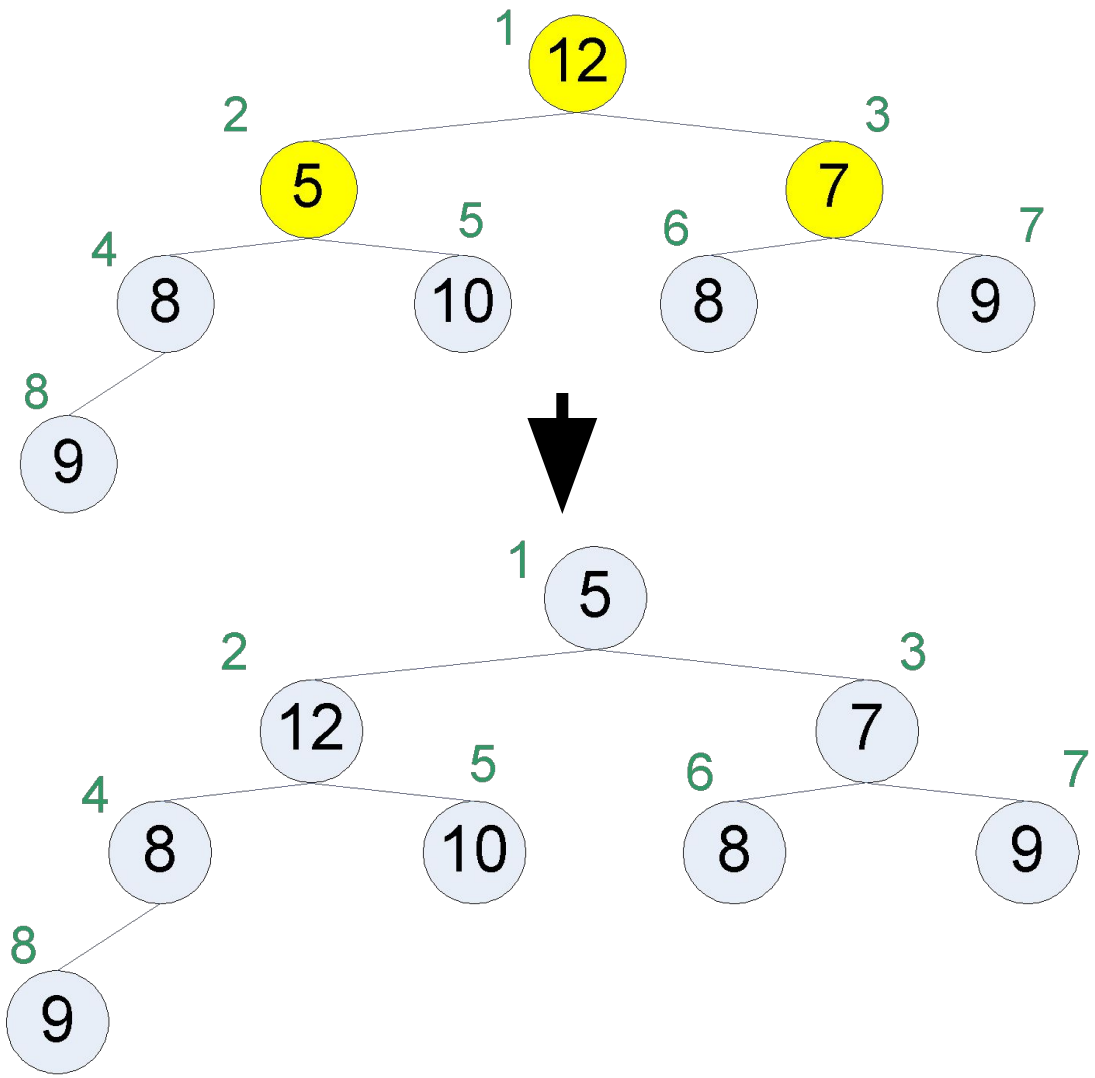
Стало



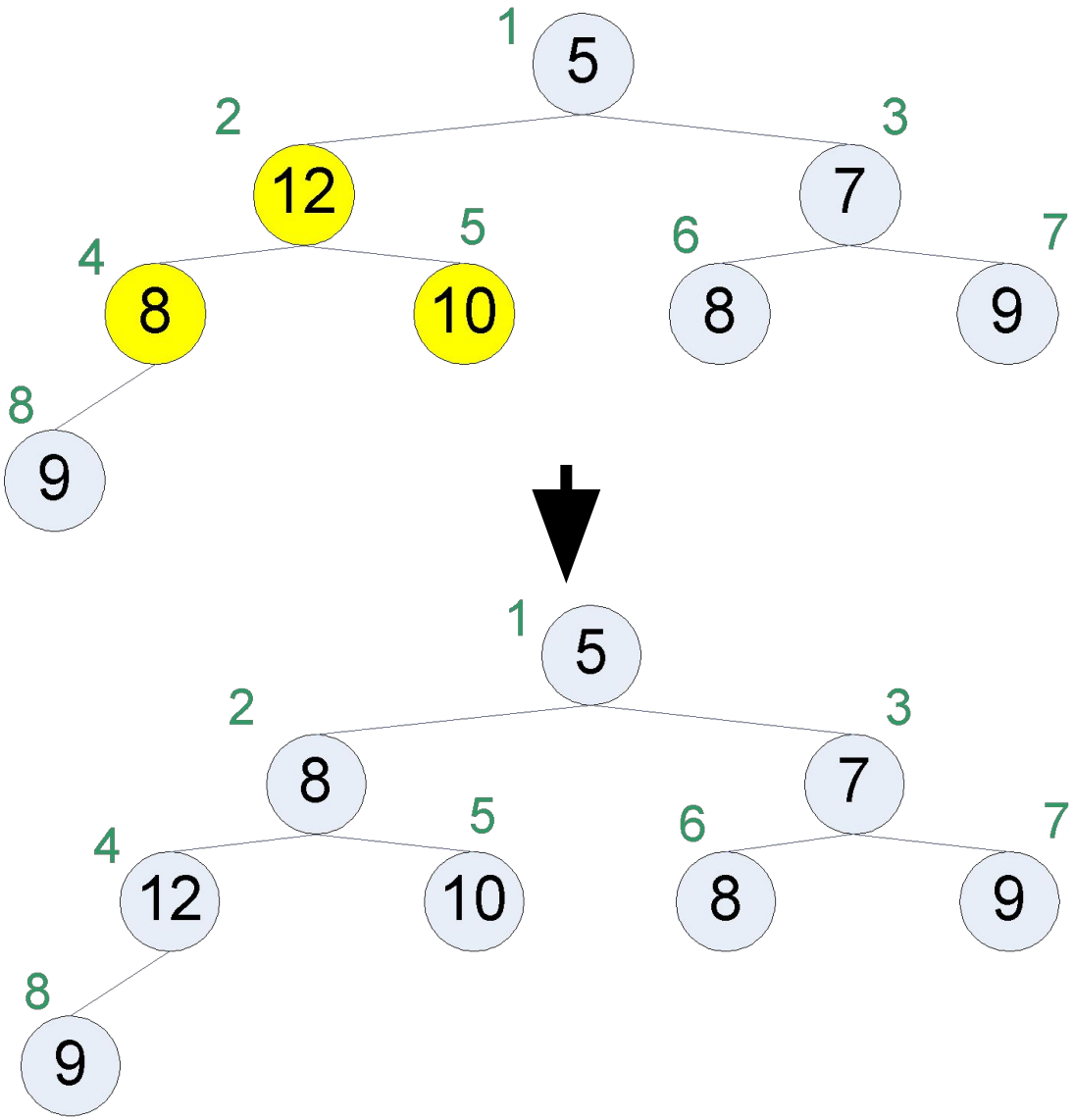
1	2	3	4	5	6	7	8
12	5	7	8	10	8	9	9

Необходимо поместить верхний элемент на его место!

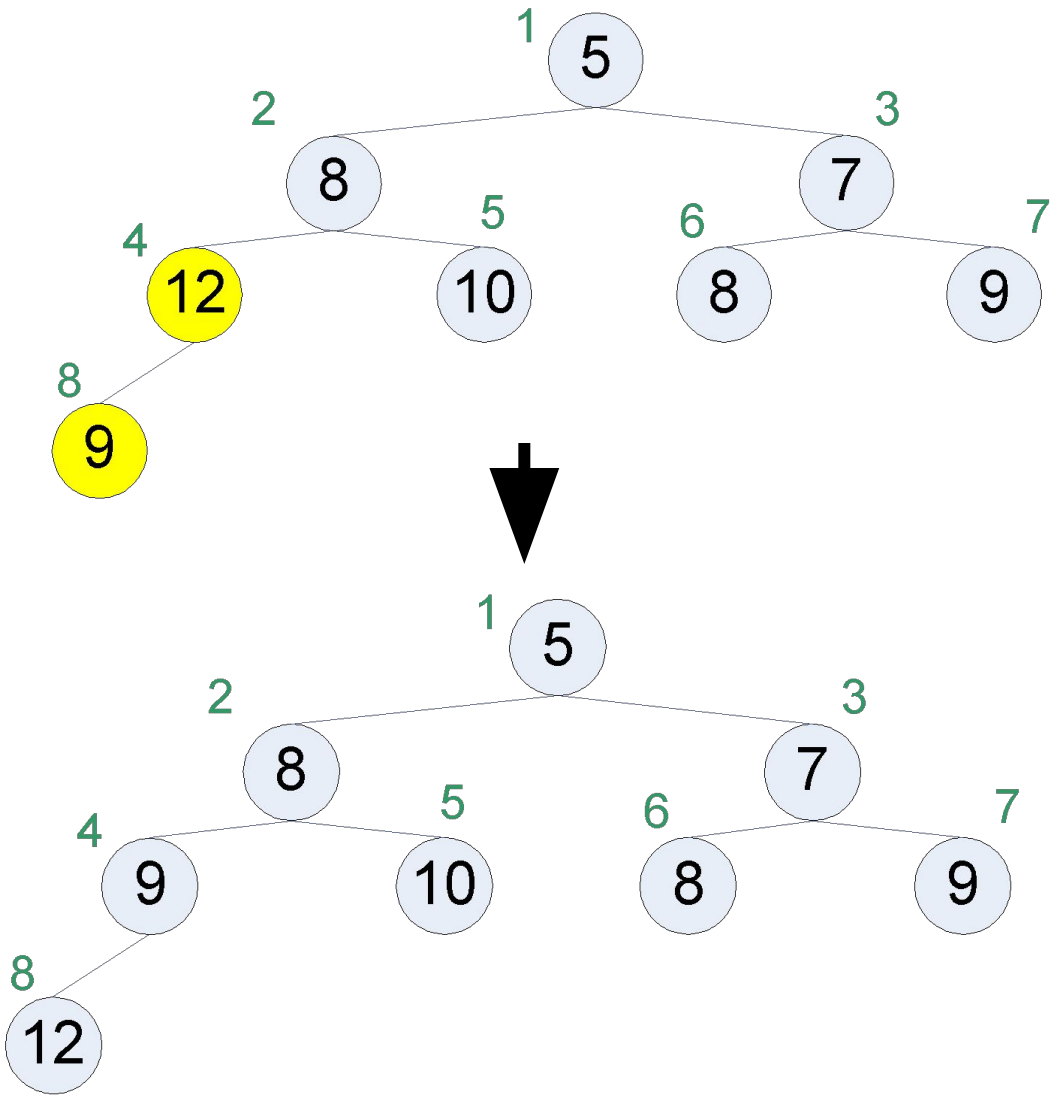
Извлечение элемента (3)



Извлечение элемента (4)



Извлечение элемента (5)



Извлечение элемента (5)

```
function remove() : integer;
begin
   result := heap[1];
   heap[1] := heap[size];
   dec(size);
   i := 1;
   while (2 * i <= size) and  do begin
    min := i;
    if (heap[2 * i] < heap[min]) then begin
        min := 2 * i;
    end;
    if (2 * i + 1 <= size) and
        (heap[2 * i + 1] <= heap[min]) then begin
        min := 2 * i + 1;
    end;
    if (min = i) then begin
        break;
    end;
    swap(heap[i], heap[min]);
    i := min;
   end;
end;
```

Сортировка с помощью кучи

- Можно добавить все элементы массива в кучу, а потом по очереди извлечь
- Требуется дополнительный массив – на хранение кучи
- Чтобы сделать без дополнительной памяти надо:
  - Научиться преобразовывать массив в кучу
  - Научиться преобразовывать кучу в упорядоченный массив

Построение кучи из массива

```
for i := n div 2 downto 1 do begin
   siftDown(i);
end;
procedure siftDown(i : integer);
begin
   while (2 * i <= size) and  do begin
    min := i;
    if (heap[2 * i] < heap[min]) then begin
        min := 2 * i;
    end;
    if (2 * i + 1 <= size) and
        (heap[2 * i + 1] <= heap[min]) then begin
        min := 2 * i + 1;
    end;
    if (min = i) then begin
        break;
    end;
    swap(heap[i], heap[min]);
    i := min;
   end;
end;
```

Время работы

- Грубая оценка – O(nlogn)
- Более точная оценка – O(n)

$$\sum_{i=0}^{h} \frac{n}{2^i} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{2^i} = 2n$$

Построение упорядоченного массива из кучи

```
for j := 1 to n do begin
   swap(heap[1], heap[size]);
   dec(size);
   i := 1;
   while (2 * i <= size) and  do begin
    min := i;
    if (heap[2 * i] < heap[min]) then begin
        min := 2 * i;
    end;
    if (2 * i + 1 <= size) and
        (heap[2 * i + 1] <= heap[min]) then begin
        min := 2 * i + 1;
    end;
    if (min = i) then begin
        break;
    end;
    swap(heap[i], heap[min]);
    i := min;
   end;
end;
```

Время работы heapSort

- Общее время работы heapSort есть O(n + nlogn) = O(nlogn)

Выводы

- Двоичные деревья поиска позволяют быстро выполнять словарные операции при условии, что у них небольшая высота
- С помощью двоичных деревьев можно представлять математические выражения
- Очередь с приоритетами реализуется на основе структуры данных «куча»

Спасибо за внимание!

Вопросы? Комментарии?

fedor.tsarev@gmail.com