УСЛОВНО ИЗРАВНЕНИЕ НА ПЛАНОВИ/ДВУМЕРНИ МРЕЖИ. ОСНОВНИ ФИГУРИ

ОСНОВНИ ФИГУРИ

Триъгълник

Централна фигура

Геодезически четириъгълник

Венечна система

1. УСЛОВНО ИЗРАВНЕНИЕ НА ОТДЕЛЕН ТРИЪГЪЛНИК

Ако в даден триъгълник са измерени трите ъгъла, както това се знае, сборът от измерените ъгли трябва да бъде равен на 200^g (или $180°$).

При триъгълници със значителни дължини на страните, каквито са например триъгълниците в първокласните, второкласните и до известна степен в третокласните триангулации, сборът на ъглите им трябва да бъде равен на $180°+\varepsilon''$, където ε'' е сферическият (или сфероидният) ексцес.

Ексцесът ε'' при сферическия триъгълник се изчислява обикновено по формулата

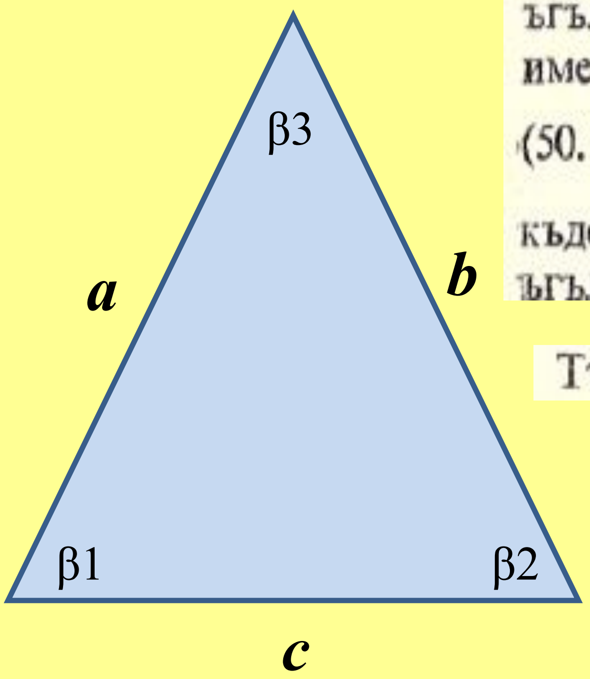
$$\varepsilon''=\frac{\rho''}{2R^2}\cdot ab\sin\gamma,$$

където a и b са две от страните на триъгълника, γ е ъгълът между тези две страни, а R е радиусът на сферата.

Същата формула се използва и за триъгълници върху елипсоида, като само R^2 се замества с MN, където M е най-големият, а N — най-малкият радиус на кривината, т. е. формулата взема вида

$$\varepsilon''=\frac{\rho''}{2MN}ab\sin\gamma.$$

Последната формула дава достатъчна точност и за триъгълниците от първокласните триангулации. Само за триъгълници със страни, дълги по няколко стотици километри, трябва да се използва по-точна формула.



При изравнението на триъгълник, в който са измерени трите ъгъла (β_1), (β_2) и (β_3), се получава само едно условно уравнение, а именно

$$[\beta_1]+[\beta_2]+[\beta_3]-200^g=0, \tag{50.1}$$

където $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ и $[\beta_3]$ са изравнените стойности на ъглите в триъгълника.

Тъй като

$$\begin{cases} [\beta_1]=(\beta_1)+v_1 \\ [\beta_2]=(\beta_2)+v_2 \\ [\beta_3]=(\beta_3)+v_3, \end{cases}$$

където (β_1), (β_2) и (β_3) са измерените стойности на триъгълниковите ъгли, а v_1, v_2 и v_3 са съответните поправки, ще имаме

$$(\beta_1)+v_1+(\beta_2)+v_2+(\beta_3)+v_3-200^g=0. \tag{50.3}$$

От друга страна,

$$(\beta_1)+(\beta_2)+(\beta_3)-200^g=w, \tag{50.4}$$

където w е т. нар. несъвпадение или несвръзка.

Като заместим стойността на (50.4) в (50.3), ще получим условното уравнение на поправките

$$v_1+v_2+v_3+w=0. \tag{50.5}$$

За да получим най-вероятните стойности на поправките, трябва да приложим основното изискване на метода на най-малките квадрати, а именно

$$[vv]=v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2=\min. \tag{50.6}$$

В случая следователно имаме екстрем с допълнително условие. Както е известно, в такъв случай се образува т. нар. главна функция:

$$A=[vv]-2k(v_1+v_2+v_3+w), \tag{50.7}$$

където k е *неопределен множител, наречен в изравнението корелата*. За главната функция имаме

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v_1}=2v_1-2k=0 \quad \text{или} \quad v_1-k=0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial v_2}=2v_2-2k=0 \quad \text{или} \quad v_2-k=0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial v_3}=2v_3-2k=0 \quad \text{или} \quad v_3-k=0. \end{cases} \tag{50.8}$$

Като заместим стойностите на v_1, v_2 и v_3 от (50.8) в условното уравнение на поправките (50.5), ще получим т. нар. нормално корелатно уравнение:

$$3k+w=0. \tag{50.9}$$

Оттук

$$k=-\frac{w}{3}\cdot \tag{50.10}$$

От равенства (50.8), като заместим стойността на корелатата, ще получим за поправките

$$v_1=v_2=v_3=k=-\frac{w}{3}, \tag{50.11}$$

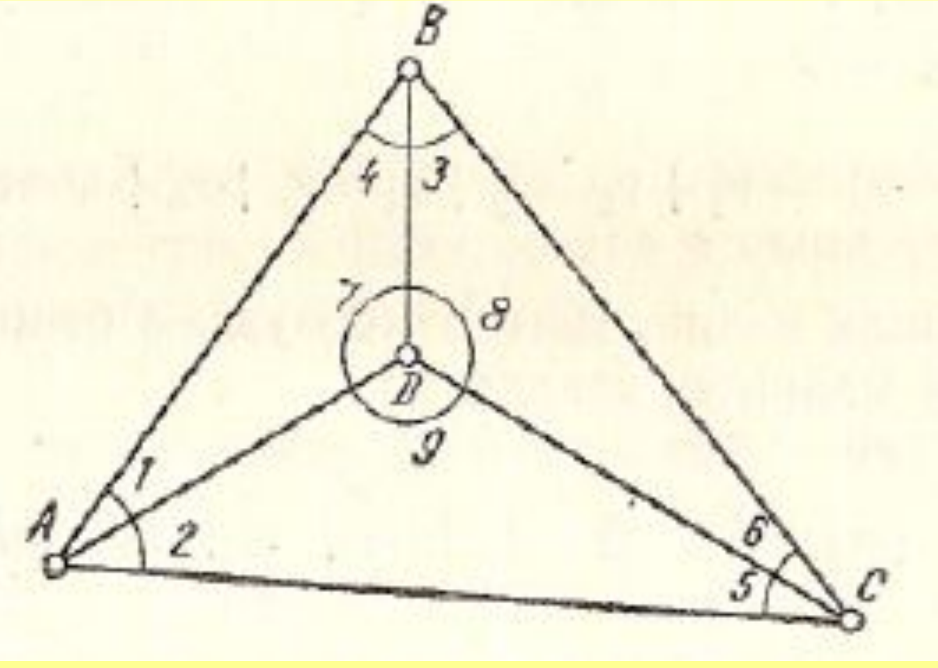
т. е. ъгловото несъвпадение трябва да се разхвърли поравно на трите измерени ъгъла в триъгълника, което в същност може да се установи и чрез логическо разсъждение.

1. УСЛОВНО ИЗРАВНЕНИЕ НА ЦЕНТРАЛНА СИСТЕМА

Централната система представлява многоъгълник (полигон), всички върхове на който са съединени с една обща централна точка. По този начин в същност се получава система от триъгълници, които имат една обща точка — това е централната точка на системата.

Най-простата централна система представлява триъгълник, чиито върхове A, B и C са съединени с централната точка D (фиг. 253).

В случая следователно имаме система от три триъгълника, в която са измерени ъглите (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) и (9).



Съгласно приетите означения в случая имаме
$p = p_1 = 4$;
$l = l_1 = 6$;
$W = 9$.

По формули (49.5) получаваме

брой на станционните уравнения	$Z_0 = 1$
брой на полигоновите уравнения	$Z_1 = 3$
брой на страничните уравнения	$Z_2 = 1$
Общ брой на условните уравнения	$Z = 5$

Ако означим с (1), (2), (3), . . . , (9) измерените стойности на ъглите, а с [1], [2], [3], . . . , [9] изравнените стойности, за станционното уравнение ще имаме

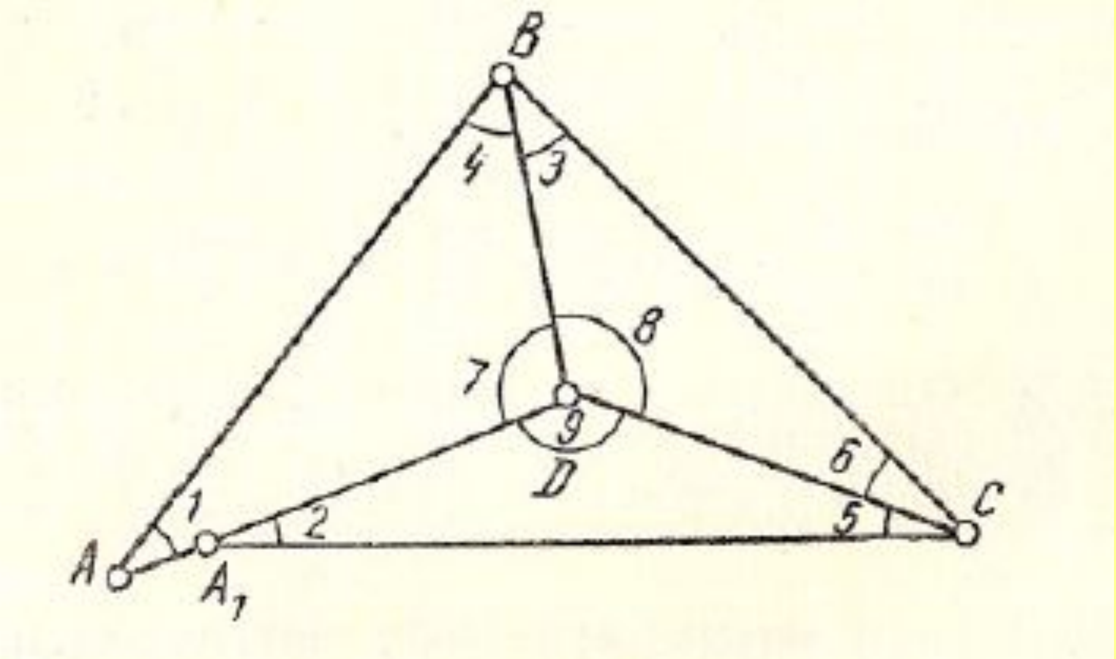
$$(7)+(8)+(9)-400^{g}=w_1. \tag{51.1}$$

Трите полигонови уравнения могат да се получат от трите триъгълника ABD, BCD и ACD, а именно

$$\left\{\begin{aligned} &(1)+(4)+(7)-200^{g}=w_2\\ &(3)+(6)+(8)-200^{g}=w_3\\ &(2)+(5)+(9)-200^{g}=w_4. \end{aligned}\right. \tag{51.2}$$

В дадената централна система би могло да се състави още едно триъгълниково уравнение от големия триъгълник ABC, но това уравнение не е независимо. То се получава като сбор от трите уравнения (51.2). В случая независими могат да бъдат само три полигонови уравнения.

Остава още да се състави страничното уравнение. Това уравнение произлиза от обстоятелството, че трите страни AB, BC и AC могат да не образуват сключен триъгълник (фиг. 264), макар че сумите на ъглите в трите триъгълника ABC, ACD и BCD са точно 200^g. Така например, ако излезем от страната AD и построим триъгълника ABD, след това, излизайки от получената страна BD, построим по същия начин триъгълника BCD, като нанесем при точката C ъгъла (5) вместо триъгълника ACD, ще получим друг триъгълник A_1CD. Както се вижда, макар че условията на уравнения (51.1) и (51.2) са спазени, тези условия не могат да осъществят сключването на триъгълника ABC, т. е. не могат да отстранят несъвпадението на точка A_1 с точка A.



За да се изрази, че двете точки A и A_1 съвпадат, трябва да се постави изискването $AD=A_1D$. Това изискване може да бъде изразено във формата на условно уравнение, като определим A_1D, изхождайки от AD.

В случая ще имаме

$$\overline{BD}=\overline{AD}\frac{\sin(1)}{\sin(4)}, \quad \overline{CD}=\overline{BD}\frac{\sin(3)}{\sin(6)}=\overline{AD}\frac{\sin(1)\,.\,\sin(3)}{\sin(4)\,.\,\sin(6)}$$

и най-сетне

$$\overline{A_1D}=\overline{CD}\frac{\sin(5)}{\sin(2)}=\overline{AD}\frac{\sin(1)\,.\,\sin(3)\,.\,\sin(5)}{\sin(2)\,.\,\sin(4)\,.\,\sin(6)}.$$

И понеже трябва да бъде спазено условието

$$\overline{AD}=\overline{A_1D},$$

страничното условно уравнение ще гласи

$$\frac{\sin[1]\,.\,\sin[3]\,.\,\sin[5]}{\sin[2]\,.\,\sin[4]\,.\,\sin[6]}=1$$

Същото уравнение може да се получи от тъждеството

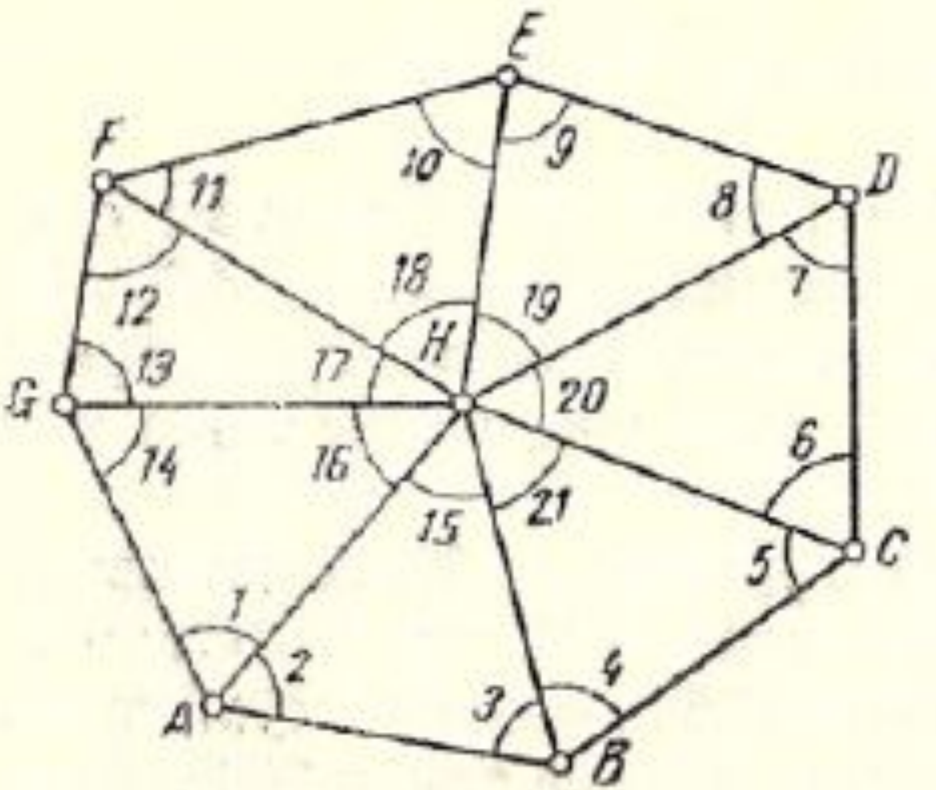
$$\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BD}{AD} = 1,$$

като заместим в него страните със синусите на срещулежащите ъгли съответно в триъгълниците ADC, CDB и BDA, т. е.

$$\frac{\sin [5]}{\sin [2]} \cdot \frac{\sin [3]}{\sin [6]} \cdot \frac{\sin [1]}{\sin [4]} = 1.$$

По същия начин може да се получи страничното уравнение при всяка централна система. Така например, ако имаме седмоъгълника на фиг. 265, на който върховете A, B, C, D, E, F и G са съединени с централната точка H, от тъждеството

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BH}{CH}\cdot\frac{CH}{DH}\cdot\frac{DH}{EH}\cdot\frac{EH}{FH}\cdot\frac{FH}{GH}\cdot\frac{GH}{AH}=1,$$



като заместим страните със синусите на срещуположните ъгли в съответните триъгълници и подредим синусите по възходящ ред на ъглите, ще получим страничното уравнение на тази централна система

$$(51.4)\qquad \frac{\sin[1]\,.\,\sin[3]\,.\,\sin[5]\,.\,\sin[7]\,.\,\sin[9]\,.\,\sin[11]\,.\,\sin[13]}{\sin[2]\,.\,\sin[4]\,.\,\sin[6]\,.\,\sin[8]\,.\,\sin[10]\,.\,\sin[12]\,.\,\sin[14]}=1.$$

От горните два примера се вижда, че в същност страничното условно уравнение на всяка централна система може да се състави направо, тъй като то представлява отношението на произведението на синусите от десните (или левите) ъгли, гледано от централната точка, към произведението на синусите от левите (или десните) ъгли.

В централната система на фиг. 265 освен страничното уравнение ще имаме още седем триъгълникови уравнения и едно стан-

$$[1]+[14]+[16]-200^g=0;$$

$$[2]+[3]+[15]-200^g=0;$$

$$[4]+[5]+[21]-200^g=0;$$

$$[6]+[7]+[20]-200^g=0;$$

$$[8]+[9]+[19]-200^g=0;$$

$$[10]+[11]+[18]-200^g=0;$$

$$[12]+[13]+[17]-200^g=0;$$

$$[15]+[16]+[17]+[18]+[19]+[20]+[21]-400^g=0;$$

$$\frac{\sin[1]\cdot\sin[3]\cdot\sin[5]\cdot\sin[7]\cdot\sin[9]\cdot\sin[11]\cdot\sin[13]}{\sin[2]\cdot\sin[4]\cdot\sin[6]\cdot\sin[8]\cdot\sin[10]\cdot\sin[12]\cdot\sin[14]}=1.$$

От условните уравнения в централните системи само страничното уравнение не е в линеен вид. За превръщането на страничните уравнения в линеен вид постъпваме по следния начин.

Нека излезем от страничното уравнение на най-простата централна система

$$\frac{\sin[1] \cdot \sin[3] \cdot \sin[5]}{\sin[2] \cdot \sin[4] \cdot \sin[6]} = 1,$$

Развитието на една функция в Тейлоров ред в общ вид е

$$F(X) = f\{(x_1+h_1), \{(x2+h_2), \ldots, \{(x_n+h_n)\} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \partial f/\partial x_1.h_1 + \partial f/\partial x_2.h_2 + \ldots + \partial f/\partial x_n.h_n + \ldots$$

Тъй като за изравнените стойности имаме

$$\begin{cases} [1]=(1)+v_1 \\ [2]=(2)+v_2 \\ [3]=(3)+v_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [6]=(6)+v_6, \end{cases}$$

$$F(X) = \frac{\sin\{(1)+v_1\}.\sin\{(3)+v_3\}.\sin\{(5)+v_5\}}{\sin\{(2)+v_2\}.\sin\{(4)+v_4\}.\sin\{(6)+v_6\}} - 1 = 0$$

$$F(X) = F(0) + \frac{\cos(1).\sin(1).\sin(3).\sin(5)}{\sin(1).\sin(2).\sin(4).\sin(6)} v_1 - \frac{\cos(2).\sin(1).\sin(3).\sin(5)}{\sin^2(2).\sin(4).\sin(6)} v_2 +$$

$$+ \frac{\cos(3).\sin(3).\sin(1).\sin(5)}{\sin(3).\sin(2).\sin(4).\sin(6)} v_3 - \frac{\cos(4).\sin(1).\sin(3).\sin(5)}{\sin^2(4).\sin(4).\sin(6)} v_4 + \ldots = 0$$

Където

$$F(0) = \frac{\sin(1).\sin(3).\sin(5)}{\sin(2).\sin(4).\sin(6)}$$

Означаваме : $ctg\,(i)\,/\,\rho^{cc} = \alpha_i$, където $\rho^{cc} = 636620$

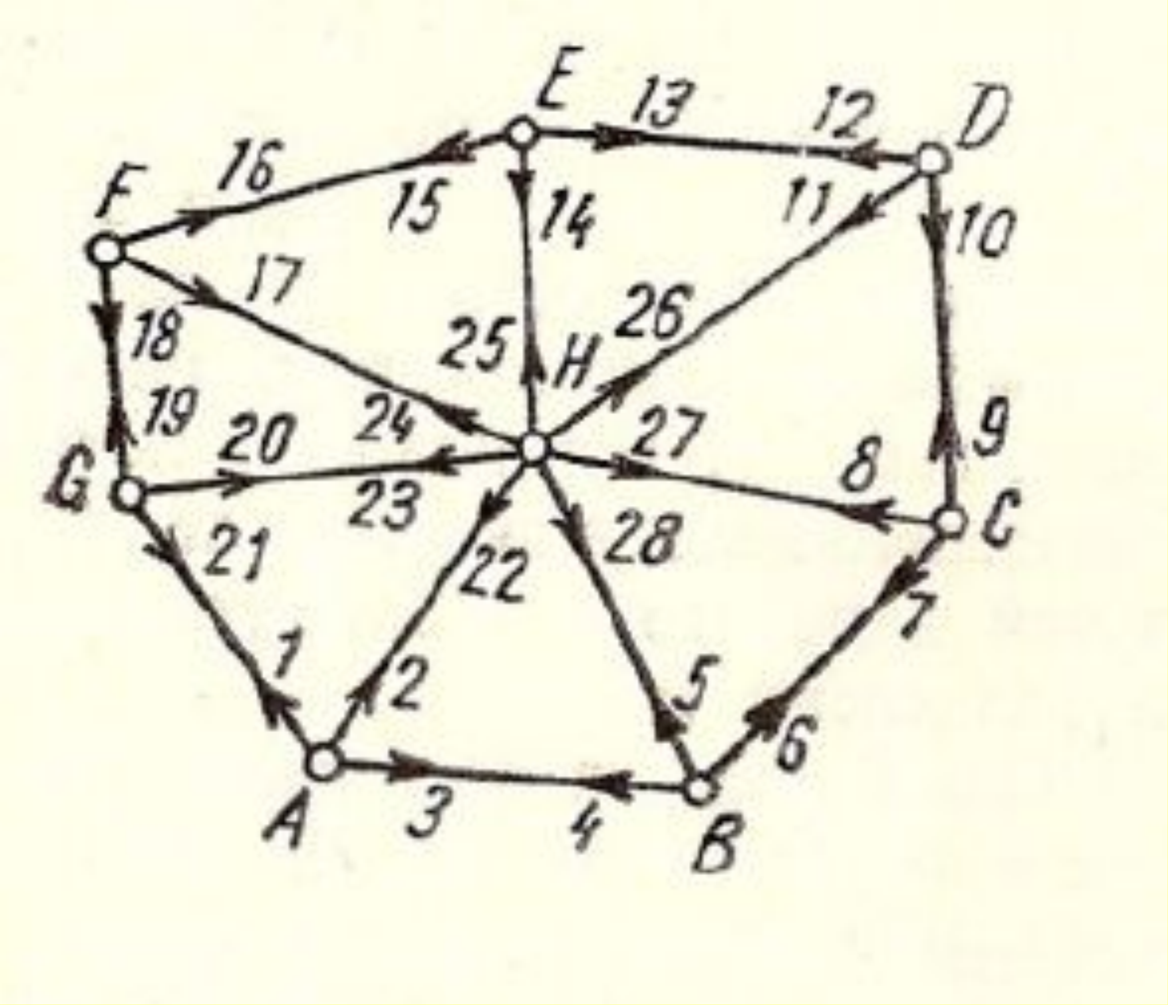
Тогава за страничното уравнение в окончателен линеен вид се получава

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 - \alpha_6 v_6 + w = 0$$

Така условните уравнения за по-голямата централна система ще бъдат

$$\left\{\begin{array}{l}
v_1 + v_{14} + v_{16} + w_1 = 0 \\
v_2 + v_3 + v_{15} + w_2 = 0 \\
v_4 + v_5 + v_{21} + w_3 = 0 \\
v_6 + v_7 + v_{20} + w_4 = 0 \\
v_8 + v_9 + v_{19} + w_5 = 0 \\
v_{10} + v_{11} + v_{18} + w_6 = 0 \\
v_{12} + v_{13} + v_{17} + w_7 = 0 \\
v_{15} + v_{16} + v_{17} + v_{18} + v_{19} + v_{20} + v_{21} + w_8 = 0 \\
\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 - \alpha_6 v_6 + \alpha_7 v_7 - \\
- \alpha_8 v_8 + \alpha_9 v_9 - \alpha_{10} v_{10} + \alpha_{11} v_{11} - \alpha_{12} v_{12} + \alpha_{13} v_{13} - \\
- \alpha_{14} v_{14} + w_9 = 0.
\end{array}\right.$$

Ако в централната система вместо измерени ъгли имаме измерени посоки, както това е показано на фиг. 266, както вече знаем, станционно условно уравнение не ще има. Останалите условни уравнения (7 триъгълникови и едно странично) ще гласят



$$
\left\{
\begin{array}{l}
[3]-[2]+[5]-[4]+[22]-[28]-200^{g}=0 \\
[6]-[5]+[8]-[7]+[28]-[27]-200^{g}=0 \\
[9]-[8]+[11]-[10]+[27]-[26]-200^{g}=0 \\
[12]-[11]+[14]-[13]+[26]-[25]-200^{g}=0 \\
[15]-[14]+[17]-[16]+[25]-[24]-200^{g}=0 \\
[18]-[17]+[20]-[19]+[24]-[23]-200^{g}=0 \\
[2]-[1]+[21]-[20]+[23]-[22]-200^{g}=0
\end{array}
\right.
$$

$$
\frac{\sin\{[2]-[1]\}\cdot\sin\{[5]-[4]\}\cdot\sin\{[8]-[7]\}\cdot\sin\{[11]-[12]\}\cdot\sin\{[14]-[13]\}}{\sin\{[3]-[2]\}\cdot\sin\{[6]-[5]\}\cdot\sin\{[9]-[8]\}\cdot\sin\{[12]-[11]\}\cdot\sin\{[15]-[14]\}}
\cdot\frac{\sin\{[17]-[16]\}\cdot\sin\{[20]-[19]\}}{\sin\{[18]-[17]\}\cdot\sin\{[21]-[20]\}}=1,
$$

$$\begin{cases}
-v_2+v_3-v_4+v_5+v_{22}-v_{28}+w_1=0 \\
-v_5+v_6-v_7+v_8-v_{27}+v_{28}+w_2=0 \\
-v_8+v_9-v_{10}+v_{11}-v_{26}+v_{27}+w_3=0 \\
-v_{11}+v_{12}-v_{13}+v_{14}-v_{25}+v_{26}+w_4=0 \\
-v_{14}+v_{15}-v_{16}+v_{17}-v_{24}+v_{25}+w_5=0 \\
-v_{17}+v_{18}-v_{19}+v_{20}-v_{23}+v_{24}+w_6=0 \\
-v_1+v_2-v_{20}+v_{21}-v_{22}+v_{23}+w_7=0 \\
\alpha_{2-1}(v_2-v_1)+\alpha_{5-4}(v_5-v_4)+\alpha_{8-7}(v_8-v_7)+ \\
+\alpha_{11-10}(v_{11}-v_{10})+\alpha_{14-13}(v_{14}-v_{13})+\alpha_{17-16}(v_{17}-v_{16})+ \\
+\alpha_{20-19}(v_{20}-v_{19})-\alpha_{3-2}(v_3-v_2)-\alpha_{6-5}(v_6-v_5)- \\
-\alpha_{9-8}(v_9-v_8)-\alpha_{12-11}(v_{12}-v_{11})-\alpha_{15-14}(v_{15}-v_{14})- \\
-\alpha_{18-17}(v_{18}-v_{17})-\alpha_{21-20}(v_{21}-v_{20})+w_8=0.
\end{cases}$$

Общ вид на нормалните уравнения на корелатите :

$$[aa]K_1 + [ab]K_2 + [ac]K_3 + \dots\dots\dots + [ar]K_r + w_1 = 0$$
$$[ab]K_1 + [bb]K_2 + [bc]K_3 + \dots\dots\dots + [br]K_r + w_2 = 0$$
$$[ac]K_1 + [bc]K_2 + [cc]K_3 + \dots\dots\dots + [cr]K_r + w_3 = 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$[ar]K_1 + [br]K_2 + [cr]K_3 + \dots\dots\dots + [rr]K_r + w_r = 0$$

$$v_i = a_i K_1 + b_i K_2 + c_i K_3 + \dots\dots + r_i K_r$$

$$m_{e} = \pm \sqrt{[vv] / r}$$

$$[aa/p]K_1 + [ab/p]K_2 + [ac/p]K_3 + \dots\dots\dots + [ar/p]K_r + w_1 = 0$$
$$[ab/p]K_1 + [bb/p]K_2 + [bb/p]K_3 + \dots\dots\dots + [br/p]K_r + w_2 = 0$$
$$[ac/p]K_1 + [bc/p]K_2 + [cc/p]K_3 + \dots\dots\dots + [cr/p]K_r + w_3 = 0$$

. . . .

. . . .

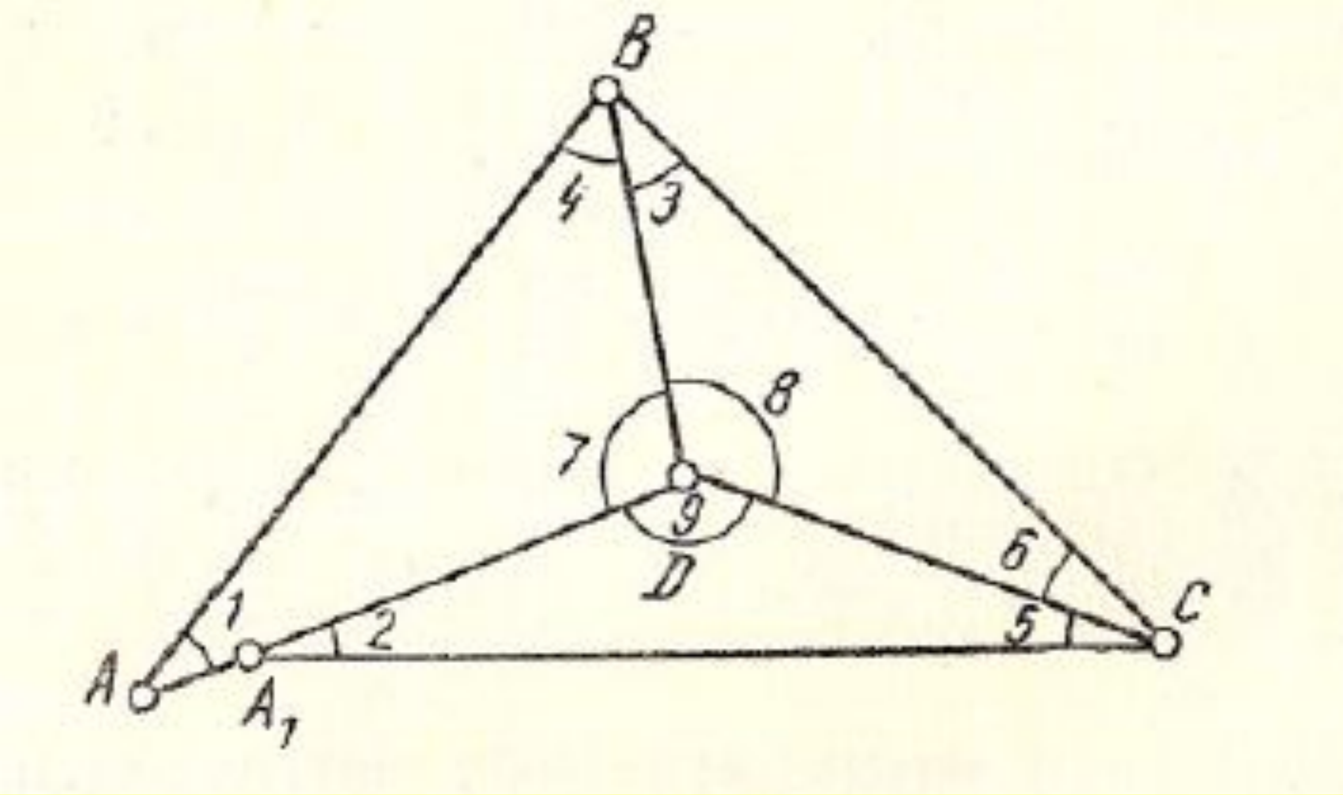
. . . .

$$[ar/p]K_1 + [br/p]K_2 + [cr/p]K_3 + \dots\dots\dots + [rr/p]K_r + w_r = 0$$

$$v_i = a_i/\mathrm{p}_i\, K_1 + b_i/\mathrm{p}_i\, K_2 + c_i/\mathrm{p}_i\, K_3 + \dots\dots + r_i/\mathrm{p}_i\, K_r$$

$$m_{e\,=} \pm \sqrt{}[\mathrm{p}vv] / r$$

Тук трябва да се изтъкне, че страничните условни уравнения се явяват същите и при триангулации върху сферата. Така, ако вземем за пример най-простата централна система (фиг. 263) и приемем, че същата е върху кълбо с радиус R, за сферическите страни ще имаме



$$\sin\left(\frac{BD}{R}\right)=\sin\left(\frac{AD}{R}\right)\cdot\frac{\sin[1]}{\sin[4]};$$

$$\sin\left(\frac{CD}{R}\right)=\sin\left(\frac{BD}{R}\right)\cdot\frac{\sin[3]}{\sin[6]}=\sin\left(\frac{AD}{R}\right)\cdot\frac{\sin[1]\,.\,\sin[3]}{\sin[4]\,.\,\sin[6]};$$

$$\sin\left(\frac{AD_1}{R}\right)=\sin\left(\frac{CD}{R}\right)\cdot\frac{\sin[5]}{\sin[2]}=\sin\left(\frac{AD}{R}\right)\frac{\sin[1]\,.\,\sin[3]\,.\,\sin[5]}{\sin[2]\,.\,\sin[4]\,.\,\sin[6]},$$

или, като приемем и тук, че $\frac{AD_1}{R}=\frac{AD}{R}$, ще получим същото условно уравнение:

$$\frac{\sin[1]\,.\,\sin[3]\,.\,\sin[5]}{\sin[2]\,.\,\sin[4]\,.\,\sin[6]}=1.$$

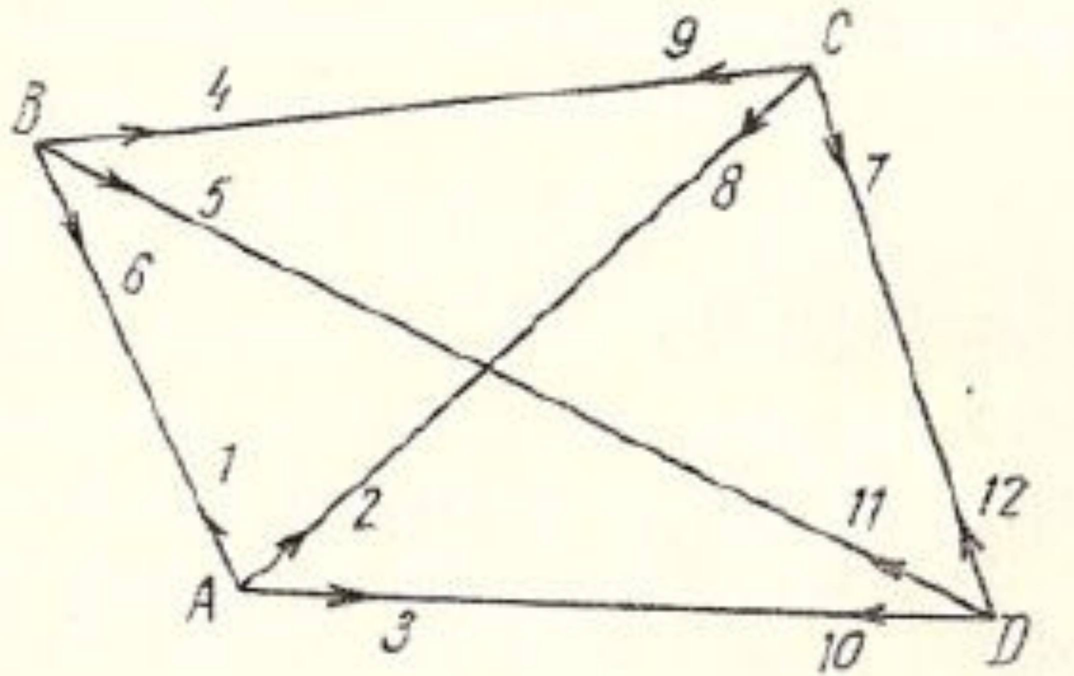
Тук обаче ъглите (1), (2), (3), . . . , (6) са *измерените върху сферата ъгли.*

Както ще видим по-нататък, това обстоятелство — еднаквите уравнения в равнината и върху сферата, се използва за проверка при съставянето на страничните условни уравнения.

1. УСЛОВНО ИЗРАВНЕНИЕ НА ГЕОДЕЗИЧЕСКИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Четириъгълник, в който са измерени и двата диагонала, се нарича геодезически или още пълен четириъгълник (фиг. 270). Най-простата централна система, а именно триъгълник, чиито върхове са съединени с една централна точка (фиг. 263), представлява също така геодезически четириъгълник.

Геодезическият четириъгълник се използува в практиката твърде често като самостоятелна триангулачна мрежа или като съставна част на по-голяма и по-сложна мрежа.



В геодезическия четириъгълник имаме:

$p=p_1=4$ ... брой на всички точки (на всичките е станционирано);

$l=l_1=6$ ... брой на всички страни (всичките са двустранно мерени);

$R=12$ ... брой на измерените посоки.

$$\begin{cases} Z_1=1+l_1-p_1 \\ Z_2=l-2p+3 \\ \overline{Z=R-p_1-2p+4.} \end{cases}$$

$Z_1=3$ ... брой на полигоновите уравнения;

$Z_2=1$ ... брой на страничните уравнения;

$Z=4$ ... общ брой на условните уравнения.

В геодезическия четириъгълник могат да бъдат съставени 7 полигонови уравнения:

От всичките седем възможни полигонови уравнения трябва да се подберат само три — колкото е броят на независимите полигонови уравнения. Всички останали са зависими и могат да се получат от трите уравнения чрез събиране или изваждане.

При подбирането на полигоновите уравнения трябва да се има пред вид следното:

а) избраните уравнения да бъдат независими; така например не могат да се вземат уравненията, получени от триъгълниците ABC и ACD и от четириъгълника $ABCD$ (последното уравнение се получава чрез събиране на първите две);

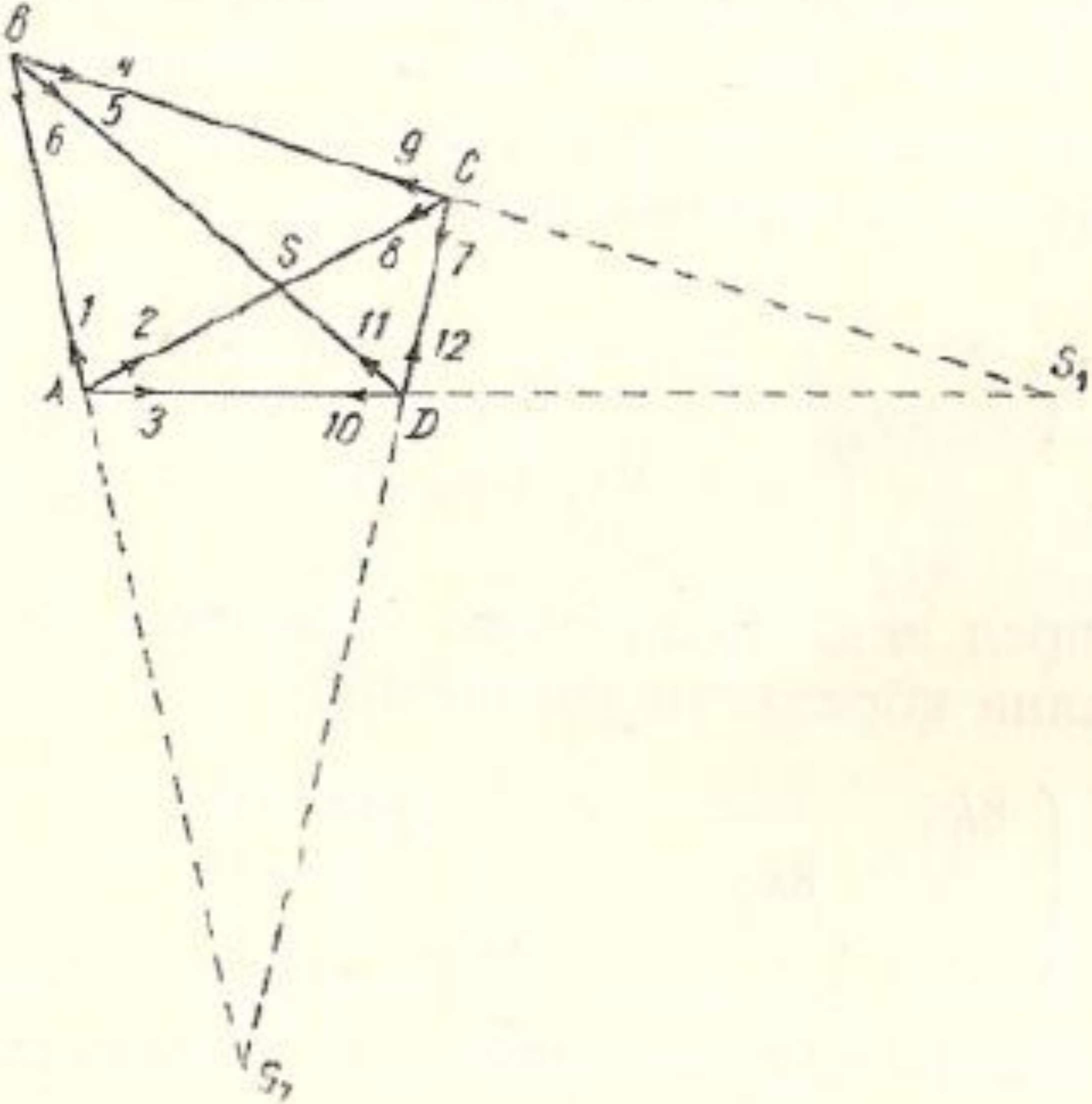
б) избраните уравнения да имат известни предимства.

Въз основа на първото изискване като полигонови условни уравнения при изравнението на геодезическия четириъгълник могат

да бъдат взети кои да са три от четирите триъгълникови уравнения или пък трите четириъгълникови уравнения.

Триъгълниковите уравнения имат това предимство, че в тях влизат само по шест поправки, докато броят на поправките в четириъгълниковите уравнения е осем. Четириъгълниковите уравне-

За получаване на страничното уравнение постъпваме по следния начин (фиг. 271).



Нека излезем от страната AB. Тогава за страната BC от ΔABC имаме

$$\overline{BC} = \overline{AB} \frac{\sin\{[2]-[1]\}}{\sin\{[9]-[8]\}}.$$

По-нататък за страната CD от ΔBCD получаваме

$$\overline{CD} = \overline{BC} \frac{\sin\{[5]-[4]\}}{\sin\{[12]-[11]\}} = \overline{AB} \frac{\sin\{[2]-[1]\} \cdot \sin\{[5]-[4]\}}{\sin\{[9]-[8]\} \cdot \sin\{[12]-[11]\}}.$$

Продължавайки така, за страната AD от ΔACD ще имаме

$$\overline{AD} = \overline{CD} \frac{\sin\{[8]-[7]\}}{\sin\{[3]-[2]\}} = \overline{AB} \frac{\sin\{[2]-[1]\} \cdot \sin\{[5]-[4]\} \cdot \sin\{[8]-[7]\}}{\sin\{[9]-[8]\} \cdot \sin\{[12]-[11]\} \cdot \sin\{[3]-[2]\}}.$$

Най-сетне ще получим отново страната AB от ΔABD:

$$\overline{AB} = \overline{AD} \frac{\sin\{[11]-[10]\}}{\sin\{[6]-[5]\}} =$$

$$= \overline{AB} \frac{\sin\{[2]-[1]\} \cdot \sin\{[5]-[4]\} \cdot \sin\{[8]-[7]\} \cdot \sin\{[11]-[10]\}}{\sin\{[9]-[8]\} \cdot \sin\{[12]-[11]\} \cdot \sin\{[3]-[2]\} \cdot \sin\{[6]-[5]\}}.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\sin\{[2]-[1]\}\,.\,\sin\{[5]-[4]\}\,.\,\sin\{[8]-[7]\}\,.\,\sin\{[11]-[10]\}}{\sin\{[3]-[2]\}\,.\,\sin\{[6]-[5]\}\,.\,\sin\{[9]-[8]\}\,.\,\sin\{[12]-[11]\}}=1,$$

което представлява страничното уравнение в геодезическия четириъгълник.

Същото уравнение може да се получи направо, ако разгледаме четириъгълника като централна система с централна точка S — пресечката на двата диагонала. Както видяхме, при централната система страничното условно уравнение представлява отношението на произведението на синусите от десните (или левите) ъгли, гледано от централната точка, към произведението на синусите от левите (десните) ъгли. По този начин страничното уравнение (52.11) се получава направо чрез използуване на точката S като полюс.

Освен така полученото странично уравнение в геодезическия четириъгълник могат да се получат и други странични уравнения.

Така, ако използваме точката S_1 като полюс, ще имаме

$$\frac{S_1 C}{S_1 A} \cdot \frac{S_1 A}{S_1 B} \cdot \frac{S_1 B}{S_1 D} \cdot \frac{S_1 D}{S_1 C} = 1$$

или, като заместим със синусите от съответните ъгли, ще се получи

$$\frac{\sin\{[3]-[2]\} . \sin\{[6]-[4]\} . \sin\{[11]-[10]\} . \sin\{[9]-[7]\}}{\sin\{[9]-[8]\} . \sin\{[3]-[1]\} . \sin\{[5]-[4]\} . \sin\{[12]-[10]\}} = 1.$$

Ако използваме като полюс точката S_2, ще имаме

$$\frac{S_2 A}{S_2 C} \cdot \frac{S_2 C}{S_2 B} \cdot \frac{S_2 B}{S_2 D} \cdot \frac{S_2 D}{S_2 A} = 1,$$

а като заместим, получава се

$$\frac{\sin\{[8]-[7]\} . \sin\{[6]-[4]\} . \sin\{[12]-[11]\} . \sin\{[3]-[1]\}}{\sin\{[2]-[1]\} . \sin\{[9]-[7]\} . \sin\{[6]-[5]\} . \sin\{[12]-[10]\}} = 1.$$

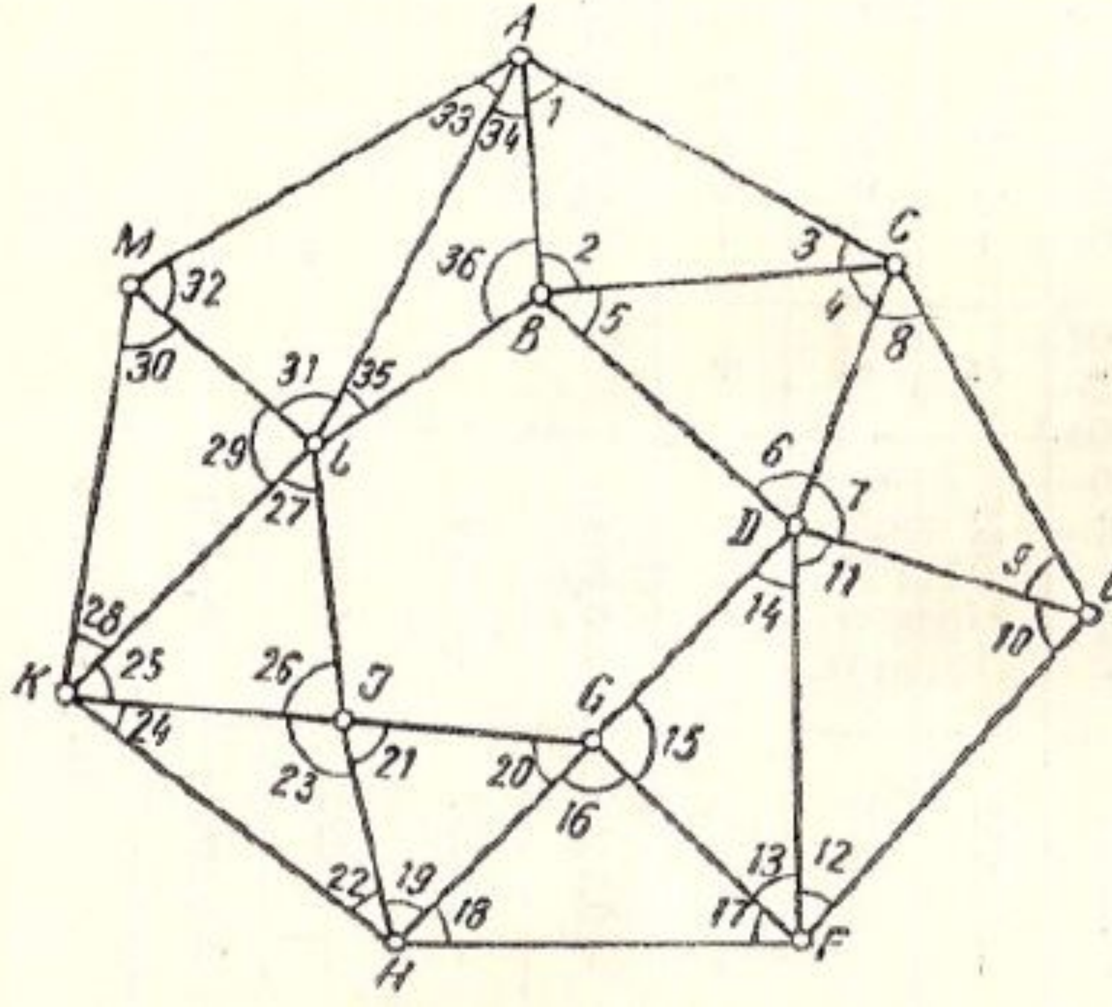
За полюси могат да бъдат използвани и върховете A, B, C и D на четириъгълника.

Следователно възможните странични уравнения в геодезическия четириъгълник са 7 на брой, от които 3 са осемчленни и 4 — шестчленни.

Тъй като за изравнението на геодезическия четириъгълник е необходимо само едно странично уравнение, от горните седем уравнения трябва да се избере най-подходящото. Тук трябва още

1. УСЛОВНО ИЗРАВНЕНИЕ НА ВЕНЕЧНА СИСТЕМА

Венечната система представлява затворена триангулачна верига, която загражда като венец известна част от земната повърхнина (фиг. 275).



В дадената на фиг. 275 венечна система броят на триангулачните точки е $p=12$, при което $p=p_1$, т. е. на всички точки е станционирано, броят на измерените ъгли е $W=36$, а броят на триъгълниковите страни (всички двойно измерени) е $l=l_1=24$.

Ако използуваме изведените формули (49.5) за установяване броя на условните уравнения в мрежи, в които са измерени ъгли, за случая ще имаме:

$Z_0=W-(l+l_1)+p_1=0$ . . . брой на станционните уравнения;

$Z_1=1+l_1-p_1=13$ . . . брой на полигоновите уравнения;

$Z_2=l-2p+3=3$ . . . брой на страничните уравнения;

$Z=W-2p+4=16$ . . . общ брой на условните уравнения.

От всичките 16 условни уравнения могат много лесно да бъдат съставени полигоновите уравнения — в случая те ще бъдат 12 триъгълникови и едно за петоъгълника *BDGJL*, при който ще се използуват външните ъгли. Тези уравнения ще гласят:

$$
\begin{cases}
v_1+v_2+v_3+w_1=0\\
v_4+v_5+v_6+w_2=0\\
v_7+v_8+v_9+w_3=0\\
v_{10}+v_{11}+v_{12}+w_4=0\\
v_{13}+v_{14}+v_{15}+w_5=0\\
v_{16}+v_{17}+v_{18}+w_6=0\\
v_{19}+v_{20}+v_{21}+w_7=0\\
v_{22}+v_{23}+v_{24}+w_8=0\\
v_{25}+v_{26}+v_{27}+w_9=0\\
v_{28}+v_{29}+v_{30}+w_{10}=0\\
v_{31}+v_{32}+v_{33}+w_{11}=0\\
v_{34}+v_{35}+v_{36}+w_{12}=0\\
v_2+v_5+v_6+v_7+v_{11}+v_{14}+v_{15}+v_{16}+v_{20}+\\
+v_{21}+v_{23}+v_{26}+v_{27}+v_{29}+v_{31}+v_{35}+v_{36}+w_{13}=0
\end{cases}
$$

Едното странично уравнение може да се получи, като се изходи от коя да е триъгълникова страна и като се премине по цялата верига, се достигне пак до същата страна. Така, ако изходим от страната AB, ще имаме

$$\overline{AB} = \overline{AB}\,\frac{\sin[1]\,.\,\sin[5]\,.\,\sin[8]\,.\,\sin[10]\,\sin[14]\,\sin[17]\sin[20]\,.}{\sin[3]\,.\,\sin[6]\,\sin[9]\,.\,\sin[12]\,\sin[15]\,\sin[18]\,\sin[21]\,.}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\sin[22]\,\sin[26]\,.\,\sin[28]\,.\,\sin[32]\,\sin[35]}{\sin[24]\,\sin[27]\,\sin[30]\,\sin[33]\,.\,\sin[36]}$$

или

$$\frac{\sin[1]\,.\,\sin[5]\,\sin[8]\,\sin[10]\,\sin[14]\,\sin[17]\,\sin[20]\,\sin[22]\,.}{\sin[3]\,\sin[6]\,\sin[9]\,\sin[12]\,\sin[15]\,\sin[18]\,\sin[21]\,\sin[24]\,.}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\sin[26]\,\sin[28]\,\sin[32]\,\sin[35]}{\sin[27]\,\sin[30]\,.\,\sin[33]\,.\,\sin[36]} = 1.$$

Превърнато в линеен вид, като поправките бъдат подредени по възходящ ред, това условно уравнение ще гласи

$$\begin{cases} v_1 - v_3 + v_5 - v_6 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{12} + v_{14} - v_{15} + v_{17} - v_{18} + \\ + v_{20} - v_{21} + v_{22} - v_{24} + v_{26} - v_{27} + v_{28} - v_{30} + v_{32} - v_{33} + \\ + v_{35} - v_{36} + w_{14} = 0. \end{cases}$$

Останалите две странични условни уравнения не могат да бъдат образувани в известната ни форма на страничните уравнения. Тук те се явяват във формата на така наречените *координатни уравнения*.

За получаване на координатните уравнения изхождаме от абсцисата и ординатата на произволно избрана от нас точка в дадена или произволно приета от нас координатна система и като преминем през околовръстните точки, идваме пак до същата точка. Получените по този път координати (абсциса и ордината) трябва да съвпадат с изходните. Така например, ако изходим от абсцисата и ординатата на точка B и като преминем през точките D, G, J и L и стигнем отново до B, ще имаме следните координатни (ординатно и абсцисно) уравнения:

$$\begin{cases} \overline{BD}\,.\sin\alpha_{BD}+\overline{DG}\,.\sin\alpha_{DG}+\overline{GJ}\,.\sin\alpha_{GJ}+\overline{JL}.\sin\alpha_{JL}+\overline{LB}.\sin\alpha_{LB}=0 \\ \overline{BD}.\cos\alpha_{BD}+\overline{DG}.\cos\alpha_{DG}+\overline{GJ}.\cos\alpha_{GJ}+\overline{JL}.\cos\alpha_{JL}+\overline{LB}.\cos\alpha_{LB}=0. \end{cases}$$

В тези уравнения триъгълниковите страни BD, DG, GJ, JL и LB, както и посочните ъгли α_{BD}, α_{DG}, α_{GJ}, α_{JL} и α_{LB} трябва да бъдат изразени чрез измерените величини, в случая ъглите във венечната система. При използуване на измерените стойности горните уравнения, разбира се, не ще бъдат удовлетворени, а ще се получат известни несъвпадения.

За изразяване на триъгълниковите страни чрез измерените ъгли трябва да излезем от изходната (базисната) страна. Нека приемем, че в дадената венечна система базисна страна е страната AB. Тогава ще имаме

$$\begin{cases} \overline{BD}=\overline{AB}\dfrac{\sin[1].\sin[4]}{\sin[3].\sin[6]}, \\ \overline{DG}=\overline{AB}\dfrac{\sin[1].\sin[5].\sin[8].\sin[10].\sin[13]}{\sin[3].\sin[6].\sin[9].\sin[12].\sin[15]}, \\ \overline{GJ}=\overline{AB}\dfrac{\sin[1].\sin[5].\sin[8]\sin[10].\sin[14].\sin[17].\sin[19]}{\sin[3].\sin[6].\sin[9].\sin[12].\sin[15].\sin[18].\sin[21]}, \\ \overline{JL}=\overline{AB}\dfrac{\sin[36].\sin[33].\sin[30].\sin[25]}{\sin[35].\sin[32].\sin[28].\sin[26]}, \\ \overline{LB}=\overline{AB}\dfrac{\sin[34]}{\sin[35]}. \end{cases}$$

За изразяване на посочните ъгли чрез измерените ъгли трябва също така да изходим от някой начален посочен ъгъл, който може да бъде даден или произволно приет от нас. За такъв нека приемем посочния ъгъл α_{AB} на страната AB.

В такъв случай ще имаме

$$\begin{cases} \alpha_{BD}=\alpha_{AB}+[2]+[5]-200^g \\ \alpha_{DG}=\alpha_{AB}+[2]+[5]+[6]+[7]+[11]+[14]-400^g \\ \alpha_{GJ}=\alpha_{AB}+[2]+[5]+[6]+[7]+[11]+[14]+[15]+[16]+[20]- \\ -600^g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{JL}=\alpha_{AB}-[27]-[29]-[31]-[35]-[36]+600^g \\ \alpha_{LB}=\alpha_{AB}-[36]. \end{cases}$$

$$\overline{AB}\,\frac{\sin[1]\,.\,\sin[4]}{\sin[3]\,.\,\sin[6]}\cdot\sin\{\alpha_{AB}+[2]+[5]-200^g\}+$$

$$+\widehat{AB}\,\frac{\sin[1]\,.\,\sin[5]\,.\,\sin[8]\,.\,\sin[10]\,.\,\sin[13]}{\sin[3]\,.\,\sin[6]\,.\,\sin[9]\,.\,\sin[12]\,.\,\sin[15]}\cdot\sin\{\alpha_{AB}+$$

$$+[2]+[5]+[6]+[7]+[11]+[14]-400^g\}+$$

$$+\overline{AB}\,\frac{\sin[1]\sin[5]\,.\,\sin[8]\,.\,\sin[10]\,.\,\sin[14]\sin[17]\sin[19]}{\sin[3]\,.\,\sin[6]\,.\,\sin[9]\,.\,\sin[12]\,.\,\sin[15]\,.\,\sin[18]\,.\,\sin[21]}\cdot\sin\{\alpha_{AB}+$$

$$+[2]+[5]+[6]+[7]-[11]+[14]+[15]+[16]+[20]-600^g\}+$$

$$+\overline{AB}\,\frac{\sin[36]\sin[33]\sin[30]\sin[25]}{\sin[35]\sin[32]\sin[28]\sin[26]}\cdot\sin\{\alpha_{AB}-[27]-[29]-[31]-[35]-$$

$$-[36]+600^g\}+\overline{AB}\,\frac{\sin[34]}{\sin[35]}\cdot\sin\{\alpha_{AB}-[36]\}=0.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sin[1] \cdot \sin[4] \cdot \sin[9] \cdot \sin[12] \cdot \sin[15] \cdot \sin[18] \cdot \sin[21] \cdot \sin[26] \cdot \\
&\cdot \sin[28] \cdot \sin[32] \cdot \sin[35] \cdot \sin\{\alpha_{AB} + [2] + [5] - 200^{g}\} + \\
&+ \sin[1] \cdot \sin[5] \cdot \sin[8] \cdot [10] \cdot \sin[13] \cdot \sin[18] \cdot \sin[21] \cdot \\
&\cdot \sin[26] \cdot \sin[28] \cdot \sin[32] \cdot \sin[35] \cdot \sin\{\alpha_{AB} + [2] + [5] + [6] + \\
&+ [7] + [11] + [14] - 400^{g}\} + \sin[1] \cdot \sin[5] \cdot \sin[8] \cdot \sin[10] \cdot \\
&\cdot \sin[14] \cdot \sin[17] \cdot \sin[19] \cdot \sin[26] \cdot \sin[28] \cdot \sin[32] \cdot \sin[35] \cdot \\
&\cdot \sin\{\alpha_{AB} + [2] + [5] + [6] + [7] + [11] + [14] + [15] + [16] + [20] - \\
&- 600^{g}\} + \sin[3] \cdot \sin[6] \cdot \sin[9] \cdot \sin[12] \cdot \sin[15] \cdot \sin[18] \cdot \\
&\sin[21] \cdot \sin[25] \cdot \sin[30] \cdot \sin[33] \cdot \sin[36] \cdot \sin\{\alpha_{AB} - [27] - [29] - \\
&- [31] - [35] - [36] + 600^{g}\} + \sin[3] \cdot \sin[6] \cdot \sin[9] \cdot \sin[12] \cdot \sin[15] \cdot \\
&\cdot \sin[18] \cdot \sin[21] \cdot \sin[26] \cdot \sin[28] \cdot \sin[32] \cdot \sin[34] \cdot \sin\{\alpha_{AB} - \\
&- [36]\} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

По същия начин се получава и абсцисното уравнение:

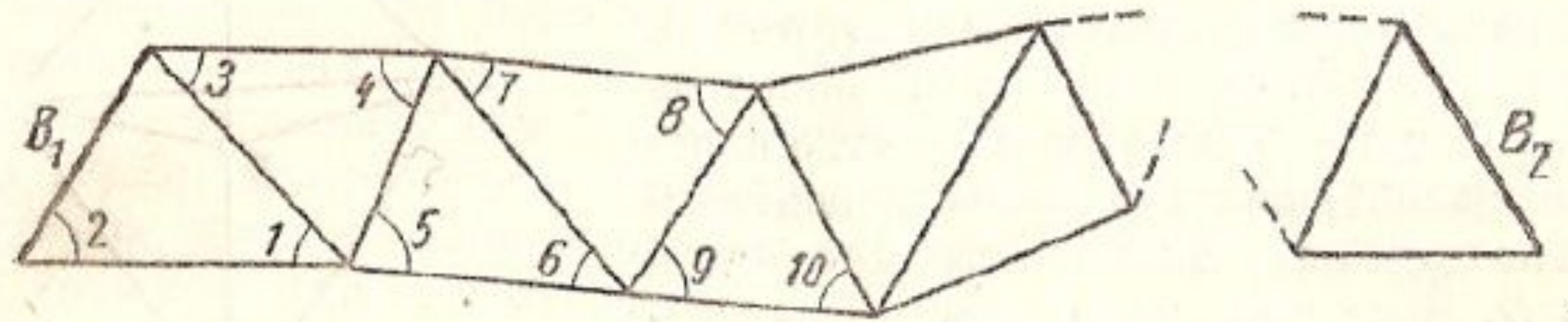
$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sin[1]\,.\,\sin[4]\,.\,\sin[9]\,.\,\sin[12]\,.\,\sin[15]\,.\,\sin[18]\,.\,.\,\sin[21]\,.\\
&.\,\sin[26]\,.\,\sin[28]\,.\,\sin[32]\,.\,\sin[35]\,.\,\cos\{\alpha_{AB}+[2]+[5]-200^g\}+\\
&+\sin[1]\,.\,\sin[5]\,.\,\sin[8]\,.\,\sin[10]\,.\,\sin[13]\,.\,\sin[18]\,.\\
&.\,\sin[21]\,.\,\sin[26]\,.\,\sin[28]\,.\,\sin[32]\,.\,\sin[35]\,.\cos\{\alpha_{AB}+[2]+[5]+\\
&+[6]+[7]+[11]+[14]-400^g\}+\sin[1]\,.\,\sin[5]\,.\,\sin[8]\,.\,\sin[10]\,.\\
&.\sin[14]\,.\,\sin[17]\,.\,\sin[19]\,.\,\sin[26]\,.\,\sin[28]\,.\,\sin[32]\,.\,\sin[35]\,.\\
&.\,\cos\{\alpha_{AB}+[2]+[5]+[6]+[7]+[11]+[14]+[15]+[16]+\\
&+[20]-600^g\}+\sin[3]\,.\,\sin[6]\,.\,\sin[9]\,.\,\sin[12]\,.\,\sin[15]\,.\,\sin[18]\,.\\
&.\,\sin[21]\,.\,\sin[25]\,.\,\sin[30]\,.\,\sin[33]\,.\,\sin[36]\,.\,\cos\{\alpha_{AB}-[27]-\\
&-[29]-[31]-[35]-[36]+600^g\}+\sin[3]\,.\,\sin[6]\,.\,\sin[9]\,.\\
&.\,\sin[12]\,.\,\sin[15]\,.\,\sin[18]\,.\,\sin[21]\,.\,\sin[26]\,.\,\sin[28]\,.\,\sin[32]\,.\\
&.\,\sin[34]\,.\,\cos\{\alpha_{AB}-[36]\}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Така получените координатни уравнения не са обаче в линеен вид.

1. УСЛОВНО ИЗРАВНЕНИЕ СВОБОДНИ ЪГЛОВИ МРЕЖИ С ПОВЕЧЕ ОТ ЕДНА БАЗА

В триангулачните мрежи, както вече изтъкнахме, трябва да се измерва винаги повече от една база. Това се прави, от една страна, за да не се допускат евентуални груби грешки, и от друга страна — да се увеличи точността на триангулачната мрежа.

Освен едната база, която е необходима, за да се определи мрежата по големина, всяка друга измерена в повече база дава по едно условно уравнение, наречено *базисно уравнение*. Следователно във всяка самостоятелна триангулачна мрежа освен общите условни уравнения, броят на които се определя по формули (49.5) или (49.8), трябва да бъдат съставени още и $(q-1)$ базисни уравнения, ако q е броят на базите (или базисните страни) в мрежата.



Нека приемем, че в дадена триангулачна мрежа са измерени базите B_1 и B_2. Във фиг. 278 даваме само част от мрежата — веригата от триъгълници, която представлява най-кратката връзка между двете бази. В този случай имаме

$$B_2 = B_1 \frac{\sin[1] \,.\, \sin[3] \,.\, \sin[5] \ldots}{\sin[2] \,.\, \sin[4] \,.\, \sin[6] \ldots}\,.$$

Вследствие на неизбежните случайни грешки в измерените ъгли и бази горното уравнение, разбира се, не ще бъде удовлетворено, а ще се получи известно несъвпадение. Това несъвпадение w, както

Като се вземе пред вид, че грешките в измерване на базите се несравнимо по-малки от грешките в измерване на ъглите, прието е поправките в базите да бъдат пренебрегнати, т. е. смята се, че $v_{B_1} = v_{B_2} = 0$, което и в действителност практически се получава.

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_5 \cdot v_5 + \ldots -$$

$$- \alpha_2 \cdot v_2 - \alpha_4 \cdot v_4 - \alpha_6 \cdot v_6 - \ldots + w = 0.$$

базисното уравнение в линеен вид

Тук трябва да изтъкнем, че в базисните уравнения обикновено не влизат самите бази, а базисните (изходните) страни. Така във фиг. 278 B_1 и B_2 не са бази, а базисни страни. Поради това преди изравнението на триангулачната мрежа трябва да бъдат изравнени самостоятелно и поотделно базисните мрежи. С изравнените стойности на ъглите в тези мрежи изчисляваме окончателните стойности на базисните страни, които стойности вмъкваме в изравнението на дадената триангулачна мрежа.

Трябва още да изтъкнем, че базисните уравнения при триангулации от по-горен клас (I и II, а в някои случаи и III) могат да се получат или чрез прилагане на Лежандровата теорема, т. е. като се превърнат сферическите триъгълници в равнинни, или като се използуват направо измерените върху елипсоида ъгли, както това показахме при изравнението на централната система. В такъв случай трябва да приемем, че всеки триъгълник лежи върху кълбо със среден радиус, получен от радиусите на закривлението в трите върха на триъгълника.