

Уравнения

Лысенко Надежда Анатольевна

Содержание

1 Понятие уравнения и его свойства

2 Методы решения уравнений

- Метод разложения на множители
- Метод введения новой переменной
- Функционально-графический метод

Теоретическая часть

- 1 Понятие уравнения (определение, равносильность)
- 2 Теоремы о равносильности уравнений
- 3 Понятие алгебраического, рационального, дробно-рационального, иррационального уравнений
- 4 Суть методов а) разложение на множители
б) замена переменной
в) функционально-графический

Метод разложения на множители

Пример 1. Решить алгебраическое уравнение :

$$(x-\alpha)^3+(x-b)^3=(2x-\alpha-b)^3 .$$

- Соберём все члены в левой части уравнения и сумму кубов $(x-\alpha)^3+(x-b)^3$ разложим на множители. После этого в левой части можно выделить общий множитель $2x-\alpha-b$:

$$(2x-\alpha-b)((x-\alpha)^2-(x-\alpha)(x-b)+(x-b)^2-(2x-\alpha-b)^2)=0,$$

$$(2x-\alpha-b)(-3x^2+3(\alpha+b)x-3\alpha b)=0.$$

$$\text{Отсюда } x_1=(\alpha+b):2, \quad x_2=\alpha, \quad x_3=b.$$

- Ответ: $(\alpha+b):2; \alpha; b$.

- Пример 2. Решите дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{2}{x+8} + \frac{5}{x+9} = \frac{3}{x+15} + \frac{4}{x+6}$$

- Представим уравнение в таком виде

$$\frac{5}{x+9} - \frac{4}{x+6} = \frac{3}{x+15} - \frac{2}{x+8}$$

Приведем разности в левой и правой частях этого уравнения к общим знаменателям:

$$\frac{x-6}{(x+9)(x+6)} = \frac{x-6}{(x+15)(x+8)}$$

$$(x-6) \left(\frac{1}{(x+9)(x+6)} - \frac{1}{(x+15)(x+8)} \right) = 0$$

Приравняем нулю каждый из множителей в левой части последнего уравнения.

Получим $x - 6 = 0$ или $8x = 66$, учитывая при этом, что $x \neq -9$, $x \neq -6$, $x \neq -15$, $x \neq -8$.

Тогда

$$x = 6 \text{ или } x = -\frac{33}{4}$$

Ответ: 6, -33/4.

Пример 3. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1.$$

- Возведем обе части уравнения в куб, пользуясь формулой

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

- Будем иметь:

$$x-1 + 2x-1 + 3\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)} \cdot (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1}) = 1$$

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)} \cdot (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1}) = 1 - x$$

А теперь воспользуемся исходным уравнением, на основании которого сумма в скобках равна 1:

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)} = 1-x.$$

Последнее уравнение также возведем в куб:

$$(x-1)(2x-1) = (1-x)^3, \quad (x-1)(2x-1+(x-1)^2) = 0, \quad (x-1)x^2 = 0.$$

Отсюда $x_1=1, x_2=x_3=0$.

Проверка по первоначальному уравнению показывает, что значение $x=1$ ему удовлетворяет, а значение $x=0$ – не удовлетворяет.

- Ответ: 1.

Введение новой переменной

Пример 4. Решите уравнение:

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 4x^2.$$

- В левой части уравнения умножим первый множитель на четвёртый, второй на третий, получим: $(x^2-9x+8)(x^2-6x+8) = 4x^2$.

А дальше разделим обе части уравнения на x^2 , пользуясь тем, что значение $x=0$ не является корнем уравнения:

$$\left(x-9+\frac{8}{x}\right)\left(x-6+\frac{8}{x}\right)=4$$

Введем подстановку: $x - 9 + \frac{8}{x} = y$. Будем
иметь:

$$y(y+3)=4, y^2+3y-4=0; y_1=1, y_2=-4.$$

В обоих случаях найдем
совокупность уравнений

$$\begin{cases} x - 9 + \frac{8}{x} = 0, \\ x - 9 + \frac{8}{x} = -4; \end{cases}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{17}$$

• Ответ: $5 \pm \sqrt{17}$.

Пример 5. Решите уравнение: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

• Положим $x+4=y$, т. к. $\frac{(x+3) + (x+5)}{2} = x+4$.

Имеем: $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$.

Теперь нужно в левой части уравнения $(y-1)$ и $(y+1)$ возвести в квадрат, а затем то, что получилось, ещё раз возвести в квадрат.

После упрощений образуется биквадратное уравнение: $y^4 + 6y^2 - 7 = 0$.

Его корни $y_{1,2} = \pm 1$. Отсюда $x_1 = -3$, $x_2 = -5$.

• Ответ: $-3; -5$.

Пример 6. Решите уравнение $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$.

- Отнимем от обеих частей уравнения $\frac{2x^2}{x^2+1}$ для того, чтобы получить в левой части квадрат разности:

$$\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x+1}, \quad \frac{x^4}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x^2}{x+1}.$$

А теперь очевидная подстановка $\frac{x^2}{x+1} = y$.

- Ответ: $\frac{\sqrt{2}-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Пример 7. Решите уравнение:

$$x^2 + 8x + 8 = 4(x + 2)\sqrt{x + 1}$$

- Положим $\sqrt{x + 1} = t$.

При $t \geq 0$

это равенство равносильно равенству $x + 1 = t^2$. Получаем систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 8 = 4(x + 2)t \\ x + 1 = t^2 \end{cases}$$

Для ее решения выразим x через t из второго уравнения: $x = t^2 - 1$.

Подставим это выражение в первое уравнение и новое уравнение упростим

$$(t^2-1)^2+8(t^2-1)+8=4(t^2-1)t,$$

$$t^4-2t^2+1+8t^2-8+8=4t^3+4t,$$

$$t^4-4t^3+6t^2-4t+1=0.$$

Последнее уравнение имеет корень $t=1$.

Мало того, проверка показывает, что значение $t=1$ является четырехкратным корнем этого уравнения. Тогда уравнение принимает вид $(t-1)^4=0$. Если $t=1$, то $x=0$.

- Ответ: 0.

Функционально-графический метод

Пример 8. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^3 - x} + \sqrt[4]{x - x^2} = x^3 - 3x + 2.$$

Найдём область определения D уравнения. Она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^3 - x \geq 0, \\ x - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является

$$[-1; 0] \cup [1; \infty)$$

$$[0; 1]$$

, второго отрезок .

Следовательно, область D состоит всего из двух точек -0 и 1 . Значение $x=0$ не удовлетворяет уравнению, значение $x=1$ - удовлетворяет.

- Ответ: 1.

Пример 9. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{x+25} + x = 7.$$

- Очевидно один корень уравнения $x=2$.
Имеет ли оно другие корни?

Левая часть уравнения есть возрастающая функция, как сумма трех возрастающих функций. Но монотонная функция каждое свое значение (в данном случае значение 7) принимает в единственной точке, поэтому других корней у уравнения нет.

- Ответ: 2.